
UNIVERSIDAD Ð SEVILLA
Biblioteca


UMASS
BOSTON





Ex Biblioteca
D. A. de Vlloa



CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII, CONSILIARII REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ PROFESSORIS PRIMARII IN ACADEMIA MARBURGENSI, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

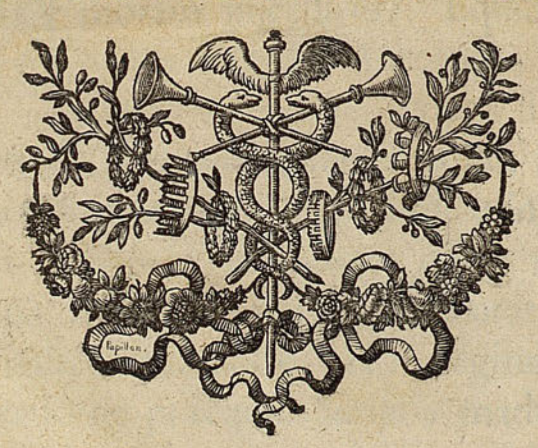
ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS QUINTUS,

Qui Commentationem de Præcipuis Scriptis Mathematicis, Commentationem de Studio Mathematico recte instituendo & Indices in Tomos quinque Matheseos Universæ continet.

EDITIO NOVA,

PRIORI MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.



GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & Socios.

MDCCXLI.



PRÆFATIO.



RODIT tandem Tomus Quintus novæ Editionis Elementorum noſtrorum Matheſeos univerſæ, qui dudum lucem adſpexiſſet, niſi alii labores aliaque impedimenta indeclinabilia moram injeciſſent. Equidem nihil reſtabat quam recenſio Autorum, qui Matheſin vel ſuis inventis, vel ſcriptis illuſtrarunt, quam adjeceramus tam Germanicæ Elementorum Matheſeos, quam primæ Latinæ Editioni; una cum Indice in quatuor Elementorum horum Tomos: ne tamen nimis ſterilis judicaretur Tomus quintus, addere lubuit Commentationem de Studio mathematico recte inſtituendo. Primo igitur loco ſiſtitur brevis Commentatio de præcipuis Scriptis mathematicis. Omnia recenſere nec potuimus, nec recenſeri conſultum fuit. Recen-

ſuimus ea, quæ ipſimet poſſidemus, & pauca quædam, quæ aliunde nobis nota ſunt. Hanc Autorum notitiam abunde ſufficere credimus ei, qui vel ſe totum Matheſi dare, vel ejus aliquam partem ſibi quaſi propriam reddere decreverit. Et quoniam ſingulis adhuc annis ſcripta mathematica prodeunt, unusquiſque, cui volupe fuerit, hanc recenſionem facile continuabit. Qui vero Matheſi tantummodo operam navare voluerit, ut non modo divinæ hujus ſcientiæ compos fiat, verum etiam intellectus eum perfectionis gradum conciliet, ut eodem in omni cognitione reliqua rite ac prompte utatur; ei abunde ſatisfacient ſola Elementa noſtra, ut nullo alio librorum apparatu indigeat. Quodſi autem quis in aliqua ejus parte ulterius progredi voluerit; ex commentatione noſtra facile videbit, quem vel quosnam ſibi eligere debeat duces, ut voti ſui compos reddatur. Ceterum cum nemo Autorum ſibi propoſuerit, ut eam omni perſpicuitate explicaret, quam tyro merito deſideraverit, ac demonſtrationes daret conſummatas, quas in Logica appellamus; ſuademus ſerio ne quis ad lectionem aliorum Autorum accedat, antequam noſtra ſibi familiaria reddiderit. Verendum enim, ne confundatur, & perplexitate deſertor ſtudii utiliſſimi efficiatur. Si quis, ſolius intellectus perficiendi gratia, ad Matheſin animum appellit, is vel in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ Elementaris & Trigonometriæ plane ſubſiſtere, vel ex ceteris addere poteſt, quæ maxime ſunt ad ipſius palatum; modo ſibi caveat, ne negligat eas diſciplinas, ex quibus demonſtrandi principia petuntur, niſi hæc tanquam certa ſumere voluerit, etſi eorum evidentiam non perceperit. Et quænam hic obſervan-

ſervanda ſint, ex Commentatione de Studio mathematico recte inſtituendo haud difficulter addiſcet.

Secundo loco hic comparet Commentatio de Studio mathematico recte inſtituendo. Non omnes, qui eidem ſeſe dedunt, eodem fine ad ipſum accedunt. Quamobrem noſtrum fuit, non idem ſingulis dare conſilium; ſed potius pro diverſitate finis diverſa. Equidem Elementa noſtra eo modo concinnavimus, ut ſingulis ſatisfaciant, quocunque tandem animo ad Matheſin accedant; cum tamen omnibus non conveniant omnia, indicandum omnino erat, quænam omittenda ſint, quænam prætermitti minime debeant, & quomodo in iis percipiendis ſit verſandum, prouti unusquiſque hunc vel alium finem ſibi propoſuerit; quamvis iis, qui ſciendi cupidine flagrant, & in Philoſophia aliiſque ſcientiis cum laude verſari voluerint, commendanda ſit lectio integrorum noſtrorum Elementorum. Ea ſane hoc modo conſcripſimus, ut haud multo temporis ſpatio integram Matheſin addiſcere liceat, ac deinde qualibet ejus parte ulterius progredi detur, quantum libuerit. Cognitu nimirum utiliſſima & quæ ad ulteriora viam ſternunt, cum primis principiis ita connexa ſunt, ut ideas maxime adæquatas ex his Elementis haurire & ex aliis operibus petenda cum iiſdem connectere liceat: id quod etiam in operibus noſtris philoſophicis eadem methodo conſcriptis intendimus. Neque enim alia datur via, qua ad certam & ſolidam rerum cognitionem perveniatur. Etſi autem Matheſis multas afferat utilitates ad felicitatem generis humani promovendam, ut adeo digna ſit, quæ excolatur; non tamen hinc recte infertur, eam omnibus omnino eſſe addiſcendam, qui

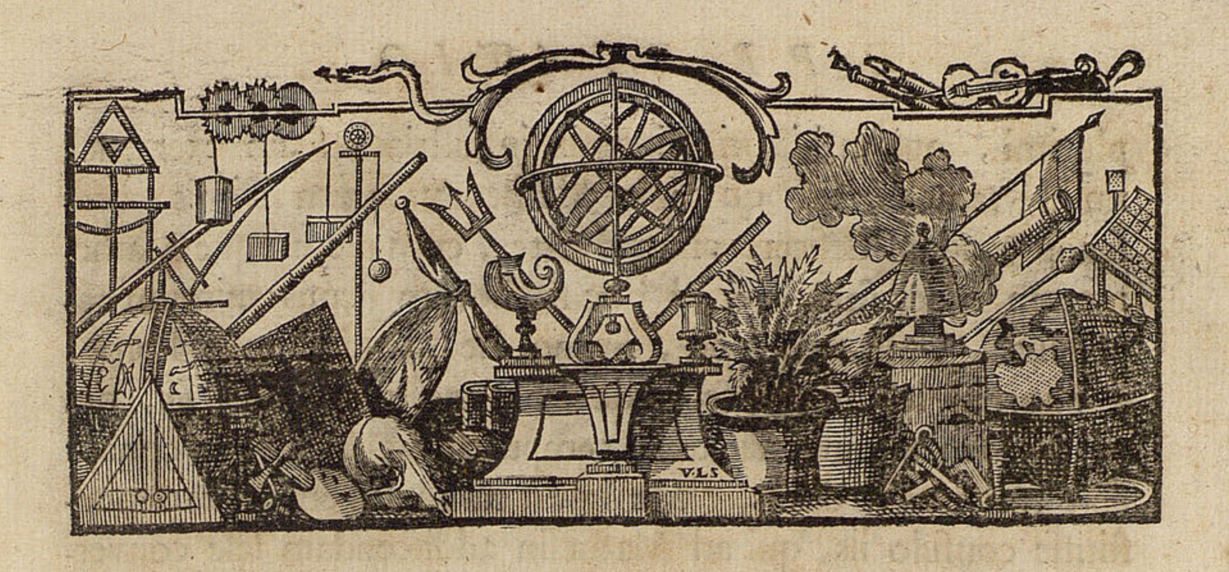
ſtudiis literariis operam navant. Sufficit enim eſſe aliquos, qui eidem, vel uni alterive parti, ſe conſecrant, ut humanum genus utilitates iſtas conſequatur. Enim vero quatenus Studium mathematicum perficit intellectum, ea ejus utilitas eſt, ut nemo ad ſcientias alias tractandas admitti debeat niſi in Matheſi verſatus. Hæc ipſa utilitas omni ævo agnita, ex quo ſcientiæ honos fuit. Semper enim unanimi conſenſu aſſertum, ac hodienum aſſeritur, ſtudio Matheſeos perfici intellectum. Non tamen defuere, qui utilitatem iſtam in dubium vocarunt, cum viderent viros in Matheſi præſtantes nihil agere, ubi extra eandem demonſtrationes dare audent. Immo hinc enata eſt opinio, quaſi ſolius Matheſeos ſit ea, quæ affirmantur vel negantur, demonſtrare; in Philoſophia vero & facultatibus, quæ vocantur ſuperioribus ad demonſtrationes perveniri non poſſe. Ex hoc labyrintho patet egrediendi via, ſi paulo intimius inſpicias, cur Matheſis acuat intellectum. Memini jam alias plus ſimplici vice me monuiſſe, methodo tribuendum eſſe, ut Matheſeos ſtudio perficiatur intellectus. Ut vero methodum diſtincte cognoſcas, eamque in poteſtatem tuam redigas, non quælibet tractatio ſufficit, ſed legitimo quodam modo tractanda eſt Matheſis. Quinam igitur ſit modus, a quo tam præclara utilitas unice ſperanda, in Commentatione noſtra ex inſtituto docemus. Neque enim hactenus ſatis hoc animadverſum ab aliis: unde accidit, ut Mathematici ſummi, qui divinis prorſus inventis ſcientiam nobiliſſimam ditarunt, genuinam demonſtrationis formam non perſpexerint, quemadmodum in ipſa Commentatione clariſſime oſtendi. Quicquid igitur alii ſentiant de Tomo hoc quinto Elementorum

rum Matheseos, quorum unicuique liberum suum relinquimus judicium; ego hoc nomine eundem maximi facio, quod genuinum facultatum mentis nostræ usum hinc addiscere liceat, quo ad solidam rerum cognitionem pervenitur. Non nego eundem usum regulis comprehendi in Logica, & a nobis in opere præsertim Latino majore, quod de Logica conscripsimus, demonstrari. Monui tamen jam alias, studio Matheseos rite instituto eum acquirendum esse. Quomodo igitur id ipsum rite instituatur, ut in omni cognitionis genere facultatum humanarum rectum facere addiscas usum, in Commentatione nostra tanta perspicuitate docuimus, ut, quid amplius desiderari possit, non videamus. Quamobrem, si quis consilio nostro uti voluerit, is in se ipso experietur, quod non modo regulas logicas, quas in opere nostro exposuimus, nunc penitus intelligat, & nihil in iis supersit obscuri; verum etiam quod iisdem prompte ac sine ulla aberratione satisfacere possit, modo attentionem suam in se desiderari minime patiatur. Dari aliquam Artem inveniendi, quæ hactenus absque regulis exercetur, Mathematici exemplo suo abunde confirmant, qui nostro præsertim ævo novis indies inventis Mathesin augent. Nemo diffitebitur, qui vel ad ea animum advertit, quæ speciminis loco in Arithmetica (*) tradidimus, ab exemplis abstrahi posse regulas. Quoniam igitur summa intellectus perfectio est, eum facere facultatum nostrarum usum, qui ad veritatem latentem investigandam requiritur; id quoque egimus in Commentatione nostra ut ostenderemus, quomodo versandum sit in Mathesi, ut usum istum consequamur. Hactenus

(*) §. 125.

tenus Ars inveniendi regulis comprehensa non est, quæ enim sub hoc titulo prostant, augustum istud nomen non merentur. Demus autem mox affore tempus, quo Ars inveniendi omnibus suis numeris absoluta exactisque regulis comprehensa in publicum prostet; minime tamen hinc sequitur, ea, quæ in Commentatione nostra in usum hujus Artis acquirendæ præcipiuntur, nullius fore utilitatis: valent enim de hac Arte eadem quo modo de Logica annotavimus. Quid, quod etiam consilium nostrum de studio Matheseos in usum Artis inveniendi acquirendæ instituendo ei prodesse possit, qui eam regulis comprehendere voluerit?

Ultimo demum loco sequuntur Indices, de quibus ut multa dicam opus non est. Unicum tantummodo moneri consultum duxi. Initio constitueram Indices omnes rerum & verborum in Elementis nostris contentorum in unum compingere. Enimvero cum consultissimum videretur in iis citari paragraphos, literis autem alphabeti singulæ partes non commode distingui possent; potius visum est singulos singulorum Tomorum Indices sigillatim conficere. Quoniam enim in separato Tomo leguntur, absque ulla opera, quæ in uno non inveniuntur, in alio quæruntur. Ac ita tandem Elementa nostra Matheseos universæ ad umbilicum perduximus; nil magis in votis habentes, quam ut iisdem in addiscenda Mathesi utentes eum consequantur usum, quem Commentatio nostra promittit. Dabam Marburgi Cattorum d. 17. Septembr. A. O. R. 1740.



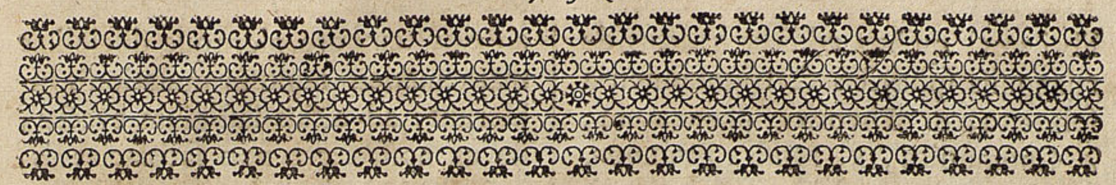
PRÆFATIO.

Non nobis propositum est condere Historiam Matheseos universæ, ut ortus ejus pateat atque progressus ad nostra usque tempora. Opus enim hoc arduum est ac difficile, quod infinitam propemodum requirit lectionem & Bibliothecam libris omnibus tam antiquis, quam recentioribus instructissimam. Nostrum jam non est in hunc campum descendere. Quod ordinaria negotia nobis relinquunt otium, in Philosophia reformanda totum consumendum, etiamsi alia non obstarent, de quibus in præsenti dicere nil attinet. Neque etiam nobis animus est recensendi Autores omnes, qui vel de Mathesi integra, vel de una aut altera ejus parte, vel etiam de particularibus quibusdam argumentis commentati sunt: Sufficit recensuisse scripta præcipua, quorum lectione in studio Matheseos feliciter progredi licet. Etsi enim hodie reperiantur pluri-

plurimi, qui in historia literaria industriam suam exercent: nullibi tamen magis quam in Mathematicorum scriptis recensendis eandem deficere animadvertes, cum plerumque Mathematum rudes sint, qui ad hoc studiorum genus animum appellunt. Utile tamen est, immo necessarium nosse libros, a quorum lectione recedas doctior, ne in legendis iis, qui ad scopum minime faciunt, tempus fallas & magno conatu parum aut nihil discas. Me igitur non inutilem operam præstitisse confido iis, qui ad Mathesin addiscendam sese convertunt. Patebit hoc ex sequente commentatione de studio mathematico, in qua indicaturus sum, quinam pro diverso discentium scopo legendi sint autores. Ceterum non dubito, hanc recensionem Autorum etiam prodesse posse iis, qui ad Historiam Matheseos condendam sese accingent observaturi eas leges, quas præscripsimus in opere nostro Logico. Vix tamen eandem ab uno homine expectes. Rationes perspicies ex iis, quæ de Historia scientiarum in Logica tradidimus. Optandum foret, ne pars eruditionis longe utilissima diutius negligeretur, & bene de humano genere merebitur, qui vel unius Matheseos partis historiam exasciatam dederit, exemplo suo excitaturus alios ad socias operas conferendas.



DE



DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS BREVIS COMMENTATIO.

CAPUT PRIMUM.

De Cursibus, Operibus atque Lexicis Mathematicis.

§. 1.

PRimus *Cursum mathematicum* Latino & Gallico idiomate edidit PETRUS HERIGONIUS *Parisiis* 1644. in 8. (10 Alph. 2 plag.). Constat Tomis sex. Primo continentur 1. Elementa EUCLIDIS XV. 2. Data EUCLIDIS, 3. APOLLONII PERGÆI de determinata sectione Geometria, a WILLEBRORDO SNELLIO restituta, 5. Ejusdem APOLLONII inclinationum Geometria, a MARINO GHETALDO restituta, 6. Ejusdem APOLLONII Tactionum Geometria, a FRANCISCO VIETA restituta, 7. Doctrina Sectionum angulorum. Tomus secundus complectitur 1. Arithmeticam practicam, & 2. Algebram tum vulgarem, tum speciosam, una cum ratione componendi ac demonstrandi per regressum sive repetitionem vestigiorum Analyseos. Tomus tertius exhibet 1. Constructionem Canonum, Sinuum, atque Tangentium & Logarithmorum, 2. ipsos hos Canones, 3. Trigonometriam planam, 4. Geometriam practicam, 5. Architecturam militarem, 6. Tractatum de militia Græcorum, Romanorum, & hodierna, 7. Mechanicam. Tomus quartus continet 1. Doctrinam de Sphæra mundi, 2. Geographiam tam veterem, quam novam, 3. Histiodromiam, seu Artem navigandi. In Tomo quinto extant, 1. Optica EUCLIDIS aucta & novis demonstrationibus illustrata, 2. Catoptrica EUCLIDIS, 3. Dioptrica, 4. Perspectiva, 5. THEODOSII Sphæricorum

libri tres, quibus additur quartus de triangulis sphæricis & trigonometria sphærica, 6. Theoricæ planetarum, 6. Gnomonica, 8. Musica EUCLIDIS. Denique Tomus sextus supplementis destinatur 1. in Algebram, 2. in Perspectivam, 3. in Theoriam Planetarum: quibus additur introductio in Chronologiam. Apparet adeo, præter inventa recentiora, quæ Autor suo tempore tradere nondum potuit, desiderari adhuc 1. Theoremata Archimedea, 2. Doctrinam Conicorum, 3. Staticam, 5. Hydraulicam, 6. Architecturam civilem, 7. Pyrotechniam. Quæ vero de singulis disciplinis monenda sunt, ea inferius suo loco annotabimus. Nunc in genere observamus, Autorem ubique accurata uti demonstrandi methodo, eaque nova, per notas reales & universales, ita ut demonstrationes ipsius ab eo, qui notarum vim animo comprehendit, citra usum cujuscunque idiomatis intelligi possint. Sed cum signa sint Autori peculiaria & diversa ab iis, quibus hodie in casibus similibus utimur; nonnihil difficultatis facessunt sub initium lectionis, aliis præsertim signis jam adsueto. Ubi tamen signa familiaria evaserint, multum facilitatis habet hæc demonstrandi methodus: quia integra demonstratio uno obtutu haud difficulter comprehenditur & una singulæ ejus partes distincte exhibentur. Ceterum HERIGONIUS theoriam magis, quam praxin cordi habet, & ab ejus tempore pleræque disciplinæ mathematicæ multum mutationis subierunt, ad altius fastigium evectæ, ita ut nostro ævo non satisfaciat iis, qui ad Mathesin universam addiscendam animum appellunt.

§. 2. Anno 1662, CASPARUS SCHOTTUS, e Societate Jesu, *Cursum Mathematicum* edidit *Herbipoli* in fol. recusum *Francofurti ad Mœnum* An. 1674, & denuo *Bambergæ* An. 1677, in fol. (7 Alph. 19 plag. una cum 2 Alph. 4. plag. figurarum æri incisarum). Constat opus Libris 28 quorum primus Isagogen continet ad Mathesin, in qua problemata facillima Geometriæ practicæ explicantur: secundus Arithmeticam: tertius Libros VI priores Elementorum EUCLIDIS; quartus & quintus Trigonometriam; sextus Geometriam practicam secundum pantometron KIRCHERI; septimus elementa Astronomiæ; octavus Theoricas planetarum; nonus problemata Astronomiæ practicæ; decimus Astrologiam judiciariam; undecimus Chronographiam; duodecimus Geographiam; decimus tertius Hydrographiam; decimus quartus Horographiam; decimus quintus Mechanicam; decimus sextus Staticam; decimus septimus Hydrostaticam; decimus octavus Hydrotechniam; decimus nonus Opticam; vigesimus Catoptricam; vigesimus primus Dioptricam; vigesimus secundus & tertius Architecturam militarem; vigesimus quartus Tacticam hodiernam;

nam; vigesimus quintus Musicam; vigesimus sextus Algebram; vigesimus septimus Logarithmorum doctrinam; vigesimus octavus Synopsin Matheseos tradit. Desiderantur adeo Pyrotechnia, Architectura civilis & Ars navigandi; pleræque disciplinæ nimis breviter pertractantur, nec demonstrativa methodus ubique adhibetur: desunt etiam recentiora inventa, nec sublimiora attingit Autor, ipsius præsertim ævo parum trita. Non ergo satisfacit, nostro tempore, iis qui ad solidam Mathematum notitiam adspirant.

§. 3. Anno 1681, *Londini* in 4. idiomate Anglico prodiit JONÆ MOORE Novum systema Mathematicum (*A new Systeme of the Mathematicks*). Constat Tomis duobus, quorum primo continentur 1. Arithmetica tum decadica, tum decimalis, tum speciosa, 2. sex libri priores Elementorum EUCLIDIS, una cum undecimo & duodecimo, atque Geometria practica, 3. Trigonometria plana & Sphærica, 4. Cosmographia, 5. Ars navigandi, 6. Doctrina Sphærica secundum hypothesin terræ motæ: in altero autem extant Tabulæ astronomicæ, Sinuum versorum & Logarithmorum, atque Geographia seu descriptio præcipuarum Regionum. Eorum potissimum conatibus inservit hoc opus, qui Artem navigandi solidioribus fundamentis superstructam addiscere gestiunt. Commendatur quoque doctrina Sphærica talia continens, quæ alibi frustra quæsiveris.

§. 4. CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES, Camberiensis, e Societate Jesu, An. 1674, edere cœpit *Cursum* seu *Mundum mathematicum*, tribus Tomis: sed cum novam editionem multo auctiorem meditatus ante diem obiisset, AMATUS VARCINUS ex eadem Societate An. 1690, editionem ex MSC. Autoris auctam & emendatam dedit *Lugduni Gallorum* in fol. (32 Alph.) Editio posthuma in 4 Tomos digesta, quorum primo continentur 1. Tractatus de progressu Matheseos & de illustribus Mathematicis, 2. EUCLIDIS Elementa XIV. 3. THEODOSII Sphærica, 4. Tractatus de sectionibus Conicis, 5. Arithmetica practica, 6. Trigonometria, 7. Algebra, 8. Hypothesium Cartesianarum refutatio: secundo 1. Geometria practica, 2. Mechanica, 3. Statica, 4. Geographia, 5. Tractatus de Magnete, 6. Architectura civilis, 7. Ars tignaria, 8. Tractatus de lapidum sectione: tertio 1. Architectura militaris, 2. Hydrostatica. 3. Tractatus de fontibus & fluviis, 4. Hydraulica, 5. Ars navigandi, 6. Optica, 7. Perspectiva, 8. Catoptrica, 9. Dioptrica: quarto denique 1. Musica, 2. Pyrotechnia, 3. Astrolabium, 4. Gnomonica, 5. Astronomia, 6. Astrologia, 7. Tractatus de Meteoris, 8. Calendarium. Autor, in Mathesi pura, antiqua & vulgaria bene explicat; recentiora vero inventa &

ſublimiora non attingit. De diſciplinis ad Matheſin mixtam ſpectantibus dicemus ſuo loco, id unice nunc annotaſſe contenti ſumus, quod ad diſcurſus phyſicos ſæpius digrediatur. In demonſtrando rigori veterum perſpicuitatem jungit. Curſuum Mathematicorum, qui hactenus lucem publicam adſpexerunt, abſolutiſſimus eſt.

§. 5. Anno 1690, WILHELMUS LEYBORN, Anglus, patrio idiomate publicavit Curſum Mathematicum ſub titulo: *Mathematical Sciences in nine Books*; *Londini* in fol. (11 Alph. Tab. æn. 43). Liber primus explicat Arithmeticam, vulgarem pariter, ac decimalem, cum logarithmica; ſecundus Geometriam elementarem (cui appendicis inſtar ſubjungitur brevis ad Algebram ſpecioſam introductio); tertius doctrinam de primo mobili; quartus Coſmographiam, Geographiam & Chronologicam doctrinam de epochis; quintus Trigonometriam planam & ſphæricam; ſextus uſum inſtrumentorum Geometricorum in Geodæſia, Planimetria & Architectura tam civili, quam militari; ſeptimus Artem navigandi; octavus Gnomonicam; nonus librum ſecundum Inſtitutionum Aſtronomicarum NICOLAI MERCATORIS de theoria planetarum. Plurimas diſciplinas Mathematicas in hoc curſu deſiderari ſtatim apparebit, ſi quidem eam cum curſu præcedente conferre libuerit.

§. 6. ABRAHAMUS DE GRAAF, Batavus, idiomate patrio *Amſtelodami* An. 1694, in 4. (1 Alph. 21 plag. Tab. æn. 94.) ſub titulo *De gehee-le Matheſis of Wiskonſt* publici juris fecit Curſum Mathematicum, in quo reperiuntur 1. tractatus brevis de Proportione, 2. Arithmetica practica, 3. Geometria elementaris, 4. Trigonometria plana & ſphærica, 5. Aſtronomia, 6. Ars agrimenſoria cum Stereometria doliorum, 7. Ars navigandi, 8. Architectura militaris, 9. Gnomonica, 10. Perſpectiva, 11. Dioptrica cum Catoptrica, 12. Mechanica, 13. Algebra. In plerisque nimis brevis, Algebra excepta.

§. 7. Anno 1697, OZANAM, Gallus, vir variis ſcriptis mathematicis ſuo loco commendandis celebris, in publicum emiſit Curſum Mathematicum, quatuor Tomis comprehenſum, ſub tit. *Cours de Mathematique*, *Pariſiis* in 8., recuſum *Amſtelodami* (quamvis Pariſiorum nomen præ ſe ferat) An. 1699. (4 Alph. 14 plag. Tab. æn. 155.). Tomus primus complectitur Elementa EUCLIDIS ſex priora, una cum undecimo & duodecimo, atque Arithmetica litterali; ſecundus Trigonometriam planam & Sphæricam, cum Tabulis Sinuum, Tangentium, atque Logarithmorum; tertius Geometriam practicam; quartus Mechanicam atque Perſpectivam; quintus Geographiam & Gnomonicam. Deſunt adeo diſciplinæ quam plurimæ. Ceterum in demonſtrando rigorem veterum pulchre obſervat Cl. Autor.

§. 8. JAC.

§. 8. JAC. TAYLOR in Thesaurario Mathematicæ, quod An. 1707, W. ALINGHAM *Londini* in 8. recudi fecit (1 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 18.) sermone Anglico sub Titulo *Treasury of the Mathematicks*, explicat præcipua problemata Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Trigonometriæ utriusque, Astronomiæ Sphæricæ, Geographiæ, Navigationis, Geodesiæ, Stereometriæ, Gnomonicæ, Architecturæ militaris & Pyrotechniæ, suppositis terminorum definitionibus, & demonstrationibus sepositis. Adduntur Tabulæ Logarithmorum, & Tabulæ Sinuum atque Tangentium.

§. 9. Cum sub finem An. 1706, munus docendi publice Mathesin in Academia Halensi in me translatum esset; statim animadverti, me eidem ex voto satisfacere non posse, quamdiu desit liber, multiplici studiosorum ad celeberrimam hanc Musarum sedem undiquaque confluentium scopo conveniens. Prælectiones mathematicæ in Academiis Germaniæ tum instituebantur in *Mathesin Compendiariam* JOANNIS CHRISTOPHORI STURMII, Philosophiæ Naturalis & Matheseos in Academia Altorfina Professoris, paucis Tabulis comprehensam. Sed cum in iis nonnisi prima Matheseos rudimenta continerentur, ac inprimis desideraretur methodus, qua intellectus juvenum ad reliqua studia rectius absolvenda formatur; meo, quem in docenda & discenda Mathesi mihi præfixeram, scopo eædem parum conveniebant. Equidem idem An. 1699, duobus Tomis *Norimbergæ* in 8. ediderat *Mathesin Juvenilem*, quorum prior Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, cum palmariis Geometriæ elementaris theorematis, Trigonometriam planam, Architecturam militarem atque civilem, & Staticam seu Artem mechanicam; posterior Opticam, Catoptricam & Dioptricam, Astronomiam, Chronologiam, & Gnomonicam continet: in ea tamen nonnisi uberiori discursu illustrantur, quæ in Tabulis concisius proponuntur. Utitur Autor methodo erotematica, nec demonstrationibus locum concedit, ut ipse in præfatione moneat, non quærendam in hoc libro esse Mathesin suis numeris absolutam, ac demonstrationibus exactissimis ubique firmatam, sed facilem, planam ac demonstrationibus discentium captui accommodatis illustratam verius, quam corroboratam. (Tom. I. 2 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 52. Tom. II. 2 Alph. 9 plag. Tabb. æn. 57.)

§. 10. Filius ejus LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS, Francofurti ad Oderam Matheseos Professor, Compendium Matheseos conscripsit in usum Prælectionum suarum, idiomate patrio, methodo erotematica, ad imitationem Matheseos juvenilis parentis sui, in quinque partes divisam, quarum prima Mathesin universalem, Arithmeticam, Geometriam elemen-

elementarem, Phoronomiam, Algebram; secunda Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, Architecturam militarem & civilem, Pyrotechniam, Mechanicam; tertia Astronomiam, Geographiam & Chronologiam; quarta Gnomonicam, Opticam, Perspectivam & Acusticam, quinta Tabulas quasdam mathematicas continet. Prodiit secunda vice *Francofurti ad Oderam*, 1710, in 8. sub Titulo: *Kurtzer Begriff der gesammten Mathesis*. Autor totum se dederat studio Architecturæ civilis ac militaris & Geometriæ practicæ, ut adeo in theoria elementari cespitet. In ceteris vestigia parentis in Mathesi juvenili legit, quantum ipsi dabatur.

§. 11. Ut igitur ad verum Matheseos studium juventutem Academicam manuducerem, Univeræ Matheseos Elementa idiomate patrio conscripsi, & quatuor Tomis *Halæ*, 1710, in 8. sub Titulo: *Anfangs-Gründe der Mathematischen Wissenschafften*, evulgavi (5 Alph. 10 plag. Tabb. æn. 111.) Tomus primus continet Commentationem de Methodo mathematica, Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam & Architecturam civilem; secundus Pyrotechniam, Architecturam militarem, Mechanicam, Hydrostaticam, Aërometriam & Hydraulicam; tertius Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perspectivam, Trigonometriam Sphæricam, Astronomiam, Chronologiam, Geographiam & Gnomonicam: quartus denique Algebram communem, Analysin infinitesimalem Illustris LEIBNITII, & appendicem de præcipuis scriptis mathematicis. Theoretica parcius exposui, ut tempori ac loco servirem, quantum ad praxes, quas uberius tradidi, demonstrandas sufficere deprehendi, reliquis in parte quarta per Analysin erutis. Ubivis tamen methodi rationem habui, ut verioris Logicæ praxis animis discentium insinuaretur, & ad solidam doctrinam capiendam discentes apti efficerentur. Non inutilem fuisse huncce laborem, tum propria experientia me quotidie adhuc edocet, tum alii publice confessi sunt. Videantur Acta Eruditorum An. 1711, pag. 279; An. 1713, pag. 222, 428; & An. 1714, p. 250. Quinta vice recusa sunt hæc Elementa An. 1738, in 8. (6 Alph. Tabb. æn. 121.) Prodeunt nunc *Amstelodami* in linguam Batavorum translata & *Lausannæ* in Latinum versa eduntur.

§. 12. Quoniam hæc Elementa nonnullis prolixiora videbantur, quam ut tyronibus promiscue proponerentur, & inprimis Algebra in parte quarta prolixius explicata eorum captui non convenire, nec ad omnium palatum esse judicaretur; desiderio aliorum satisfacturus eadem in *Compendium* redegi & An. 1713, *Halæ* in 8. edidi (2 Alph. Tabb. æn. 45). Continetur in hoc compendio Commentatio de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometria, Trigonometria

metria plana, Mechanica, Hydrostatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Perspectiva, Astronomia, Geographia, Chronologia, Pyrotechnia, Architectura militaris & civilis, Algebra speciosa ad exempla arithmetica applicata. Editio sexta prodiit *Halæ* An. 1737.

§. 13. Quid me impulerit, ut *Elementa Matheseos* Latina a Germanicis diversa ederem, in præfatione Tomi primi exposui. An finem mihi propositum fuerim consecutus, aliorum esto judicium. Editio altera, quæ ab Anno 1730 prodiit & cui nunc Tomo quinto colophonem imponimus, recusa est *Genevæ* in 4. ab Anno 1732 forma majore. Enimvero editionem nitidissimam & ab omnibus mendis expurgatam Veronæ parat JOSEPHUS SERERIUS, Medicinæ ac Philosophiæ Doctor, in omni Mathesi ac Philosophia versatissimus. Ad commodiorem usum figuræ ipsi textui inseruntur. Eandem operam iisdem impendit, quam orbi erudito in recudendis operibus nostris philosophicis Latinis abunde comprobavit. Ut Gallorum commodis inserviat JOANNES THEOBALDUS BION, Elementa hæc nostra quoad substantiam in linguam Gallicam transfundit; satis ingenue ac feliciter, quemadmodum ex speciminibus ad me transmissis intellexi.

§. 14. Ab eo tempore, ex quo Elementa Matheseos, tam patrio, quam Latino sermone conscripta edidi, plura in Germania passim prodiere Compendia Matheseos, Nostris satis nota & in bibliopolis nostris ubivis obvia. Sed de singulis dicere nimis foret prolixum & a præsenti instituto alienum.

§. 15. CONRADUS DASIPODIUS, Mathematum Professor Argentoratensis, *Argentorati*, an. 1573, edidit *Dictionarium Mathematicum* Græce atque Latine conscriptum in 8. (plag. 12.) Continentur in eo definitiones ac divisiones Arithmeticæ, Logisticæ, Geometriæ, Geodesiæ, Astronomiæ, & Harmonicæ. Non ordinem alphabeti sequitur Autor, sed disciplinarum. In iis etiam disciplinis, quas attingit, opera ejus est admodum imperfecta.

§. 16. HIERONYMI VITALIS, Capuani, Clerici Regularis Theatini, *Lexicon Mathematicum*, *Parisiis* 1668, in 8. prodiit (1 Alph. 18 plag.) In eo tamen nonnisi voces Geometriæ elementaris, Astronomiæ & Astrologiæ explicantur. Idem An. 1690, *Romæ* in 4., recusum & ex omnibus fere disciplinis Mathematicis insigniter auctum, multis inutilibus passim rescissis. (6 Alph. 3 plag.)

§. 17. OZANAM supra laudatus *Lexicon Mathematicum*, secundum ordinem disciplinarum disposuit, editum *Parisiis* An. 1691, in 4. (4 Alph.) Explicat Cl. Autor terminos Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ speculativæ & practicæ, Cosmographiæ, Astro-

nomiæ, Navigationis, Geographiæ tum astronomicæ, tum naturalis, tum historicæ, Opticæ, Perspectivæ, Gnomonicæ, Catoptricæ, Dioptricæ, Artis pictoriæ, Mechanicæ, Staticæ, Hydrostaticæ, Architecturæ civilis & militaris, atque Musicæ.

§. 18. J. HARRIS in Lexico Technico magno, cujus Tomus primus *Londini* 1704, alter ibidem 1710, in fol. prodiit, præter alios terminos Artium & Scientiarum non modo Mathematicos terminos, verum etiam res ipsas explicat. Titulus operis est: *An universal English Dictionary of Arts and Sciences, explaining not only the Terms of Arts, but themselves.*

§. 19. E. CHAMBERS *Londini* An. 1728, duobus Voluminibus in fol. forma majore edidit Lexicon Universale artium & scientiarum, sub Titulo, *Cyclopædia, or an Universal Dictionary of Arts and Sciences* ordine alphabetico conscriptum (Alph. 22. plag. 8. Tabb. æn. 28.) In eo etiam explicantur, quæ ad Mathesin spectant, ita ut Lexici Mathematici nomen simul tueatur. Mathematica pleraque ex Elementis hisce nostris petuntur, quæ etiam passim citat.

§. 20. An. 1716, lucem publicam adspexit *Lipsiæ* in 8. forma majore, *Lexicon Mathematicum*, (2. Alph. 5. plag. cum multis figuris textui insertis) quod nonnullorum precibus fatigatus, idiomate vernaculo, secundum ordinem alphabeticum, ita digessi, ut non modo singulos terminos in disciplinis Mathematicis passim obvios explicuerim, verum etiam Autores citaverim, qui vel primi res iisdem notatas invenerunt, vel optima ratione exposuerunt, ac præterea præcipua dogmata recensuerim, singulorumque usum indicaverim, ut scilicet usui sit illis, qui vel historicam Matheseos cognitionem affectant, vel in lectione Autorum ob voces non intellectas hærent, vel denique ducem in cognoscendo aliquo argumento desiderant. In Italicum idioma idem transtulit JOSEPHUS SERERIUS supra laudatus (§. 13.)

§. 21. Cum bibliopola novam hujus Lexici editionem dare vellet, a me desideravit, ut idem ad mentem ipsius reformarem aut alteri hunc laborem committerem, sed paterer, ut nomen meum eidem præfigeretur. Quoniam non possideo calamum venalem, insulso petito deferre nec volui, nec potui. Bibliopola itaque, cum Lexicon istud diu desideraretur, tandem aliud edidit An. 1734, (2. Alph. Tabb. æn. 26) de quo judicium meum lubens suspendo. Sed quia vulgo pro meo Lexico venditur ac emitur; monendus est Lector, me istud pro meo non agnoscere, nec mea facere, quæ in eodem immutata. Præfationem quoque, quæ eidem præfigitur, diversam esse ab ea, quæ a me profecta fuerat, ipsa collatio utriusque prodit. Ne tamen abusui nominis mei locus daretur; Autor ejus nomen suum præfigere debuisset.

§. 22. In

§. 22. In gratiam eorum, qui castra sequuntur, Lexicon militare, pyrotechnicum & navale conscripsit JOANNES LUDOLPHUS FÆSCH, quod *Dresdæ* An. 1735, in 8. forma majore (2. Alph. 8. plag. Tabb. æn. 21.) prodiit sub Titulo: *Kriegs-Ingenieur-Artillerie-und See-Lexicon.* Explicantur in iis termini, qui in Architectura & re militari, Pyrotechnia, & Architectura navali ac navigatione occurrunt, figurisque æri incisis, ubi opus est, illustrantur.

§. 23. SIMON STEVINUS varia Opera mathematica conscripsit, quæ sub titulo: *Les Oeuvres Mathematiques de* SIMON STEVIN *de Bruges*, *Lugduni Batavorum* in fol. publicavit An. 1634, ALBERTUS GIRARDUS (1. Alph. 19. plag.) Continentur in iisdem 1. Arithmetica tam rationalium, quam irrationalium cum regulis Algebræ; 2. Sex libri DIOPHANTI *Alexandrini*, quorum quatuor priores opera STEVINI, duo posteriores a GIRARDO traducti, 3. Usurarum computus, Logistica decimalis, & incommensurabilium doctrina, ubi simul Elementum EUCLIDIS decimum illustratur; 4. Trigonometria plana & sphærica, 5. Geographia, 6. Astronomia, 7. Geometria practica, 8. Statica, 9. Optica, 10. Castrametatio, 11. Ratio muniendi per cataractas, 12. Architectura militaris. Autor & in theoria, & in praxi cum laude versatus.

§. 24. CHRISTOPHORI CLAVII, Bambergensis, e Societate Jesu, *Opera Mathematica* in quinque Tomos distributa, & ab Autore ipso correcta, plurimisque locis aucta, prodiere *Moguntiæ* An. 1612, in fol. (40 Alph. 9 plag.) Tomus primus complectitur XVI Elementa EUCLIDIS & Libros tres Sphæricorum THEODOSII, cum Commentariis CLAVII in utrumque Autorem, Sinuum, Tangentium & Secantium rationem & Canones; Tractationem triangulorum, tum rectilineorum, tum Sphæricorum. Tomus secundus Geometriam practicam, Arithmeticam, & Algebram, una cum refutatione Cyclometriæ JOSEPHI SCALIGERI. Tomus tertius JOANNIS DE SACRO BOSCO, libellum de Sphæra, cum prolixo Commentario CLAVII in eundem, atque libros tres de Astrolabio. Tomus quartus Gnomonicam, Fabricam & usum instrumenti ad Horologiorum descriptionem peropportuni, Horologiorum novam descriptionem, Compendium brevissimum describendorum Horologiorum horizontalium ac declinantium, cum notis in idem. Tomus denique quintus Romani Calendarii a GREGORIO XIII P. M. restituti explicationem, Novi Calendarii Romani Apologiam adversus MICHAELEM MÆSTLINUM, & Appendicem ad Novi Calendarii Romani Apologiam, in qua JOSEPHUS SCALIGER, GEORGIUS GERMANUS & FRANCISCUS VIETA, qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt, seor-

ſim ſinguli confutantur. CLAVIUS inſtar veterum, EUCLIDIS, ARCHIMEDIS & APOLLONII, demonſtrator rigidus.

§. 25. FRANCISCI VIETÆ Galli, *Opera Mathematica* in unum volumen congeſta *Lugduni Batavorum*, in fol. An. 1646, edidit FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenſis, in Academia patria Mathematum Profeſſor (6 Alph.) Continentur in iiſdem 1. Iſagoge in Artem analyticam, 2. ad Logiſticen Speciosam Notæ priores, 3. Zeteticorum libri quinque, 4. De æquationum recognitione & emendatione Tractatus duo, 5. de numeroſa poteſtatum ad exegeſin reſolutione, 6. Effectionum Geometricarum Canonica recenſio, 7. Supplementum Geometriæ, 8. Pſeudo-Meſolabum & alia quædam adjuncta capitula, 9. Theoremata ad ſectiones angulares, 10. Reſponſum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis conſtruendum propoſuit ADRIANUS ROMANUS, 11. Apollonius Gallus, 12. Variorum de rebus Mathematicis Reſponſorum Liber VIII, 13. Munimen adverſus nova Cyclometrica, 14. Ratio Calendarii vere Gregoriani, 15. Calendarium Gregorianum perpetuum, 16. Adverſus CHRISTOPHORUM CLAVIUM Expoſtulatio.

§. 26. PHILIPPI LANSBERGII *Opera omnia* prodiere, *Middelburgi in Selandia* A. 1663, in fol. (10 Alph.) Continentur in iiſdem 1. Triangulorum Geometriæ libri quatuor, 2. Cyclometriæ novæ libri duo, 3. Uranometriæ libri tres, 4. in quadrantem tum Aſtronomicum, tum Geometricum, nec non in Aſtrolabium Introductio, 5. Horologiographia plana, 6. Commentationes in motum Terræ diurnum & annuum, & in verum adſpectabilis cœli typum, 7. Tabulæ motuum cœleſtium perpetuæ, cum novis motuum cœleſtium Theoricis & Aſtronomicarum Obſervationum theſauro, 8. Chronologiæ Sacræ libri tres, in quibus annorum mundi ſeries, ab orbe condito ad everſa per Romanos Hieroſolyma, nova methodo oſtenditur.

§. 27. In *Opuſculis Mathematicis* GUILIELMI OUGHTRED, quondam Collegii Regalis in Cantabrigienſi Academia Socii, *Oxonii*, An. 1677, in 8. editis, habentur 1. Inſtitutiones Mechanicæ, 2. De variis corporum generibus, gravitate & magnitudine comparatis Tractatus ex MARINI GHETALDI *Archimede promoto* excerptus, 3. Tractatus alius de Automatis, 4. quæſtionum DIOPHANTI *Alexandrini* Libri tres, 5. de triangulis planis rectangulis, 6. de diviſione ſuperficierum Tractatus, 7. Muſicæ Elementa, 8. Architectura militaris, 9. Tractatus de ſectionibus angularibus (15 plag.)

§. 28. ANDREÆ TACQUET, Antverpienſis, e Societate Jeſu, *Opera Mathematica*, *Antverpiæ* An. 1669, in fol. publicavit SIMON LAURENTIUS VETERANUS ex Comitibus *Montis-Calvi*, e Societate Jeſu (9 Alph. 15 plag.

plag. Tab. æn. 88.) Extant in iisdem 1. Astronomiæ libri octo cum Appendice, 2. Geometriæ practicæ libri tres, 3. Opticæ libri tres, 4. Catoptricæ libri tres, 5. Architecturæ militaris liber unus, 6. Cylindricorum & Annularium libri quinque, 7. Dissertatio Physico-Mathematica de Circulorum volutionibus.

§. 29. Anno 1692, prodiit *Parisiis* in 12. Synopsis Tractatuum Mathematicorum, qui necessarii esse possunt Nobilibus terra marive operam militiæ daturis; auctore P. HOSTO, e Societate Jesu, Mathematum Professore Tulonensi. Titulus operis: *Recueil des Traités de Mathématique, qui peuvent être nécessaires à un Gentilhomme, pour servir par mer, ou par terre.* (Plag. 26, Tab. æn. 67.) Constat hæc synopsis tribus Tomis, quorum primus Elementa EUCLIDIS, Arithmeticam & Trigonometriam; secundus Geometriam practicam, Sphæricam, Mechanicam, Artem muniendi & Pyrotechniam; tertius denique Artem navigandi complectitur.

§. 30. Anno 1693, munificentia LUDOVICI MAGNI, Galliarum Regis, *Parisiis* in fol. reg. lucem adspexerunt *Veterum Mathematicorum Opera*, Græce & Latine, pleraque tum primum edita. (4 Alph. Fig. æn. 174.) Continentur in istorum numero ATHENÆUS de machinis; APOLLODORI Poliorcetica; PHILONIS liber quartus de telorum constructione, & quintus de rationibus tolerandæ instituendæque obsidionis; BITON de constructione machinarum bellicarum & catapultarum; HERONIS Belopœeca, Spiritalia, & Automata, JULII AFRICANI Cesti; Anonymi liber de toleranda obsidione. Adduntur BERNARDINI BALDI scholia in HERONIS Belopœeca & nonnulla alia.

§. 31. Ex eadem typographia Regia An. 1693, in fol. prodiere, Varia Opera Mathematica & Physica, Autoribus Academicis Regiis scientiarum. Titulus operis: *Divers Ouvrages de Mathématique & de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des sciences* (Plag. 108.) Reperies in hoc Volumine 1. FRENICLII Tractatum de Exclusionibus; 2. ejusdem compendium Combinationum; 3. ejusdem Tractatus de quadratis magicis; 4. ROBERVALLI observationes super compositionem motuum, quam ad tangentes curvarum ducendas applicat; 5. Delineatio libri Mechanici de motu composito; 6. de recognitione æquationum liber; 7. Tractatus de indivisibilibus; 8. Liber de Trochoide; 9. Epistola ad MERSENNUM de TORRICELLII quibusdam propositionibus; 10. TORRICELLII litteræ ad ROBERVALLIUM missæ occasione præcedentis epistolæ; 11. ROBERVALLII Epistola, qua sua sibi inventa contra TORRICELLIUM aliosque Italos vindicat; 12. HUGENII opusculum de causa gravitatis; 13. Æquilibrii in libra demonstratio; 14. Potentiarum fila funesque trahentium vires; 15.

Nova vis movens ope pulveris pyrii & aëris; 16. Constructio ingeniosa loci ad hyperbolam per asymptotos; 17. Regula FERMATII de maximis & minimis demonstrata & ad mirabilem brevitatem perducta; 18. Problema Opticum sive 39 Prop. lib. 5. ALHAZENI, aut 22. lib. 6. VITELLIONIS constructum; 19. PICARDI praxis magnorum sciatericorum per calculum absolvenda; 20. Schediasma de mensuris; 21. Mensuræ ab originalibus desumptæ; 22. de mensura liquidorum & aridorum; 23. de proportione aquarum effluentium; 24. experimenta circa aquas effluentes, 25. Fragmenta dioptrica de vitrorum potissimum focis determinandis; 26. AUZOUT Tractatus de micrometro; 27. MARIOTTI Regulæ de aquæ jactibus; 28. ROEMERI Regulæ de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros; 29. ejusdem experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium.

§. 32. FRANCISCI MAUROLYCI, Abbatis Messanensis, *Opuscula Mathematica*, *Venetiis* 1575, in 4. edita (1. Alph. 18½ plag.) complectuntur 1. de Sphæra librum unum, in quo termini in hac doctrina obvii explicantur: 2. Computum Ecclesiasticum: 3. Tractatum instrumentorum Astronomicorum, nempe de Quadrato Geometrico, Quadrante, Astrolabio, Armillis, Sphæra Solida: 4. De lineis horariis Tractatum Gnomonicum: 5. Propositiones libri decimi tertii Elementorum EUCLIDIS: 6. Musicæ traditiones, continentes epitomen Musicæ *Boëtianæ* & paucas de Musica regulas: 7. De lineis horariis libros tres, Gnomonicæ uberiora fundamenta exponentes: 8. Arithmeticorum libros duos.

§. 33. *Opuscula Mathematica* THOMÆ CEVÆ, e Societate Jesu, *Mediolani* 1699, in 8. typis descripta (plag. 4.), constant ex nonnullis demonstrationibus de ratione æquilibrii, de sectione Geometrico-harmonica & arithmetica; de sectione anguli rectilinei in quotvis partes tum organice, tum per quasdam lineas curvas, Cycloides scilicet anomalas; de parabola consideranda instar ellipsis maximæ atque instar hyperbolæ habentis transversam diametrum infinitam; de lineis phantasticis & flexilineis. Adduntur quædam excerpta ex VINCENTII VIVIANI Exercitatione mathematica, cui titulus *Formatione di tutti cieli*, & ex idea universali Matheseos Cl. OZANAMI.

§. 34. JOHANNIS WALLISII, SS. Theol. Doct. & Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi celeberrimi, *Opera Mathematica* tribus voluminibus prostant. Volumen primum editum *Oxonii* An. 1665, in fol. (11. Alph. 17. plag.) continet 1. Orationem inauguralem An. 1649. d. ultimo Octobris habitam, cum publicam Professionem auspicaretur: 2. Ma-

Mathesin universalem seu Arithmeticum opus integrum, tam philologice, quam mathematice traditum: 3. Tractatum elenchticum adversus MARCI MEIBOMII de Proportionibus Dialogum: 4. Tractatum de Sectionibus Conicis nova methodo expositis: 5. Arithmeticam infinitorum: 6. Tractatus duos de Cycloide & Cissoide ac corporibus inde genitis, & de curvarum tum linearum εὐθύνσει, tum superficierum πλατυσμῷ: 7. observationem eclipsis solaris An. 1654, d. 2 Aug. Oxonii visæ: 8. Mechanicam, sive de motu Tractatum Geometricum. Volumen secundum, quod ibidem An. 1693, in fol. prodiit. (10. Alph. 17. plag.) complectitur, 1. Tractatum Historicum & practicum de Algebra, 2. de combinationibus, alternationibus & partibus aliquotis, 3. de Sectionibus angularibus, 4. de angulo contactus & semicirculi, 5. defensionem ejusdem Tractatus, 6. disceptationem Geometricam de postulato quinto & quinta definitione lib. 6 EUCLIDIS, 7. Cono-Cuneum, seu Corpus partim Conum, partim Cuneum repræsentans, Geometrice consideratum, 8. de gravitate & gravitatione disquisitionem Geometricam, 9. de æstu maris hypothesin novam, 10. Commercium epistolicum de quæstionibus quibusdam Mathematicis 11. JOH. CASWELLI Trigonometriam planam & Sphæricam. In tertium denique volumen, quod 1699, in fol. lucem adspexit (14. Alph.), congesta sunt 1. CLAUDII PTOLEMÆI, PORPHYRII & MANUELIS BRIENNII Harmonica; 2. ARCHIMEDIS Arenarius & dimensio circuli cum EUTOCII *Ascalonitæ* in hanc Commentario; 3. ARISTARCHI *Samii* liber de magnitudinibus & distantiis Solis & Lunæ; 4. Fragmentum libri secundi Collectionis Mathematicæ PAPPI *Alexandrini* desideratum; 5. Collectio epistolarum quarundam COLLINII, LEIBNITII, NEWTONI, WALLISII, FLAMSTEDII rem mathematicam spectantium; 6. opera quædam miscellanea, nimirum Tractatus de loquela, Grammatica linguæ Anglicanæ, Institutio Logica ad communes usus accommodata, Mens sobria serio commendata, in concione latine habita, Epistolæ ad Titum expositio aliaque nonnulla Theologica, quæ hujus non sunt loci.

§. 35. CHRISTIANUS HUGENIUS, Mathematicus summus, multa præclara conscripsit opera, de quibus suo loco dicemus. Post obitum ejus junctim prodierunt quatuor voluminibus in 4. sub Titulo, Operum variorum, & reliquorum. *Opera varia* lucem adspexerunt *Lugduni Batavorum*, An. 1724, duobus voluminibus: *Opera reliqua*, *Amstelodami* An. 1728, duobus itidem voluminibus. Volumen primum variorum continet 1. Horologium, 2. Horologium Oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato Demonstrationes Geometricas, 3. brevem Institutionem de usu horo-

horologiorum ad inveniendas longitudines, 4. de Hugeniana centri oscillationis determinatione Controversiam, 5. Machinas quasdam & varia circa Mechanicam. (Alph. 1, plag. 17, Tabb. æn. 33.); secundum vero 1. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus subjuncta est Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII A S. VINCENTIO editæ An. 1647. 2. Epistolam ad Cl. Vir. FRANCISCUM XAVERIUM AINSCOM S. J. qua diluuntur ea, quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ GREGORII A S. VINCENTIO impugnata fuit, 3. De Circuli magnitudine Inventa & problematum quorundam illustrium constructiones, 4. de Circuli & Hyperbolæ Quadratura Controversiam, 5. Geometrica varia, 6. de Saturni Luna Observationem novam, 7. Systema Saturnium, 8. EUSTACHII DE DIVINIS Septempedani brevem annotationem in systema Saturnium CHRISTIANI HUGENII, 8. brevem assertionem systematis Saturnii sui, 9. de Saturni Annulo observationes, 10. Cosmotheoron, sive de Terris cœlestibus earumque ornatu conjecturas, 11. Ratiocinia in Ludo aleæ, 12. Novum Cyclum harmonicum, 13. Varia de Optica, 14. Experimenta physica (Alph. 2, plag. 14, Tabb. æn. 23.) In Reliquorum volumine primo extant 1. Tractatus de Lumine & Dissertatio de causa gravitatis, 2. Geometrica demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam, GUIDONIS GRANDI, 3. ejusdem GRANDI epistola Geometrica ad V. C. THOMAM CEVAM e Societate Jesu (Alph. 1, plag. 18, Tabb. æn. 15.) In altero autem comprehenduntur opera posthuma, nimirum 1. Dioptrica, 2. Commentarii de poliendis vitris, 3. Dissertatio de Coronis & Parheliis, 4. Tractatus de motu corporum ex percussione, 5. Tractatus de vi centrifuga, 6. Descriptio Automati Planetarii. (Alph. 2, plag. 6, Tab. æn. 43.) De præclaris hisce operibus specialia monebimus suo loco.

§. 36. Inprimis hic commemoranda sunt Acta Societatum Scientiarum, quæ nostro ævo ad promovendam Mathesin præsertim atque Physicam fuere institutæ. Pertinent huc Acta Philosophica Societatis Regiæ Anglicanæ, quæ a Secretariis eduntur sub Titulo: *Philosophical Transactions giving some account of the præsent undertakings, studies and labours of the ingenious, in many considerable parts of the World*, & quorum usque ad annum 1734, prostant volumina 38. De his singulis dicere ab instituto nostro alienum est. Sufficit itaque monuisse, quod in iis contineantur plurima ad mathesin spectantia lectu dignissima iis, quibus curæ cordique est Scientiam Mathematicam ultra limites præsentes promovere. Anno 1705, JOHANNES LOWTHORP Volumina 21, quæ usque ad Annum 1700 prodierunt, in epitomen redegit & in iis conten-

contenta per capita generalia disposuit. Lucem adspexit hoc opus sub Titulo: *The Philosophical Transactions and Collections to the end of the year* 1700, *abrid g'd and dispos'd under general heads*, tribus voluminibus, *Londini* in 4. Volumine primo continentur Mathematica, ad Geometriam, Arithmeticam, Algebram, Logarithmotechniam, Trigonometriam, Artem libellandi, Opticam, Astronomiam, Mechanicam, Acusticam, Hydrostaticam, Hydraulicam, Artem navigandi, Architecturam civilem & navalem, Perspectivam, Sculpturam, Artem pictoriam & Musicam spectantia. Constat Alph. 4, plag, 4, Tabb. æn. 7. Specialius ad singulas Matheseos partes pertinentia recensentur in Actis Eruditorum, Supplementorum Tom. IV. sect. 7. p. 290. & seqq. Epitomen hanc Actorum Philosophicorum ab An. 1700 usque ad An. 1720, continuavit BENJAMINUS MOTTE, & ab An. 1720 usque ad An. 1732, REIDIUS & JOHANNES GRAY. Continuationis primæ Volumen I, quod *Londini* 1721, in 4. prodiit (Alph. 3. plag. 18. Tabb. æn. 18.) Mathematica, Anatomica, Medica; secundæ vero Voluminis I pars prima, quæ *Londini* 1733, in 4. lucem adspexit, (Alph. 2, plag. 7, Tab. æn. 12.) Mathematica sola continet. Illa specialius recensentur in Actis Eruditorum An. 1723, p. 89. & seqq. hæc vero in Novis Actis Eruditorum An. 1735, p. 125. Cum lingua Anglica sit minus trita & libri in Anglia impressi in aliis terris difficulter haberi possint; optandum foret, ut in Linguam Latinam, aut minimum Gallicam verterentur. Equidem cum prima volumina in linguam Latinam translata superiori seculo Lipsiæ ederentur, nullos fere invenerunt emtores, ut versio continuata non fuerit: non tamen dubitandum est, fore ut nostro ævo, ubi Mathesis & Physica plures numerat cultores, majore applausu excipiantur *.

§. 37. Ab Anno 1699, quo Academia Regia scientiarum Parisiis florens, instaurata, singulorum annorum Historiam Gallico idiomate conscripsit ejusdem Secretarius FONTENELLIUS, quibus accedunt Commentarii Mathematici & Physici. Titulus cujuslibet Voluminis est: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique.* Imprimitur *Parisiis* in 4. forma majore & recuditur in *Batavia* charactere minore, ut leviori pretio comparari possint hæc opera. In singulis voluminibus continentur, quæ ad Physicam generalem, ad Anatomiam, Chimiam, Botanicam, Geo-

* Autoris nostri voto satisfecit Cl. BREMOND, non compendii *Lovvthorpiani*, sed ipsorum Actorum Societatis Londinensis versionem Gallicam suscipiens. Ejus duo Volumina jam prodiere sub Titulo, *Transactions Philosophiques de la Societé Royale de Londres, années* 1735 & 1736, *Paris.* 4to. 1738. Item, *années* 1733 & 1734, *Paris.* 4to. 1740. Addatur Volumen sub hoc Titulo, *Table des matiéres imprimées dans les Transactions Philosophiques depuis* 1665, *jusques en* 1735, *&c. Paris.* 4. 1739.

metriam, Astronomiam, Geographiam, Chronologiam & Mechanicam spectant, siquidem ad singulas hasce classes referendum schediasmata a Membris fuerint exhibita & sub finem Historiæ subjiciuntur Elogia Membrorum, quæ isto anno, cujus historia exhibetur, diem supremum obierunt. Opus præclarum & omnibus Matheseos ac Physicæ cultoribus nunquam satis commendandum continuatur in hodiernum usque diem. Prolixum nimis foret de tot voluminibus sigillatim dicere & in iis contenta recensere. Adeat Diaria Eruditorum, in quibus eadem recensentur, qui hoc desiderat. Enimvero ne deessent ea, quæ ante instaurationem acta fuere, recentius edere libuit Collectionem Commentariorum Academiæ Regiæ scientiarum ab An. *1666*, quo fundata fuit, usque ad An. *1699*, eadem forma, qua nunc pro singulis annis Historia cum suis commentariis edi solet, Tomis undecim. Tomo primo continetur Historia a prima origine An. *1666*, usque ad An. *1686*; secundo Historia ab An. *1686* usque ad An. *1699*; tertio Commentarii in usum Historiæ naturalis Animalium autore PERRALTIO; quarto Dissertatio de principiis mixtorum naturalium DU CLOS, observationes ejusdem de aquis mineralibus plurium Provinciarum Galliæ, Commentarii DODARTI in usum Historiæ plantarum, ejusdem descriptiones novarum quarundam plantarum, DE BEZE e S. J. Descriptiones quarundam arborum & plantarum exoticarum; quinto diversa opera FRENICLII DE BESSY, scilicet Methodus inveniendi solutionem problematum per Exclusiones, Compendium Combinationum, Tractatus de Triangulis rectangulis in Numeris, Tractatus de Quadratis magicis, Tabula generalis Quadratorum magicorum, & BLONDELLI Resolutio quatuor problematum principum Architecturæ; sexto diversa opera ROBERVALLII, scilicet observationes de compositione motuum, & de modo inveniendi tangentes curvarum, Idea libri Mechanicæ de motibus compositis, Tractatus de recognitione æquationum, de geometrica planarum & cubicarum æquationum resolutione, de Indivisibilibus, de Trochoide ejusque spatio, epistola ÆGIDII PERSONERI de ROBERVAL ad Cl. P. MERSENNUM, epistola EVANGELISTÆ TORRICELLII ad ROBERVALLIUM, & Epistola ROBERVALLII ad TORRICELLIUM; præterea diversa opera PICARDI, nimirum Praxis horologiorum solarium majorum per calculum, dissertatio de Mensuris, una cum AUZOUTI comparatione mensurarum, de mensura liquidorum & aridorum, Experimenta circa aquas effluentes, fragmenta dioptrica, Tractatus de libellatione, ROEMERI de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus, secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros & ejusdem Experimenta circa altitudines & amplitudines

dines projectionis corporum gravium, instituta cum argento vivo; septimo Tractatus & observationes astronomicæ atque physicæ factæ in pluribus itineribus a Membris Academiæ & pluribus, quibus commercium literarium cum Academia fuit: octavo diversa opera CASSINI, scilicet de Origine & progressu Astronomiæ & de ejus usu in Geographia & Navigatione, Elementa Astronomiæ rectificata ex observationibus RICHERII factis in Insula Cayennæ, Luminis cœlestis, quod in Zodiaco apparet, detectio, Regulæ Astronomiæ Indorum computandi motus Solis & Lunæ, Reflexiones de Chronologia Sinarum, de Insula *Taprobane*, Hypotheses & Tabulæ Satellitum Jovis ex observationibus recentioribus reformatæ, Tabularum Satellitum Jovis usus præcipui; nono diversa opera DE LA HIRE, scilicet Tractatus de Mechanica, Tractatus de Epicycloidibus & earum usu in Mechanica, Explicatio præcipuorum effectuum glaciei & frigoris, Dissertatio de differentia sonorum chordæ & Tubæ Marinæ, Tractatus de differentibus accidentibus visus, Tractatus de Praxi Picturæ; decimo commentarii Mathematici & Physici Academiæ scientiarum Annorum 1692, 1693, &c. & Commentarii Mathematici & Physici Membrorum Academiæ scientiarum ex diversis Diariis Eruditorum extracti; undecimo denique Analysis generalis seu Methodi novæ resolvendi problemata omnis generis & omnis gradus in infinitum, autore DE LAGNY. Volumen septimum in duas partes dividitur, quarum utraque justum volumen constituit & multa continet, quæ sigillatim recensere nimis prolixum foret.

§. 38. Anno 1710, *Berolini* in 4. prodierunt *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societati Regiæ exhibitis edita* (Alph. 2, plag. 6, Tabb. æn. 31.) Dividitur in tres partes, quarum prima literaria, secunda physica & medica, tertia Mathematica & Mechanica continet. Tertia mole sua longe superat duas priores. Hæc Miscellanea deinceps continuata fuere ac in posterum continuabuntur. Continuatio prima lucem adspexit *Berolini* An. 1723, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. æn. 8), secunda ibidem An. 1727, in 4. (Alph. 1, plag. 21, Tab. æn. 10.), tertia sub Titulo Tomi quarti ibidem An. 1734, in 4. (Alph. 2, plag. Tabb. æn. 11.)

§. 39. Academia Scientiarum Petropolitana quinque ab Anno 1728 usque ad An. 1738, *Petropoli* edidit Volumina in 4. charta augusta sub Titulo: *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* pro annis 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, & 1731. Sunt vero horum Commentariorum tres classes, nimirum Mathematica, Physica & Historica. Quæ in classe mathematica continentur, hujus sunt loci & Mathesin inprimis sublimiorem multum promovent,

quemadmodum suo loco clarius edisseremus. Cum enim hoc opus continuandum sit in posterum, ut de singulis in classe mathematica cujusvis voluminis contenta sigillatim dicamus præsentis instituti ratio non fert.

§. 40. Denique hic quoque commemorandi sunt, *De Bononiensi scientiarum & Artium Instituto atque Academia Commentarii*, qui *Bononiæ* An. 1731, in 4. charta itidem augusta lucem publicam adspexerunt (Alph. 3, plag. 13, Tab. æn. 9.). Præfationis loco præmittitur Historia Bononiensis scientiarum Instituti: in Commentariis vero præter ea, quæ ad Historiam naturæ spectant, atque Chymica, Anatomica, Medica, Physica, continentur etiam Mechanica, Analytica, Geographica, Astronomica & Meteorologica. Subjunguntur iisdem opuscula varia quorundam Academicorum, inter quæ ad Mathesin spectant Dominici Guilielmini epistola hydrostatica, Eustachii Manfredii de meridianæ lineæ, quæ in D. *Petronii* exstat, dimensione & de novissimis circa fixarum siderum errores observationibus, Gabrielis Manfredii de formulis quibusdam integrandis, Jacobi Riccati virium elasticarum leges, Joannis Rizetti de corporum collisionibus & inde orta motuum communicatione, & Francisci Mariæ Zanotti de motu composito & de reflexionibus globi in plano rectangulo.

§. 41. Ad præsentem scriptorum classem etiam referimus Casparis Schotti, supra laudati, *Organon Mathematicum & Magiam Universalem Naturæ & Artis*. Organon Mathematicum editum est *Herbipoli* An. 1688, in 4. (5 Alph. Fig. æn. 1, Alph. 7 plag.). Ope tabularum quarundam Mathematicarum problemata Arithmetica, Geometrica, Architecturæ militaris, Chronologiæ, Gnomonicæ, Astronomiæ, Astrologiæ judiciariæ, Steganographiæ & Musicæ facilia redduntur tyronibus. Magia in quatuor partes divisa *Bambergæ* 1677, in 4. lucem adspexit (14 Alph. Tab. æn. 89.) In Tomo primo continentur Optica, Catoptrica & Dioptrica; in secundo Acustica & Musica; in tertio Mechanica, Statica, Hydrostatica, Hydrotechnica, Aërotechnica, nec non Arithmetica, Geometrica: in quarto denique Cryptographica, Pyrotechnica, Magnetica, Sympathica, Medica, divinatoria, Physiognomica & Chiromantica.

§. 42. In eundem censum veniunt Danielis Schwenteri Mathematum & Linguarum orientalium in Academia Altorffina Professoris, *Deliciæ Physico-Mathematicæ*, *Norimbergæ* 1636, in 4. primum editæ (3 Alph. 4 plag.) & postea a Philippo Harsdorffero duobus Tomis auctæ (10 Alph. 8 plag.) Continentur in iisdem ludicra varia, nonnulla etiam utilia, ex Arithmetica, Geometria, Stereometria, Musica, Optica, Catoptrica, Astronomia, Astrologia, Gnomonica & Thaumatopoë-

poëtica, Statica, Mechanica, Pyrobolia, Pneumatica, Hydraulica, Arte ſcriptoria, Architectura & Chymia.

§. 43. Majorem ſelectum in ſimili ſcripto fecit OZANAM, quod ſub titulo *Recréations de Mathématique & de Physique*, *Pariſiis* 1696, in 8. reg. edidit (3 Alph. 7 pl. Tabb. æn. 44.) Recuſæ ſunt hæ Recreationes multo auctiores, quatuor Tomis, ibidem An. 1725, in 8. forma majore, (Alph. 5, plag. 6, Tabb. æn. 132). Tomus primus continet problemata Arithmeticæ, Geometriæ & Opticæ; ſecundus problemata Gnomonicæ, Coſmographiæ, Mechanicæ; tertius problemata Pyrotechniæ & Phyſicæ, & Tractatum de Horologiis elementaribus DOMINICI MARTINELLI ex Italico in Gallicum idioma translatum. In quarto denique Tomo agitur de Phoſphoris naturalibus & artificialibus & lampadibus perpetuis, atque præſtigiatorum artificia, una cum aliis ludicris explicantur.

CAPUT II.

De Arithmetica.

§. 1. ARithmetica veterum ab Arithmetica hodierna prorſus erat diverſa. Veteres enim in eadem nonniſi varias numerorum diviſiones conſiderabant. Videre hoc eſt ex duobus *Arithmetices* libris, quos tertio Urbis conditæ ſeculo conſignavit NICOMACHUS, editis *Pariſiis* 1538. Eum ſequitur preſſo pede, ſexto a Chriſto nato ſeculo, ANITIUS MANLIUS SEVERINUS BOETHIUS in Arithmetica ſua.

§. 2. *Compendium Arithmeticæ* veterum compoſuit, nono poſt Chriſtum natum ſeculo, PSELLUS, a GUILIELMO XYLANDRO ex Græco idiomate in Latinum translatum, annotationibus auctum & *Baſileæ* 1556, in 8. in lucem publicam emiſſum. Recentius ſimile Compendium conſcripſit JODOCUS WILLICHIUS, ſub titulo: *Arithmeticæ libri tres* editum *Argentorati* 1540, in 8. (plag. 8.) Uſum habet in Idea exemplari definitionum animis tyronum ingeneranda, ut præcepta Logicæ facilius comprehendant & ad diviſionem rerum in ſua genera & ſpecies intimius perſpiciendam: de quo ſuo loco plura.

§. 3. Prolixius hoc Arithmeticæ genus illuſtrarunt, duodecimo poſt Chriſtum natum ſeculo, JORDANUS in duodecim *de Arithmetica* libris; & JACOBUS FABER *Stapulenſis* in Commentario in eoſdem An. 1480 edito.

§. 4. Arithmeticam theoreticam, quæ

quæ numerorum proprietates expendit, illustravit EUCLIDES Elementorum libro VII, VIII, & IX. Sed de his Elementis dicemus plura in sequente capite.

§. 5. Exactam theoriam ad demonstrandas operationes communes Arithmeticæ practicæ cum in numeris integris, tum fractis sive vulgaribus, sive sexagenariis, dedit BARLAAMUS MONACHUS in *Logistica*, quam Latine reddidit & scholiis illustratam *Parisiis* An. 1600, in 4. edidit JOANNES CHAMBERUS, Collegii Etonensis apud Anglos socius. (1 Alph. 3 plag.) Sed captum tyronum transcendit, quibus nimia accuratio inutilis, immo ridicula videtur.

§. 6. *Frater* LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI, Ordinis Minorum, Sacræ Theologiæ Magister, idiomate Italico An. 1523, edidit opus in fol. (6 Alph. 10 plag.) *de Arithmetica & Geometria*. Maxima operis pars Arithmeticæ impenditur, & in ea non modo divisiones numerorum ex NICOMACHO & proprietates ex EUCLIDE traduntur; verum etiam Algorithmus cum in integris, tum in fractis, una cum extractionibus radicum, regulis proportionum & progressionum, nec non regula falsi & Algebræ explicatur.

§. 7. MICHAEL STIFELIUS, Pastor Ecclesiæ Holtzdorffianæ, An. 1544, in 4. edidit *Arithmeticam integram* (1 Alph. 13 plag.), in qua multa tradit de numerorum cum rationalium, tum irrationalium, immo etiam Cossicorum praxi, quæ alibi frustra quæsiveris, sed sine demonstrationibus.

§. 8. *Arithmeticæ practicæ* opus absolutum An. 1556 dedit NICOLAUS TARTAGLIA, Venetus, in duas partes divisum, quarum prima arithmeticam practicam ad usum vitæ humanæ applicatam, altera vero Algebræ fundamenta explicat.

§. 9. FRANCISCUS MAUROLYCUS in suis *Arithmeticæ* libris supra laudatis (§. 32. C. 1.) doctrinam de numeris figuratis promovit, & algorithmum, cum extractionibus radicum, atque aliis Arithmeticæ practicæ regulis rigorose demonstravit: Sed ejus demonstrationes non sunt ad cujusvis captum accommodatæ.

§. 10. GEORGIUS HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta & demonstrata* (*Augustæ Vindelicorum* 1609, in 4. 2 Alph. 6 plag.) omnem praxin de numero vulgari, Cossico & astronomico demonstrat, & id singulare habet, quod demonstrationes in syllogismos resolverit.

§. 11. ANDREAS TACQUET in *Theoria & praxi Arithmetices* sæpius recusa (e. gr. *Amstelodami* 1704, in 8. plag. 34. Tabb. 8.) Elementa EUCLIDIS Arithmetica facilius demonstrat & praxes arithmeticas suis quoque demonstrationibus munit. Unde non immerito commendatur hoc opus.

§. 12. Demonstrationes in Arithmetica practica etiam affert DECHALES

LES (§. 4. C. 1.) Sed negligunt CLAVIUS, HERIGONIUS, VINCENTIUS LEOTAUDUS è Societ. Jesu, qui *Institutionum arithmeticarum* libros quatuor composuit, SCHOTTUS & plerique alii (§. 5. *& seqq. Cap. cit.*). WALLISIUS calculum litteralem cum numerorum algorithmo conjunxit, & illius ope regulas fractorum, proportionum & extractionum radicum demonstravit: ex quo compendium dedit EDUARDUS WELLS sub titulo *Elementorum Arithmeticæ*, 1698, in 8. tyronibus calculi utriusque commendandum.

§. 13. In *Elementis Arithmeticæ* non modo praxin, verum etiam theoriam demonstravi, præsertim theoriam de ratione Quantitatum. Ast in Elementis Germanicis dedi demonstrationes ad captum tyronum magis compositas. Sunt vero eædem vere analyticæ, ex ipsa notione numeri deductæ: ex qua integram Arithmeticam practicam methodo analytica deduxi, ut ad meditandum formarentur ingenia studio Arithmeticæ.

§. 14. Omittimus Autores alios, qui solam praxin tradiderunt, quamvis ad usum communem commendari mereantur GEMMA FRISIUS in *Methodo facili Arithmeticæ practicæ* (*Vitebergæ* 1544, in 8. plag. 11), ex quo me puerum integram arithmeticam practicam, ipsam etiam extractionem radicum, proprio Marte didicisse memini, & ADRIANUS METIUS in *Arithmetica* duobus libris comprehensa (*Hafniæ* 1640, in 4.). Recentius regulam generalem Arithmeticæ resolvendi omnia problemata, quæ ratione nituntur, dedit K. F. DE REES, quæ ex idiomate Batavo in Germanicum translata publici juris facta *Gœttingæ* An. 1739, in 8. (plag. 12.). Usui est illis, qui nulla theoria animum imbutum possident.

§. 15. SAMUEL MORLANDUS *Londini* An. 1673, in 12. (plag. 6½) idiomate Anglico emisit *descriptionem duorum instrumentorum*, *quorum ope additio*, *subtractio & multiplicatio motu quorundam orbium absolvitur.* Utrumque An. 1666, CAROLO II. Regi exhibuit. Sed multo ingeniosiorem machinam Arithmeticam in juventute sua dudum invenit illustris LEIBNITIUS, de qua in Miscellaneis Berolinensibus pag. 394. nonnulla leguntur. Aliam utut minus perfectam, ingeniosam tamen dedit Cl. JOANNES POLENUS in *Miscellaneis*, *Venetiis* 1709, in 4. (plag. 8. Tabb. 9.)

§. 16. Logisticam decimalem prolixe ac perspicue peculiari libro exposuit JOHANNES HARTMANNUS BAYERUS, D. Medicinæ, An. 1619, *Francof. ad Mœnum* vernaculo idiomate in 4. edito (1 Alph. 6. plag.). Arithmeticam Logarithmicam vero optime explicuit in peculiari itidem volumine, de quo inter scripta Trigonometrica plura dicemus, BRIGGIUS.

§. 17. De Arithmetica autem decimali inprimis commendari meretur libellus, quem sub Titulo: *A new*

and compleat Treatiſe of the Doctrine of fractions, vulgar and Decimal, Londini An. 1714, in 8. edidit SAMUEL CUNN, ubi omnia explicantur & exemplis illuſtrantur, quæ de uſu fractionum decimalium tenenda ſunt. Non inutilem operam ſumeret, qui eundem in linguam Latinam, vel etiam Germanicam transferret. Nos theoriam harum fractionum, quantum ad praxin ſufficit, expoſuimus & demonſtravimus Cap. 9 Elementorum Arithmeticæ. Hodie enim uſus earum prorſus egregius eſt, ubi ex æquationibus algebraicis radices per approximationem eruendæ & ſeries infinitæ ad communem uſum aptandæ.

§. 18. Virgulas ſuas, quibus magnorum numerorum multiplicationem ac diviſionem facilitavit, JOANNES NEPERUS, Baro Merchiſtonius, Scotus, in *Rhabdologia (Edinburgi* 1617, in 12. plag. *6.)* deſcripſit. JOHANNES vero GEORGIUS HERWART AB HOHENBURG, U. J. Doct. ex Aſſeſſore ſummi tribunalis imperatorii & Cancellario ſupremo Bavariæ Ducis ejuſdem conſiliarius intimus, Præſes provinciæ Schvabæ & inclytorum utriuſque Bavariæ Statuum Cancellarius, *Monachii* An. 1610, in fol. reg. evulgavit Tabulas *Arithmeticas* προσθαφαιρέσεως *univerſales*, quarum ſubſidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per ſolam additionem & quotiens quilibet e diviſione eliciendus per ſolam ſubtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum ſit gnarus, exacte & celeriter invenitur (11 Alph. 9 plag.). NEPERUM imitatus SAMUEL REYHERUS, Mathem. Prof. Kilonienſis, Bacillos ſexagenales *Kilonii* 1688, in 4. publicavit, quorum ope Logiſtica ſexagenaria facile exercetur: de qua egimus Cap. 10. *Arithmeticæ.*

CAPUT III.

De Geometria.

§. 1. GEometria eſt vel theoretica, vel practica: theoretica vel elementaris, vel ſublimior.

§. 2. Geometriam elementarem conſcripſit EUCLIDES, cujus *Elementa* a variis in lucem edita fuere. Textum Græcum cum verſione Latina An. 1703. *Oxoniæ* in fol. (7 Alph. 17. plag.) ſub titulo ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τὰ σωζόμενα h. e. EUCLIDIS, *quæ ſuperſunt, omnia*, edidit DAVID GREGORIUS, Aſtronomiæ Profeſſor Savilianus. Anno 1530, in priora ſex Elementa Commentarium edidit ORONTIUS FINÆUS, in quo mentem EUCLIDIS tantummodo explicat, qualem etiam

etiam An. 1557, dedit JACOBUS PELETARIUS. In Elementa omnia XV commentati ſunt circa idem tempus NICOLAUS TARTAGLEA, aliqua etiam de ſuo addens, & An. 1578, FRANCISCUS FLUSSATES CANDALLA, nobilis Gallus, qui ad Elementa decimum ſextum, ſeptimum, & octavum de ſolidorum corporum comparatione & inſcriptionibus variis adjecit. Elementa EUCLIDIS pariter ac FLUSSATIS cum commentario prolixo edidit CLAVIUS. Sæpius recuſa prodiere inter alia *Franc. ad Mœn.* 1654, in 8. duobus Tomis (Tom I. 2 Alph. 4 plag. & Tom. II. 1 Alph. 20 plag.) atque etiam inter Opera ejus extant (§. 24. C. 1.) Bene quoque EUCLIDEM integrum explicarunt DECHALES (§. 4. C. 1.), HERIGONIUS (§. 1. cap. cit.), & inprimis concinna brevitate ISAACUS BARROWIUS, Matheſeos olim in Academia Cantabrigienſi Profeſſor. Sed quoniam integer EUCLIDES tyronibus parum utilis; ideo complures ſex tantum priora Elementa ediderunt, & ad ſummum undecimum & duodecimum adjecerunt. Prolixum nimis foret ſingulas recenſere editiones: ſufficit eas nominaſſe, quæ præ aliis commendari merentur. In hunc ergo cenſum referimus Elementa EUCLIDIS Gallica, quæ DECHALES ſigillatim edidit, & Elementa Geometriæ planæ & ſolidæ ANDREÆ TACQUET. Præſtantiſſima illorum editio eſt *Pariſina* An. 1709, in 12. reg. (12 plag. Tab. æn. 16.); horum vero *Cantabrigienſis* An. 1703, in 8. (plag. 16. Tab. 7.), quorum illam debemus OZANAMO, hanc vero GUILIELMO WHISTONO, tunc temporis Mathematum Profeſſori Cantabrigienſi. Continetur autem in Elemento VII, VIII, & IX, theoria numerorum ſeu Arithmetica elementaris: unde ANDREAS TACQUET tria hæc Elementa Arithmeticæ ſuæ inſeruit (§. 11. c. 2.). Opus hoc illuſtre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut providentiæ divinæ tribuendum ſit, quod injuria temporum non interciderit.

§. 3. JOANNES SCHEUBELIUS, in Academia Tubingenſi EUCLIDIS Profeſſor, exiſtimans, præter inſtitutum EUCLIDIS, in deſignandis demonſtrationum momentis literarum figuras uſurpari, atque hac ratione & docentibus laborem ac moleſtiam augeri, & diſcentium intelligentiam impediri, An. 1550, novo conſilio Elementa ſex priora ita demonſtravit, ut literis remotis ſua unumquodque propria appellatione deſignarit. Prodiit opus *Baſileæ* in fol. præmiſſa brevi Algebræ deſcriptione. (3 Alph. 5 plag.)

§. 4. Alio conſilio An. 1565, CHRISTIANUS HERLINUS & CONRADUS DASYPODIUS demonſtrationes *Euclideas* in ſyllogiſmos reſolverunt: qui labor hunc uſum habere poteſt, ut appareat, quomodo ex plurium Syllogiſmorum concatenatione tan-

dem demonstratio completa enascatur. Idem opus utrique debetur ex parte. Prodiit *Argentinæ* An. 1506, in fol. (Alph. 2, plag. 4, cum figuris ligno incisis.). Titulus est: *Analyses Geometricæ sex librorum* EUCLIDIS, *primi & quinti a* CHRISTIANO HERLINO, *reliquæ, una cum Commentariis & scholiis perbrevibus in eosdem sex libros Geometricos, a* CONRADO DASYPODIO.

§. 5. Ordo EUCLIDIS displicuit PETRO RAMO, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ in *Scholis Mathematicis* lib. 6, & seqq. contra EUCLIDEM passim disputat. Prodiere hæ Scholæ *Francofurti ad Mœnum* opera LAZARI SCHONERI An. 1599, in 4. (2 Alph. 17 plag.) continentes 1. exhortationem ad artes mathematicas, 2. disputationes de præcipuis quibusdam capitibus Arithmeticæ, & 3. discursus de quindecim libris EUCLIDIS. Confer etiam lib. 3, pag. 94, & seqq. RAMUS itaque alia Geometriæ elementa conscripsit libris 27 comprehensa secundum ordinem Scholæ, a SCHONERO An. 1599, in 4. *Francofurti*, una cum libris 2 Arithmeticæ edita & *Euclideis* prælata. Titulus libri est: PETRI RAMI *Arithmeticæ Libri duo*, *Geometriæ septem & viginti*, *a* LAZARO SCHONERO *recogniti & aucti* (2 Alph. 9 plag. cum figuris textui insertis). Arithmetica magis practica, quam theoretica est, etsi theoria de ratione & proportione exemplis illustretur & ad praxin transferatur. Deficiunt tamen demonstrationes accuratæ, quales dedit EUCLIDES. Adjecit SCHONERUS de numeris figuratis librum unum & RAMI Algebræ libros duos a se emendatos, atque de Logistica sexagenaria librum proprium. In Geometria agitur primum de magnitudine in genere, deinde de lineis, postea de superficiebus, tandem de solidis. Enimvero qui primus Geometriam ad ordinem Scholæ reformare ausus est, statim exemplo suo docuit (quod supra §. 57. *Meth. Math.* annotatum est) accuratam demonstrandi methodum cum ordine Scholæ subsistere non posse. Etsi enim SCHONERUS testetur, se in docenda Arithmetica & Geometria P. RAMI per multos annos versatum, & quantum ex iis proficere liceat tyronibus experientia multiplici edoctum fuisse; hoc tamen non obstat, quo minus EUCLIDEM ipsum RAMO præferamus. Neque enim SCHONERUS methodi ac rigoris in demonstrando; sed tantummodo doctrinæ rationem habet, quam ex RAMO facilius hauriri ac memoriæ inprimi posse facile conceditur. Nobis vero jam sermo est de methodo, quæ cum rigore demonstrandi consistit, ut plenaria adsit convictio eaque immota, quocunque tandem acumine demonstrationem perlustres. Hanc desiderari in RAMO, nec cum eo ordine, quo doctrinas congessit, consistere posse contendimus.

§. 6. Idem

§. *6.* Idem apparet etiam ex ceterorum ſcriptis, qui poſt RAMUM idem conſilii ceperunt. Pertinent huc 1. *Elementa Geometriæ* IGNATII GASTONIS PARDIES e Societate Jeſu, quartum *Hagæ Comitum* An. 1680, in 12. (plag. 8) recuſa & a ſumme Reverendo Abbate SCHMIDIO, Helmſtadienſium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Matheſin & Philoſophiam profiteretur, ex Gallico ſermone in Latinum translata. Extant in Opuſculis ejus mathematicis, quæ ſub titulo: *Oeuvres de Mathématique*, *Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. prodiere, in quibus præter hæc elementa libris IX comprehenſa continetur Diſcurſus de motu locali, Statica, & Deſcriptio duarum machinarum deſcribendis horologiis Solaribus convenientium. 2. *Nova Elementa Geometriæ* ARNALDI, ſuppreſſo nomine, Anno 1667, *Pariſiis* primum edita in 4. dein An. 1685, ibidem & An. 1690, *Hagæ Comitum* in 8. recuſa (plag. 21) idiomate Gallico. 3. *Elementa Geometriæ* Gallica R. P. BERNHARDI LAMY An. 1685, *Pariſiis* in 12. primum edita & An. 1710, ibidem multo auctiora recuſa, ita ut nunc ſingulæ EUCLIDIS propoſitiones, exceptis Elementis ſeptimo, octavo & nono de numeris agentibus, in iiſdem contineantur una cum introductione ad ſectiones conicas (plag. 21.) 4. *Elementa Geometriæ Sereniſſimi Burgundiæ Ducis* Gallice conſcripta (*Trevoltii* 1705, in 4. reg. 1 Alph. 7 plag.) concinna brevitate maxime neceſſaria methodo *Arnaldiana* evolventia *. Omittimus alia, quæ minoris ſunt momenti & ex hiſce compilata.

§. 7. Integrum quoque EUCLIDEM alio ordine digeſſit & novis paſſim demonſtrationibus munivit Cl. PETRUS POLYNIER, Medicus Pariſienſis, in Elementis Geometriæ, quæ una cum Elementis Arithmeticæ ſub titulo: *Elémens des Mathématiques*, *Pariſiis* 1704, in 12. reg. (1 Alph. 4 plag.) edidit. Contra quæ ex EUCLIDE cognitu minus neceſſaria ſunt, omiſit, & neceſſaria alio ordine digeſſit, aliterque ſubinde demonſtravit Cl. ANGELUS DE MARCHETTIS in Piſana Univerſitate Mathematum Profeſſor in EUCLIDE, quem vocat, *Reformato* (*Liburni* 1709, in 4. 1 Alph. 10 plag.)

§. 8. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum EUCLIDIS non fuiſſe in auſu ſuo ſatis felices; ſed EUCLIDIS Elementis palmam adhuc merito tribuendam eſſe. Memini hanc fuiſſe LEIBNITIO ſententiam, cum me inviſeret, dum Elementis Geometriæ concinnandis operam darem, ipſique referrem me multiplici modo tentaſſe, ut eo ordine Elementa Geometriæ digererem, quo uſus eſt BERNHARDUS LAMY, ſed nunquam hoc fieri potuiſſe, niſi quædam aſſumerem abſ-

* Elementorum horum Autor Dn. DE MALESIEUX.

que demonstratione, quæ essent demonstranda, vel in demonstrando ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta. In Anglia JOANNES KEIL, ut Matheseos Studiosos ad Elementa EUCLIDIS reduceret, eo fine *Oxonii* An. 1715, in 8. (Alph. 1, plag. 6, cum figuris textui insertis), imprimi curavit Elementa sex priora EUCLIDIS una cum decimo & undecimo ex versione FREDERICI COMMANDINI. In præfatione, quam iisdem præmisit, graviter invehitur in eos, qui EUCLIDEM carpunt, & ab ejus lectione juvenes abducunt. Addidit Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ, atque Tractatum de natura & Arithmetica Logarithmorum.

§. 9. Præter ordinem, quem EUCLIDES in Elementis suis tenet, multi ex antiquis pariter ac recentioribus Geometræ, tres sibi visi sunt deprehendisse nævos in ejusdem Elementis, quorum primus respicit definitionem parallelarum & sub ea axioma, quod apud CLAVIUM est decimum tertium libri primi; secundus definitionem sextam libri quinti, quæ est æque proportionalium; & tertius definitionem quintam libri sexti de compositione rationum. Ab his nævis eum vindicare aggressus est HIERONYMUS SACCHERIUS, Societatis Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professor, in Opusculo, quod sub titulo: EUCLIDES *ab omni nævo vindicatus*, sive *Conatus Geometricus*, *quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia*, *Mediolani* 1733, in 4. (plag. 20, Tab. æn. 6).

§. 10. Nos equidem in Elementis hisce Matheseos non exhibuimus Elementa EUCLIDIS ipsa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiatur vel in Arithmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus & demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in Logica Latina (§. 799, 854, 855) explicamus, ad usum tamen tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

§. 11. Quæ in EUCLIDE de Circuli, Sphæræ, & Cylindri dimensione defuere; ea supplevit ARCHIMEDES in duobus *de Sphæra & Cylindro Libris*, & *de Circuli dimensione* Libello unico: ex quibus selecta theoremata ad faciliorem tyronum intelligentiam proposuit TACQUETUS sub finem Geometriæ supra laudatæ (§. 2). Idem ARCHIMEDES Libros alios de *Spiralibus*, de *Conoidibus & Sphæroidibus*, & de *Quadratura Parabolæ* scripsit. Opera ejus una cum *Conicis* APOLLONII & *Sphæricis* THEODOSII edidit facilioribus cum demonstrationibus ISAACUS BARROWIUS *Londini* 1675, in 4. (Opera ARCHIMEDIS constant 24 plag. Tabb. æn. 13.

APOL-

APOLLONII 14 plag. Tab. 12, & THEODOSII plag. 6, Tab. 3). Præter vero Geometrica in operibus ARCHIMEDIS una continentur Libri *de æquiponderantibus & insidentibus humido: Arenarium* tamen ejus omisit BARROWIUS, qui in alia editione una comparet, quæ *Panormi* An. 1685, in fol. prodiit, & cujus singularia fata in Actis Eruditorum An. 1687, p. 543, & 544, recensentur. Germanicam operum ARCHIMEDIS versionem (Libris de insidentibus humido exceptis) dedit JOH. CHRISTOPH. STURMIUS (*Norimbergæ* 1670, in fol. 6 Alph. 2 plag.)

§. 12. Archimedea promovere studuit JOHANNES KEPLERUS in *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, inprimis Austriaci (*Lincii* 1615, in fol. plag. 28), quæ una continet supplementum ad ARCHIMEDEM de Stereometria figurarum Conoidibus & Sphæroidibus proxime succedentium. Ex Latino in Germanicum versam eandem anno sequenti edidit, sed passim mutatam, alicubi etiam practicis nonnullis auctam. Ejus exemplo excitatus BONAVENTURA CAVALERIUS, ordinis S. Hieronymi, olim Mathematum Professor Bononiensis (quemadmodum ipse in præfatione fatetur) adhuc ulterius progressus plurium, quam ARCHIMEDES & KEPLERUS, solidorum per revolutionem sectionum conicarum circa axem aut rectas alias dedit nova methodo indivisibilium, quam vocat, a KEPLERO part. 1. theor. 2. Stereom. indicata, in *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Bononiæ* 1653, in 4. 3 Alph. 1 plag.) Similiter *Archimedea* illustravit atque promovit EVANGELISTA TORRICELLIUS, magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, in *Operibus Geometricis de Solidis sphæralibus, de motu, de dimensione parabolæ, de solido hyperbolico cum appendicibus, de cycloide & cochlea* (*Florentiæ* An. 1644, in 4. 2 Alph.)

§. 13. Præter ea, quæ ARCHIMEDES ad sublimiorem Geometriam spectantia tradidit, Veteres inprimis ad eandem *Sectionum Conicarum* doctrinam referebant, de quibus opus absolutum VIII Libris comprehensum composuit APOLLONIUS *Pergæus*, quorum quatuor priores sæpius editi. Inter optimas editiones refertur, quam cum Commentariis prolixis An. 1655, in fol. (5 Alph. 19 plag. Tabb. æn. 30.) *Antverpiæ* in lucem emisit CLAUDIUS RICHARDUS, e Societate Jesu, quales etiam in EUCLIDIS Elementa XV, An. 1645, in fol. dederat integro volumine comprehensos. Quintum, sextum & septimum, qui pro amissis habebantur, ex Arabico MSC. ABALPHATI *Aspahanensis* opera ABRAHAMI ECCHELLENSIS *Maronitæ*, Linguarum Orientalium Professoris Romani, in vertendis usus, *Florentiæ* 1641, in fol. (4 Alph. 21 plag.), cum *libro Assumtorum* ARCHIMEDIS in lucem protraxit JOH. ALPHONSUS BORELLUS, in Academia Pisana Mathe-

ſcos Profeſſor. Antequam vero iidem prodirent, VINCENTIUS VIVIANI, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, ex deſcriptione PAPPI librum quintum feliciter reſtituit, & ſub titulo *Divinationis Geometricæ* in quintum Conicorum APOLLONII *Pergæi* adhuc deſideratum, *Florentiæ* 1659, in lucem emiſit: quo ſucceſſu felici permotus ex intervallo An. 1701, addidit *de locis ſolidis ſecundam divinationem Geometricam* in quinque libros injuria temporum amiſſos ARISTÆI ſenioris Geometræ (*Florentiæ* in fol. 3 Alph. 15 plag.). Scripta VIVIANI uſui eſſe poſſunt illis, qui methodo demonſtrandi veterum in Geometria ſublimiori delectantur. Præſtantiſſimam operum APOLLONII editionem dedit Celeberrimus HALLEJUS *Oxoniæ* An. 1710, in fol. (5 Alph. 16 plag.). Acceſſere eidem SERENI Libri duo de *Sectione Cylindri & Coni*, qui primum Græce editi, & APOLLONII liber octavus ab HALLEJO reſtitutus.

§. 14. Inter recentiores doctrinam conicam illuſtrarunt varii. Commendari meretur opus de *Sectionibus Conicis* CLAUDII MYDORGII An. 1632, *Pariſiis* in fol. publicatum, in quo & proprietates earundem demonſtrantur, & deſcriptiones variæ docentur. Huic præferendus GREGORIUS A S. VINCENTIO, e Societate Jeſu, qui in *Opere Geometrico Quadraturæ circuli & Sectionum Coni*, 10 Libris comprehenſo ad inventa recentiora viam ſtravit, ita ut LEIBNITIUS in Actis Eruditorum An. 1691, p. 438, fateatur, ſibi in interiori Geometria hoſpiti, cum opus hoc GREGORII A S. VINCENTIO, una cum HUGENII libro de Horologio oſcillatorio & DETTONVILLÆI (hoc eſt, PASCALII) Epiſtolis legeret, ſubito affulſiſſe lucem & ſibi & aliis inexpectatam. Prodiit opus inſigne *Antverpiæ* 1647, in fol. (14 Alph., & præter conica in eodem continentur variæ linearum inter ſe proportiones, triangulorum novæ proprietates, rectangulorum proportiones, progreſſionum Geometricarum etiam in infinitum progredientium miræ proprietates, multa de circulo alibi minus obvia, doctrina de ductu plani in planum, de proportionalitatibus Geometricis theoria nova, ungularum item, conoidum & ſphæroidum doctrina. Abſolutum quoque *Sectionum conicarum* opus debemus induſtriæ PHILIPPI DE LA HIRE (*Pariſ.* An. 1685, in fol. 2 Alph. 18 plag.), in quo præter APOLLONIANA plurima alia methodo veterum demonſtrantur: ex quo in gratiam tyronum compendium fecit JACOBUS MILNES impreſſum *Oxonii* An. 1702, in 8. (12 plag. & 19 Tab. Fig.) & recuſum emendatius atque auctius ibidem 1712, in 8. (15 plag. Tabb. 19) ſub titulo; *Elementa Sectionum Conicarum nova methodo demonſtrata.*

§. 15. Ipſe etiam celeberrimus DE LA HIRE in eorundem gratiam Ele-

Elementa Sectionum conicarum, *Parisiis* An. 1679, in 12. in lucem emisit una cum constructione locorum geometricorum & æquationum, de qua in capite subsequente. Titulus opusculi : *Nouveaux Elémens des Sections Coniques , les lieux Géométriques , la construction des Equations.* (plag. 21.) Similis iisdem est Tractatus OZANAMI Gallicus *de lineis primi generis, locis Geometricis & constructione æquationum* (*Parisiis* 1687, in 4. 1 Alph. 15 plag. Tab. æn. 35). Nominandus hic quoque est *Tractatus de Sectionibus cylindri & coni in solido & plano consideratis, cum demonstrationibus simplicibus ac novis*, quem sermone Gallico *Parisiis* An. 1704, in 8. edidit POIVRE (5 plag. & 8 Tabb. æn.). De aliis Conicorum scriptoribus dicemus capite sequente.

§. 16. Commemoranda tamen de iisdem adhuc nonnulla sunt, quæ hic apprime locum merentur. Nimirum GUIDO GRANDUS, cum intelligeret, desiderari libellum Conicorum ad captum tyronum, cujus defectu doctrina conica in Scholis vulgo negligitur ; eundem supplevit & methodo veterum conscripsit libellum mole parvum, sed rerum ubertate gravem, in quo præcipua de sectionibus conicis theoremata demonstrat. Prodiit *Florentiæ* An. 1722, in 12. (plag. $6\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 7.), sub titulo : *Compendio delle sezzioni coniche d'Apollonio.* Quoniam hoc compendium commendari meretur Matheseos Studiosis, CHRISTIANUS AUGUSTUS HAUSEN, Matheseos Professor Lipsiensis, versionem hujus opusculi Latinam in gratiam auditorum adornasse dicitur in Actis Eruditorum supplement. Tom. VIII, sect. X, hinc inde tamen quædam immutasse. Equidem VINCENTIUS SANTINI, Florentinus, simile Compendium dare conatus est *Lucæ* 1722, in 8, (plag. 6, Fig. 28) sub titulo : *Delle sezzioni coniche dedotte nuovamente in Piano dal cerchio*, in quo nova ratione sectiones conicas in plano a circulo deducit ; sed demonstrationes ejus laborare circulo vitioso jam annotarunt Collectores Actorum Eruditorum *loc. cit.* p. 432. NICOLAUS DE MARTINO, Regius Mathematum Professor Neapoli, duobus Tomis *Elementa Sectionum conicarum* edidit *Neapoli* An. 1734, in 8. charta augusta (Tom. I, plag. $21\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 8, Tom. II, plag. 22, Tabb. æn. 8.). Conscripserat hæc Elementa ad usum FAUSTINÆ PIGNATELLI, Principis Culubranensis & Tolvensis Ducatus hæredis ; postea in gratiam studiosæ juventutis publici juris fecit. Omissis propositionum, scholiorum & corollariorum titulis, continuo textu ad morem vulgarem extra Mathesin receptum cuncta demonstrat. Præter Sectionum conicarum proprietates, earum usum in construendis problematis solidis docet, præmissis iis, quæ cum in genere de constructionibus geometricis, tum problematum planorum sciri debent.

§. 17. Præ-

§. 17. Præter Conica apud veteres in Geometria sublimiori celebre fuit Problema Deliacum de duplicando cubo, seu, quod eodem recidit (§. 626, *Anal. fin.*), de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas: quem in finem excogitatæ sunt variæ lineæ curvæ a PAPPO *Alexandrino* in *Collectionibus Mathematicis* conservatæ. Earum duo Libri priores hactenus desiderantur. Sex posteriores *Bononiæ* 1660, in fol. editi (Alph. 5, plag. 9, cum figuris textui insertis,) continent, inter alia solutiones varias problematis Deliaci, trisectionem anguli, isoperimetrorum doctrinam, sphærica nonnulla, & quædam ad Mechanicam spectantia. Varia etiam scripta Geometrarum veterum in præfatione ad librum septimum recenset PAPPUS.

§. 18. Inter præcipua inventa Geometrica superioris seculi refertur methodus centrobaryca PAULI GULDINI, e Societate Jesu, de qua diximus in Mechanica & Statica (§. 164). Prodiit ejus liber primus *de centro gravitatis, una cum Tabulis numerorum quadratorum & cubicorum decies millium*, *Viennæ Austriæ* 1635, in fol. (4 Alph. 21 plag.). Accessere libri secundus, tertius & quartus An. 1640, (4 Alph. 14 plag.). Libro primo adjuncta est dissertatio de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente.

§. 19. Curvarum doctrinam universalius pertractavit & multis novis inventis auxit ISAACUS BARROWIUS supra laudatus in egregio opere *Lectionum Geometricarum*, *Londini* 1674, in 4. (plag. 21, Tabb. 13). Elementa curvarum in usum tyronum hactenus desiderantur, qualia tamen prostare consultum foret.

§. 20. Alia scripta particularia ad Geometriam theoreticam spectantia nimis longum foret hic recensere. Quædam tamen recensere lubet. Pertinet huc CHRISTIANI HUGENII liber *de circuli magnitudine*, *Hagæ Comitum* An. 1644, in 4. (plag. 5, cum figuris textui insertis) & ejusdem *Theoremata de Quadratura Hyperboles*, *Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro*, *Lugduni Batavorum* An. 1651, in 4. (plag. 6½ cum figuris textui insertis.). Uterque Tractatus legitur Operum variorum Tomo secundo (§. 35, c. 1).

§. 21. Affinia his sunt LUDOLPHI A CEULEN, Hildesheimensis, *de Circulo & Adscriptis* liber, ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illustratus a WILLEBRORDO SNELLIO (*Lugd. Batav.* 1619, in 4. plag. 8) & ejusdem *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* cum eorundem usu in variis problematis Geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales & tabulas sinuum & Algebram solutis, a SNELLIO itidem Latine versa, *Lugd. Bat.* 1615, in 4. (1 Alph. 16 plag.)

§. 22. LAURENTIUS LORENZINIUS, Disci-

Discipulus VINCENTII VIVIANI, edidit *Florentiæ* An. 1721, in 4. (plag. 20, Tabb. æn. 14.) *Exercitationem Geometricam*, in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum, curvæ parabolicæ, curvæque superficiei Conoidis parabolici. Solvit more veterum per demonstrationes problemata, quæ hodie per Algebram solvi solent. Unde ejus lectio commendanda iis, qui methodum veterum sibi familiarem reddere gestiunt. Cum viginti annos in vinculis duro fato detineretur, ab omni commercio cum hominibus literatis remotus, nullius libri usu concesso, methodum istam excoluit & duodecim libros de sectionibus conicis & cylindricis eorumque solidis conscripsit, ultra APOLLONII & VIVIANI inventa progressus. Ex carcere igitur tandem dimissus, ubi cognovisset, quæ nunc agerentur a Geometris, sublimiora quoque meditari cœpit, sed consueta sibi utens methodo. Sex itaque composuit Exercitationes, quarum prima est, quæ hic commemoratur: ceteræ enim, quantum constat, lucem publicam non adspexerunt.

§. 23. *Comes de* PAGAN, cujus non minus in Astronomia, quam Architectura militari celebre est nomen, decem edidit libros Theorematum Geometricorum sub titulo: *Les dix Livres des Theorémes Géometriques du Comte de* PAGAN, *Parisiis* 1654, in 8. (1 Alph. 5 plag.), in quibus de lineis 4 proportionalibus, de sectionibus conicis, de theoria planetarum elliptica, de munitionibus regularibus & de navigatione agit. Prostant etiam ISMAELIS BULLIALDI *de Lineis spiralibus demonstrationes novæ* (*Paris.* 1657, in 4. plag. 18.) & ejusdem *Exercitationes Geometricæ circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras*, *circa conicarum sectionum quasdam propositiones*, *& de perismatibus* (*Paris.* 1657. in 4. plag. 6).

§. 24. STEPHANUS DE ANGELIS, Nobilis Venetus, Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, methodum CAVALERII excoluit, ejus usum insignem demonstraturus, cum non deessent, qui eandem impugnarent & contemnerent. Edidit *Venetiis* An. 1658, in 4. (Alph. 1, plag. 14, cum figuris textui insertis) *Problemata Geometrica Sexaginta circa Conos*, *sphæras*, *superficies conicas sphæricasque præcipue versantia*; ibidem An. 1656, in 4. *Libros quatuor de infinitis parabolis infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum partiumque earundem genitis*, *una cum nonnullis ad prædictarum magnitudinum aliarumque centra gravitatis attinentibus* (Alph. 2, plag. 7,). Addidit An. 1663, librum quintum (plag. 14). Ibidem 1659, in 4. in lucem publicam emisit *Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum*, in quo præcipue agitur de centris gravitatis hyperbolæ, partium ejusdem, atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam Geometria locuta est. Parabola noviter quadratur dupliciter,

ducuntur infinitarum parabolarum tangentes, aſſignantur maxima inſcriptibilia, minimaque circumſcriptibilia infinitis parabolis, conoidibus ac ſemifuſis parabolicis, aliaque geometrica nova exponuntur ſcitu digna (Alph. 1, plag. 11). An. 1660, ibidem prodiit ejus *Opuſculum Geometricum de infinitorum ſpiralium ſpatiorum menſura* (plag. 16) & tandem An. 1661, publici juris facti Tractatus de *infinitarum cochlearum menſuris ac centris gravitatis* (plag. 16), & Tractatus duo *de ſuperficie Ungulæ & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidalium* (Alph. 1, plag. 19). Atque adeo patet, quod ſuo tempore Geometriam ſublimiorem multum promoverit, aliiſque viam ad ulteriora monſtraverit.

§. 25. FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenſis, in Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſor, *Exercitationum mathematicarum* libros quinque *Lugduni Batavorum* in 4. An. 1657, (Alph. 3) edidit, in quibus habentur varia tum ad Geometriam elementarem, tum ſublimiorem ſpectantia, una cum tractatu de ſectionum conicarum in plano deſcriptione, qui ſigillatim prodiit (*Lugd. Batav.* 1646, in 4. plag. 17). Nimirum libro primo continetur propoſitionum arithmeticarum & geometricarum centuria, ſecundo conſtructio problematum ſimplicium geometricorum, tertio APOLLONII *Pergæi* loca plana reſtituta, quarto organica conicarum ſectionum in plano deſcriptio, & quinto ſectiones miſcellaneæ triginta. Colophonis loco adjicitur HUGENII Tractatus de *Ratiociniis in ludo aleæ*, qui inter opera varia Vol. 2, legitur (§. 35, C. 1).

§. 26. JACOBI DE BILLY, e Societate Jeſu, tractatus *de proportione harmonica*, An. 1658, editus, in quo varia problemata ejus ope ſolvuntur. ANTONII LALOVERÆ, e Societate Jeſu, *Geometria veterum promota*, ſeu libri ſeptem de Cycloide *Toloſæ* 1660, prodiere, quibus multa continentur ad Geometriam ſublimiorem ſpectantia. Extat etiam FERDINANDI ERNESTI *Comitis ab* HERBERSTEIN *Diatome Circulorum ſeu ſpecimen Geometricum*, quo Lunularum, Curvilineorum aliorumque ſpatiorum propoſitiones demonſtrat (*Pragæ* 1710, in 8. 1 Alph. Tab. 1): VINCENTII VIVIANI *Exercitatio mathematica de formatione & menſura fornicum* (*Florentiæ* 1692, in 4. plag. 6): JOH. BAPTISTÆ PALMÆ in *Geometriam Exercitationes* (*Neapoli* 1689, in 4. plag. 16) 100 propoſitiones, quæ ad Geometriam elementarem pertinent, cotinentes.

§. 27. ANGELUS DE MARCHETTIS, in Piſana Univerſitate ſcientiarum mechanicarum Profeſſor, *Piſtoriæ* An. 1695, in 4. (plag. 14) ſermone patrio edidit Tractatum de natura rationis & proportionis nova, facili & ſecura methodo explicata. Titulus libelli eſt: *La Natura della proporzione & della proporzionalità.* In

eo

eo aliam viam ingressus est, quam EUCLIDES, aliam quoque, quam alii recentiores ab EUCLIDE recedentes calcarunt. Cum intellexisset, eundem probari STEPHANO DE ANGELIS, DOMINICO GULIELMINO, FRANCISCO SPOLETI, *Collectoribus Actorum Eruditorum* in Actis An. 1696, p. 244, 245, in Latinam linguam ipsum transtulit: Qua data occasione cetera quoque EUCLIDIS Elementa tam plana quam solida in breviorem & meliorem formam redigere voluit. Unde enatum est opus Elementorum planorum & solidorum Geometriæ, quod sub titulo: EUCLIDES *Reformatus* prodiit & quod supra laudavimus (§. 7).

§. 28. Ad libros analyticos veterum, quorum memoriam conservavit PAPPUS in præfatione ad librum septimum Collectionum mathematicarum referendi sunt APOLLONII *Pergæi de sectione rationis* Libri duo ex arabico latine versi, & de *sectione spatii* Libri duo restituti ab EDMUNDO HALLEY ac editi *Oxonii* 1706, in 8. (1 Alph. 3 plag.).

§. 29. Ad Geometriam quoque spectat *Sphæricorum* doctrina, quæ circulorum in superficie Sphæræ descriptorum & sese mutuo intersecantium proprietates explicat. Eam olim tribus libris comprehendit THEODOSIUS, quos Tomo primo Cursus Mathematici exhibet DECHALES, ut supra monuimus (§. 4). Eosdem nova methodo illustravit & succincte demonstravit ISAACUS BARROWIUS atque *Londini* 1675, in 4. (plag. 6, Tab. æn. 3) edidit, subjunctos operibus ARCHIMEDIS & APOLLONII. Aliqua hujus doctrinæ etiam attingit PAPPUS libro septimo collectionum mathematicarum, ubi addit, quæ in THEODOSIO desiderantur scitu necessaria.

§. 30. *Geometriam practicam* omnium absolutissimam, sed sine demonstrationibus dedit MALLETUS, quatuor Tomis idiomate Gallico conscriptis comprehensam (*Paris.* 1702, in 8. reg. Tom. I, plag. 23, Tom. II, plag. 26, Tom. III, plag. 24, Tom. IV, plag. 18). In Geodæsia declaratur usus semicirculi, quadrati Geometrici, circini proportionum, Astrolabii, pixidis magneticæ, baculi Jacobi & mensulæ geometricæ. Singula folia Figuris elegantibus, sed ad rem parum facientibus exornantur.

§. 31. Germanico idiomate Geometriam practicam conscripsit DANIEL SCHWENTERUS, Professor olim Mathematum Altorfinus, cum notis JOHANNIS BOECKLERI, *Norimbergæ* 1667, in 4. (4 Alph. 18 plag.) recusam. Praxis in charta cum demonstrationibus docetur: in campo solus baculorum & mensulæ geometricæ usus ostenditur, sterometria desideratur. Unde instar supplementi esse potest JOHANNIS HARTMANNI BEYERI, Med. D. Stereometria, quam sub titulo: *Eine neue und schöne Art der vollkommenen Visir-Kunst*, *Franc. ad Mœn.* 1603, in 4. (1 Alph. 7 plag.) edidit. Autor inprimis Stereometriam

metriam doliorum plenius explicat, quam ab aliis factum. Cum tamen doliorum non plenorum stereometriam non attigisset; An. 1619, addidit Conometriam Mauritianam vernaculo itidem sermone conscriptam. (*Franc.* in 4. plag. 11), in qua stereometria doliorum tam plenorum, quam non plenorum traditur. Ceterum idem Autor de virgula pithometrica conficienda ibidem 1620, plagulam unam adjecit.

§. 32. Ante SCHWENTERUM in usum agrimensorum BERNHARDUS CANTZLERUS edidit tractatum geodæticum sub titulo: *Kurtzer und leichter Bericht vom Feldmessen*, quem ABDIAS TREW Mathes. Prof. Altorfinus multis annotationibus auxit, ita ut sub titulo: *Summa Geometriæ practicæ* An. 1673, *Norimbergæ* in 8. (plag. 33, Tab. æn. 55) edi meruerit.

§. 33. Nomen Autoris commendat scholam agrimensorum, quam PHIL. DE LA HIRE sub titulo: *l'Ecole des Arpenteurs*, *Paris.* Anno 1689, in 8. edidit. Prodiit tertia vice *Paris.* An. 1728, in 12. reg. (plag. 16). Explicantur in hoc libello operationes arithmeticæ & trigonometricæ cum principiis Geometriæ, quibus agrimensores habent opus. Deinde exponuntur praxes Geodætarum & subjicitur descriptio artis libellandi. Nec minus laudem merentur CLAVII (§. 24), TACQUETI (§. 28), OZANAMI Geometriæ practicæ (§. 7), hujusque *Méthode facile pour arpenter, ou mesurer toutes sortes de superficies & pour toiser exactement la Maçonnerie, les vuidanges des Terres & tous les autres corps, dont on peut avoir besoin dans la pratique.* Prodiit denuo *Parisiis* An. 1725, in 12. reg. (plag. 12). Explicantur etiam in hoc libello operationes Arithmeticæ & Trigonometricæ ac principia Geometriæ agrimensoribus scitu necessaria. Eundem cum PHILIPPO DE LA HIRE scopum sibi præfixit HENRICUS WILSON in libro Anglico, quem sub Titulo: *Surveying improved*, *Londini* 1726, in 8. reg. (Alph. 1, Tabb. æn. 11) edidit, in suo genere satis consummatum. Solet vulgo institutionibus Architecturæ militaris præmitti Geometria practica.

§. 34. ADRIANUS METIUS 1725, in 4. edidit *Arithmeticæ* libros duos & *Geometriæ* libros sex. Qui multo auctiores 1650, *Lugduni Batavorum* in 4. recusi (Alph. 3). Geometria nonnisi practica est, perinde ac Arithmetica, ut adeo hic recenseri mereatur. Tractatur in hisce libris etiam Trigonometria plana, usus circini & regulæ proportionalis, Architectura militaris, problemata Astronomica, & sciaterica Horologia, ita ut in hoc opere reperias, quæ titulus non promittere videtur, nec in libris, quæ eundem habent, vulgo quæri solent. Nullas tamen addit demonstrationes. Aliter JOANNES DUSER, Tigurinus, in *Geometria Theorica & practica* patrio idiomate *Tiguri* 1627, in 4. publi-

publicata theoriam cum praxi conjungit, & hanc ex illa deducit. Multa docet, quæ istiusmodi autores non tangunt: de stereometria tamen nihil habet.

§. 35. A. SHARPE, Anglus, idiomate patrio edidit *Geometriam promotam* 1°. per tabulam amplam & accuratam segmentorum circulorum, & 2°. per Tractatum concisum de Polyhedris *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 17, Tabb. æn. 4). Tractatus primus sine controversia ad Geometriam practicam spectat, cum computandis segmentis circulorum destinetur, qui calculus ad Geometriam practicam pertinet ac multiplicem in variis problematis huc spectantibus habet usum. Tractatus alter ad stereometriam refertur, cumque Autor in eodem constructionem & dimensionem quinque corporum regularium ac præterea duodecim novorum a Geometris hactenus non expensorum polyhedrorum tradat; hic quoque Tractatus Geometriæ practicæ quædam pars est.

§. 36. BATTY LANGLEY *Londini* 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. æn. 40), Geometriam practicam ad Architecturam civilem, & hortensem, Geodæsiam, & Stereometriam applicatam edidit sermone patrio. Titulus libri est: *Practical Geometry applied to the useful Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration.* Sed hic liber potiore jure inter Architectonicos locum meretur, quam inter eos, qui de Geometria conscripti sunt, quemadmodum suo loco monebimus.

§. 37. Pithometriam promovere aggressus est JOANNES MATTHIAS HASIUS, Mathematum Professor in Academia Wittebergensi, in *Pithometriæ Theoria & Praxi nova*, *Wittebergæ* 1728, in 4. (plag. 10, Tabb. æn. 2): ubi etiam Algebræ in hoc argumento usum declarat.

§. 38. ERASMUS REINHOLDUS in Geodæsia sua, quæ sub Titulo: *Gründlicher Bericht vom Feldmessen*, *Franc.* 1615, in 4. (1 Alph. 17 plag.) recusa, Geometriam quoque subterraneam explicat: de qua opus peculiare conscripsit NICOLAUS VOIGTEL, decimarum e Mansfeldensibus metallifodinis Receptor, *Islebiæ* An. 1688, in fol. (plag. 32, Tab. 9) excusum & itidem An. 1713, auctius (2 Alph. 10 plag. Tab. æn. 10) recusum, unicum sane in hoc genere, donec An. 1710, LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS *Francofurti* An. 1710, in 8. Tractatus quatuor idiomate Germanico ederet, inter quos quartus est *Geometriæ subterraneæ Compendium*, primus vero de *descriptione corporum regularium*, secundus de *Circino proportionum*, tertius de *Trigonometria plana* (plag. 6, Tab. æn.), & An. 1727. JOANNES FRIDERICUS WEIDLERUS, Professor Mathematum Wittebergensis, *Institutiones Geometriæ subterraneæ* latinas daret *Wittebergæ* in 4. (plag. 10, Tab. 1).

§. 39. Circinum proportionis a

JUSTO BYRGIO multo ante inventum descripsit LEVINUS HULSIUS Tractatu tertio instrumentorum mechanicorum vernaculo idiomate *Francof. ad Mœnum* An. 1603, edito (plag. 4). Postea An. 1607, GALILÆUS, alienum inventum sibi attribuens, de eodem librum Italicum sub titulo: *Le Operationi del compasso Geometrico e militari* publicavit. Omnium maxime commendari in hoc genere meretur NICOLAI GOLDMANNI de *Circino proportionis Tractatus* (*Lugd. Batav.* 1679, Latine & Germanice in fol. (1 Alph. Tabb. 16) editus, ex quo sua descripsit MICHAEL SCHEFFELT in tractatu Germanico *Unterricht von dem Proportional-Circul*, *Ulmæ* 1697, in 4. (plag. 18, Tab. 12). Prostat quoque Tractatus Gallicus Cl. OZANAMI de *usu circini proportionum* (*Parisiis* 1688, in 8). Recentius ejus constructionem & usum in peculiari Tractatu, qui multa singularia continet, exposuit SAMUEL CUNE. Eum post mortem Autoris EDMUNDUS STONE sub Titulo: *A new Treatise of construction and use of the Sector*, *Londini* An. 1729, in 8. (plag. 15, Tab. æn. 2, & Fig. multis ligno incisis) publici juris fecit.

§. 40. Ad scripta de Geometria practica referendum quoque est CASPARIS SCHOTTI *Pantometrum Kircherianum*, hoc est, instrumentum Geometricum novum ab ATHANASIO KIRCHERO inventum, decem libris universam pæne practicam Geometriam complectentibus explicatum perspicuisque demonstrationibus illustratum. Prodiit *Herbipoli* 1660, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. æn. 32). Liber primus technicus fabricam instrumenti, secundus euthymetricus linearum rectarum dimensiones, tertius enbadometricus dimensionem superficierum, quartus stereometricus dimensiones solidorum, sextus cœlometricus dimensiones concavorum, septimus geodæticus divisiones superficierum, octavus metamorphoticus planorum corporumque transformationem, nonus hydragogicus libellationem aquarum totamque libellationis naturam, decimus tandem varius problematum variorum solutionem docet, quæ ope circini proportionum alias solvi solent.

CAPUT IV.

De Scriptis Analyticis.

§. 1. SCripta veterum analytica recenset PAPPUS in præfatione ad librum septimum *Collectionis mathematicæ*. Sunt nempe *Datorum* EU-

CLIDIS liber unus (*§.* 1. C. 1.) APOLLONII de *Sectione Rationis* libri duo ab HALLEIO editi, & de *Sectione spatii* libri duo ab eodem restituti (*§.* 28. c. 3), APOLLONII de *Tactionibus* libri duo, de *Inclinationibus* duo, de *locis planis* duo, *Conicorum* octo, EUCLIDIS *Porismatum* tres, & de *locis ad superficiem* duo, ARISTÆI de *locis solidis* quinque, ERATOSTHENIS de *mediis proportionalibus* duo: quorum aliqui extant (§. 13, Cap. 3), aliqui desiderantur, sed a recentioribus Geometris restituti, (§. 1, Cap. 1, & §. 13, Cap. 3). Sed Analysis veterum ab Analysi recentiorum longe fuit diversa.

§. 2. Ad analysin recentiorum potissimum spectat Algebra, de qua olim exempla tredecim libris comprehensa dedit DIOPHANTUS. Hodie nonnisi 6 prostant, a XYLANDRO latine versi, & An. 1575, in fol. primum editi, postea cum Commentariis CASPARIS BACHETI, An. 1621, recusi. Illustrat autem DIOPHANTUS artem solvendi problemata arithmetica indeterminata. Gallica eorum versio extat inter Opera STEVINI (§. 23, c. 1).

§. 3. Antequam DIOPHANTUS in publicum prostaret, LUCAS PACIOLUS seu (ut vulgo vocatur) LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI in Summa Arithmeticæ & Geometriæ supra laudata (*§.* 6, cap. 2,) Libris 8 Algebram explicat, prout eam acceperat ab Arabibus. Nimirum ultra æquationes simplices & quadraticas non progreditur. Nec longius progressi CHRISTOPHORUS RUDOLPHUS Jarovienſis Silesius, qui primus de Algebra seu Cossa, prout tunc dicebatur, in lingua Germanica scripsit & cujus librum additis regularum demonstrationibus & exemplis pluribus recudi fecit MICHAEL STIFELIUS *Regiomonti* An. 1553, in 4. (Alph. 5, plag. 11). Titulus libri: *Die Coss CHRISTOFFS RUDOLFFS, mit schönen Exempeln der Coss durch MICHAEL STIFEL gebessert und sehr gemehrt.* STIFELIUS, qui hoc Magistro profecit, in *Arithmetica integra* (§. 7, cap. 2), HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta* (§. 10, cap. cit.) aliique. Non ineleganter RUDOLPHUS, eumque secutus STIFELIUS, æquationes algebraicas ex progressionibus geometricis derivant. Sed SCIPIO FERREUS addidit regulas resolvendi æquationes cubicas, a CARDANO in *Arte Magna*, quam vulgo Cossam seu Regulam Algebræ vocant, An. 1545, primum publicatas: Cl. LUDOVICUS FERRARIENSIS ostendit methodum reducendi æquationes biquadraticas, quam An. 1579 Algebræ suæ inseruit RAPHAEL BOMBELLI. Ulteriores progressus Algebra stricte sic dicta nondum vidit.

§. 4. Circa annum Christi 1590, FRANCISCUS VIETA Gallus Arithmeticam litteralem invenit, & ad Algebram applicavit, quam & methodo ingeniosa extrahendi radices ex æquationi-

tionibus quibuscunque per approximationem locupletavit. (§. 25, cap. 1). Ejus inventa explicat, iisdemque utitur GUILIELMUS OUGHTRED, Anglus, in *Clave Mathematica*, An. 1631, primum, sed An, 1693, *Oxonii* quinta vice edita (plag. 12). Regulas ad exempla applicat & usum Arithmeticæ litteralis in Geometria elementari ostendit, quem in inveniendis theorematis & resolvendis problematis habet. Extractionem quoque radicum per approximationem ex æquationibus exemplo VIETÆ docet.

§. 5. THOMAS HARRIOT, itidem Anglus, qui *Londini* An. 1621 obiit, in *Artis Analyticæ Praxi* ad æquationes algebraicas nova, expedita & generali methodo resolvendas, a WALTHERO WARNERO An. 1631, in fol. *Londini* (2 Alph. 2 plag.) edita, Arithmeticam *Vietæam* ad commodiorem formam reduxit, eam nempe, qua nunc utimur, & æquationum indolem ac reductionem plenius explicavit.

§. 6. Anno 1637, CARTESIUS *Geometriam*, quam vocat, idiomate gallico publicavit, quam postea Latine vertit & prolixis Commentariis auxit FRANCIS. A SCHOOTEN. Utor ego editione *Amstelodamensi* An. 1659, in 4. (5 Alph. 8 plag.). Continentur in eadem præter CARTESII Geometriam (plag. 12), FLORIMUNDI DE BEAUNE Notæ breves & FRANCISCI A SCHOOTEN Commentarii in eandem; JOH. HUDDENII *epistola de reductione æquationum*, ejusdem *epistola de maximis & minimis*: ERASMI BARTHOLINI *Principia Matheseos universalis* seu *introductio ad Geometriæ methodum* CARTESII; FLORIMUNDI DE BEAUNE tractatus posthumi *de natura & constitutione atque de limitibus æquationum*; JOH. DE WITT libri duo *de Elementis Curvarum*, & FRANC. A SCHOOTEN tractatus *de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. CARTESIUS Arithmeticam litteralem & regulas Algebræ descripsit ex HARRIOTO, & quemadmodum OUGHTREDUS in Clave, atque MARINUS GHETALDUS in Libris 5, *de Resolutione & Compositione mathematica* (*Romæ* 1630, in fol. 2 Alph. 15 plag.) Arithmeticam *Vietæam* ad Geometriam elementarem applicarunt & constructiones æquationum simplicium ac quadraticarum dederunt, ita ipse, *Harriotæam* ad Geometriam sublimiorem transferens, curvarum naturam per æquationes algebraicas explicare cœpit & constructionem cubicarum atque biquadraticarum æquationum, immo etiam superiorum, docuit. Opus hoc inprimis utile ad Algebram speciosam addiscendam.

§. 7. CARTESIUS non tyronibus, sed Geometris peritis scripsit, nimis concisa brevitate, ut adeo Commentario maxime opus sit. Quamvis vero de ejus Geometria egregie meritus sit FRANCISCUS A SCHOOTEN, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ

quæ modo diximus (§. *6*); nondum tamen ea dedit, quæ in Commentario consummato quæruntur, sed ipse potius Commentatore haud raro opus habet. Dedit tandem istiusmodi Commentarium, qualis desiderari poterat CLAUDIUS RABUEL, e Societate Jesu, qui post fata ejus *Lugduni Gallorum* sub titulo: *Commentaires sur la Geometrie de Mr. Descartes* An. 1730, in 4. reg. prodiit (Alph. *3*, plag. *6*, Tabb. æn. 23.) Textum CARTESII, quem presso pede sequitur, ita explanat, atque ita regulis, exemplis, & problematis illustrat, ut nihil occurrat, quod ex Commentario non plene intelligatur. Commentarius hic in linguam Latinam transferri & in nova editione Geometriæ CARTESII Commentatoribus aliis adjungi mereretur: sit ita quod solus sufficiat menti tanti Geometræ penitus intelligendæ.

§. 8. Regulam CARTESII construendi æquationes cubicas & biquadraticas uberius exposuit THOMAS BAKER in *Clave geometrica catholica* (*Londini* 1684, in 4. (1 Alph. 10 plag. 10 Tab. æn.): ast verum harum Constructionum fundamentum, quod a MENECHMO didicit CARTESIUS, minime assecutus. Hoc monstravit RENATUS SLUSIUS Tomo secundo *Mesolabi* An. 1668, in 4. (plag. 24) *Leodii* excusi cum variis Miscellaneis, in quibus Algebra ad quadraturas Curvarum, ad quæstiones de maximis & minimis, ad methodum inveniendi punctum flexus contrarii, ad methodum centrobarycam GULDINI &c. applicatur. Cartesiana inventa etiam promoverunt, quemadmodum SLUSIUS in *Miscellaneis*, FERMATIUS in *Operibus mathematicis* (*Tolosæ* 1679, in fol.), ROBERVALLIUS (§. 31, 37, Cap. 1), & BARROWIUS (*§.* 19, Cap. 3).

§. *9*. JOHANNES KERSEY, An. 1671, *Londini* in fol. edidit *Elementa Algebræ*, idiomate Anglico (Alph. 10, plag. 10). In iis explicatur arithmetica litteralis & æquationum natura, præceptaque exemplis plurimis illustrantur, totus DIOPHANTUS enucleatur, & resolutione & compositione mathematica ex GETHALDO multa exhibentur. Idem fere institutum apud Gallos fuit JOH. PRESTET, cujus *Nova Matheseos elementa* Tomo integro secundo auctiora, *Parisiis* An. 1694, in 4. (*6* Alph. 3 plag.) gallice prodierunt. In iis omnia dogmata arithmetica una cum problematibus DIOPHANTI atque VIETÆ per analysin recentiorem resolvuntur.

§. 10. Similiter OZANAM in *Elementis* Gallicis *Algebræ* (*Amstelodami* An. 1703, in 8. reg. 1 Alph. 21 plag.) præter calculum litteralem & æquationum doctrinam, artem quoque Diophanteam resolvendi problemata numerica egregie illustrat, in qua inprimis excellit hic Autor. Quanti autem fieri debeat analysis *Diophantea*, vulgo a *Cartesianis* neglecta, docuit illustris LEIBNITIUS in Actis Eruditorum

ditorum, An. 1702, pag. 219. Etsi autem Algebra OZANAMI legi mereatur ab iis, qui in Analysi *Diophantea* sese exercere voluerint; tyronibus tamen Algebræ ejus lectio commendanda non est, propterea quod nimis diffusa regularum explicatione nulla regularum applicatione, ad exempla facta, nimis diu detinet lectorem in parte prima, facitque studii hujus in ipso limine desertores, ut taceam ipsum inventorum recentiorum minime gnarum multa brevius tradere potuisse, ita ut & facilius intelligerentur, & sine tædio. Peccat etiam prolixa præceptorum explicatione PRESTETUS: Unde Compendium ejus dedit BERNHARDUS LAMY, quod sub titulo: *Elémens de Mathématique*, (*Paris.* An. 1704, in 12. reg. (1 Alph. 7 plag.) auctius recusum tyronibus ob perspicuitatem commendari meretur. Artificia tamen analyseos *Diophanteæ* non attingit.

§. 11. Hi tamen autores applicationem Algebræ ad Geometriam insuper habent: quem defectum supplent OZANAM in Tractatu Gallico *de locis Geometricis* (plag. 8, Tab. 12.) & altero *de constructione æquationum* (plag. 12, Tab. 9) Tractatui de lineis primi generis (§. 15, cap. 3) subjuncto; DE LA HIRE in gemino Tractatu ejusdem nominis & argumenti (§. cit. cap. 3) & inprimis GUISNE'E in *Applicatione Algebræ ad Geometriam* gallice *Parisiis* An. 1704, in 4. (1 Alph. 19 plag. Tab. æn. 6) edita & ad captum tyronum composita exemplisque selectis instructa, atque Illustris Marchio DE L'HOSPITAL in egregio Tractatu Analytico *de Sectionibus Conicis & earum usu*, *Paris.* 1707, in 4. reg. 2 Alph. 12½ plag. Tab. 32, Gall.) Applicatio Algebræ ad Geometriam sublimiorem ex HOSPITALIANO opere omnium optime addiscere licet iis, qui jam in Geometria & Algebra cum fructu versati & acumine pollent. Ceteris magis satisfaciet GUISNE'E, quo lecto faciliores facient in illo progressus.

§. 12. Algebræ quoque præcepta, sed sine exemplis, perspicue explicat GERARD KINCKHUYSEN in *Algebra*, sermone Batavo, *Harlemi* An. 1661, in 4. edita, (plag. 14) & idem in Fundamento Geometriæ (*Grondt der Meetkonst*). *Harlemi* An. 1684, in 4. plag. 12) Sectionum conicarum palmarias proprietates per analysin eruit; in *Geometria* vero (*Harlemi* An. 1663, in 4. plag. 22) constructiones Geometricas problematum per Algebram solutorum elegantes affert. Singula quoque ABRAHAMUS DE GRAAF in *Algebra* sua (§. 7, cap. 1) cum laude exequitur. Unde Dn. DE TSCHIRNHAUSEN ad studium Algebræ plurimum commendavit hosce autores. Celeberrimus NEWTONUS in *Arithmetica universali*, quam GUIL. WHISTON *Cantabrigiæ* An. 1707, in 8. (1 Alph.) edidit, exempla habet singularia & regulas varias a se inventas.

tas. Recuſa ſunt hæc Elementa *Londini* An. 1722, in 8. (plag. 22). In nova editione ordo problematum paulisper immutatus, WHISTONI præfatio & methodus *Hallejana* extrahendi radices ex æquationibus per approximationem omiſſæ. Prodiere etiam in *Batavia*, ut nunc facilius haberi poſſint. Utilem tyronibus operam ſumeret, qui eadem Commentario illuſtraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile aſſequi licet etiam exercitatioribus. Deſunt etiam conſtructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur ſolutiones per calculum. Monuit jam GRAVESANDIUS iſtiusmodi Commentario eſſe opus & ejus aliquod ſpecimen de inventione diviſorum dedit in *Elementis Matheſeos univerſalis*, *Lugduni Batavorum* An. 1727, in 8. editis (plag. 16, Tabb. æn. 4), quæ Algebræ principia continent.

§. 13. JOSEPHUS RAPHSON in *Analyſi æquationum univerſali*, quæ (ſi titulo credimus) ſecunda vice *Londini* An. 1702, in 4. prodiit una cum Conamine metaphyſico de Spatio reali ſeu ente infinito (plag. 20.) extractiones radicum ex æquationibus per approximationem facilitavit: ROLLIUS in Tractatu gallico *de Algebra* (*Pariſ.* 1690, in 4. plag. 12) ſubſidia non contemnenda ad radicum extractionem ſuppeditat, ſed more ſuo terminis inſuetis utitur, & haud raro nodum in ſcirpo quærit.

Tractatum quoque Gallicum *de Algebra* conſcripſit DE CROUZAS, quem *Pariſiis* An. 1726, in 8. reg. ſub titulo: *Traité de l'Algebre*, edidit (1 Alph. 8 plag.). In eo nonniſi Arithmeticam literalem & regulam Algebram propriiſſime ſic dictam explicat, quemadmodum faciunt PRESTETUS & OZANAMUS, nimium prolixus in vulgaribus, ita ut longo tempore multa patientia addiſcenda ſint, quorum uſum proſpicere non licet. Deſunt artificia recentiora, quibus calculus præſertim ſurdorum & extractio radicum mirifice fuit promota. Nec ars exercetur problematis, contra illud SENECÆ: Iter longum per præcepta, breve per exempla.

§. 14. Exemplo PASCALII in *Triangulo Arithmetico*, *Pariſiis* Anno 1654, Gallice edito, HUGENII in *Tractatu de Ludo alea*, qui ſub finem Exercitationum Geometricarum SCHOOTENII (§. 25) & Operum variorum Vol. 2 (§. 35) legitur, aliorumque, REMUNDUS DE MONMORT in *Tentamine* Gallico *Analyſeos de ludis eventus fortuiti*, *Pariſiis* An. 1708, in 4. reg. (1 Alph. 14 plag.) excuſo & ibidem 1714, auctius (2 Alph. 11 plag.) recuſo ad Sortem in ludis diverſis determinandam analyſin applicavit: qui combinationum doctrinam egregie illuſtrat & inſignia artificia analytica edocet. In altera editione leguntur literæ JOANNIS & NICOLAI BERNOULLIORUM de

hoc argumento ad Autorem datæ. Idem præstitit JACOBUS BERNOULLI in Opere posthumo *Artis Conjectandi* (*Basil.* 1713, in 4. Alph. 1, plag. 20, Tab. 1). Accessit huic operi Tractatus de seriebus infinitis, mox commendandus. Inprimis autem hoc in argumento commendari meretur ABRAHAMI DE MOIVRE opus pereruditum & multa nova continens, quod sub titulo: *The doctrine of chances, or a Method of calculating probability of Events in play*, *Londini* 1718, in 4. reg. (Alph. 1) *.

§. 15. ÆGIDIUS FRANCISCUS DE GOTTIGNES, e Societate Jesu, in *Logistica universali* (*Neap.* An. 1687, in fol. 5 Alph. 14 plag. Tab. 5) principia Algebræ labefactare aggressus est; sed nodum in scirpo quærit & per ambages eo tendit, quo recta pertingere datur. Condonandum hoc videbatur ea ætate, qua Algebræ speciosæ infantia erat: sed si nostra reperiantur, qui in dubitationem adducere volunt, quæ dudum stabilita ipsoque diuturno usu probata fuerunt, vix ferendum. Nostrum igitur non esse existimamus de iis scriptis loqui, quæ hic recenseri poterant.

§. 16. HUGO DE OMERIQUE in *Analysi Geometrica* (*Gadibus* Anno 1698, in 4.) methodo communi algebraica, quæ per æquationes procedit, aliud substituit per rationes argumentandi genus: quod tamen non adeo late patet, quam illa. Applicat illud ad problemata, per Algebram ab aliis jam soluta & parum difficultatis habentia. Non tamen usu suo caret, cum ad demonstrationes syntheticas manu ducat. Monet PEMBERTON in præfatione ad *Conspectum Philosophiæ Newtonianæ*, NEWTONUM laudasse in hoc autore, quod Analysin veterum restituere conatus fuerit.

§. 17. Methodum CAVALLERII ad calculum aptare studuit JOHANNES WALLISIUS in *Arithmetica infinitorum* An. 1655, primum edita (§. 34, cap. 1) in qua, per summationes serierum infinitarum, quadraturas curvarum & cubationes solidorum determinare agressus est: Sed cum inductione uteretur, quæ minus demonstrativa videri poterat, ISM. BULLIALDUS per maximas ambages more veterum Geometrarum hoc Arithmeticæ genus demonstravit in Opere novo *Arithmeticam infinitorum* Libris 6, comprehendente. (*Paris.* An. 1682, in fol. 4 Alph. 16 plag.). Hodie tamen paucis lineis plura præstare licet, quam quæ integro opere BULLIALDI comprehenduntur.

§. 18. Veram viam ingressus non est WALLISIUS, felicius id præstitit Illustris LEIBNITIUS invento calculo differentiali & integrali, quem primum in Actis Eruditorum Anno 1684, pag. 467, publicavit, cum dudum ante An. 1677, eundem in litteris cum celeberrimo NEWTONO com-

* Atque iterum auctius, ibidem An. 1738, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 11).

communicaſſet, qui in egregias methodos circa idem tempus inciderat: quemadmodum apparet ex litteris LEIBNITII atque NEWTONI, quæ leguntur apud WALLISIUM Operum Tomo tertio, fol. 634, 648. Cum enim NEWTONUS in literis d. 24 Octobr. 1676, ſcriberet: *Inverſa de Tangentibus problemata ſunt in poteſtate atque illis difficiliora: ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque viſum eſt in præſentia litteris transpoſitis conſignare*: 5accdæ10effh &c. Literæ in ordinem ſuum diſpoſitæ hunc habent ſenſum: *Una methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in aſſumtione ſeriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis ad inveniendos terminos aſſumtæ Seriei*: mox LEIBNITIUS ipſum Calculum ſuum differentialem in literis d. 21 Jun. 1677, apertis verbis perſcripſit. Ingenue hoc ipſum fatetur NEWTONUS in prima & ſecunda editione Principiorum Philoſophiæ naturalis Mathematicorum Schol. Lemmat. 2, Lib. 2, pag. 253, 254. In ultima vero ingenuam confeſſionem, quæ viros ſummos maxime decet, omiſit. Ratio patebit inferius. LEIBNITIUS calculum ſuum publici juris fecit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 467, & NEWTONUS methodum ſuam in prima editione Principiorum modo laudatorum, quæ An. 1687, prodiit. Poſtea JACOBI ac inprimis JOANNIS BERNOULLI opera, calculus LEIBNITII ad majorem perfectionem perductus.

§. 19. Calculi differentialis leges expoſuit & problematibus exquiſitis illuſtravit illuſtris Marchio DE L'HOSPITAL, Præceptore uſus JOANNE BERNOULLI, in egregio Opere Gallico *Analyſeos infinite parvorum* (*Pariſ.* 1696, in 4. reg. 1, Alph. 2, plag. Tab. 11), omnibus Geometriæ ſublimioris Studioſis maximopere commendando. Subinde tamen Commentatore opus habet, ut a tyronibus Geometriæ ſublimioris intelligatur. Equidem DE CROUZAS *Commentarium* edidit, qui idiomate Gallico *Pariſiis* An. 1721, in 4. (2 Alph. 1½ plag. 4 Tab.); ſed plerumque nonniſi calculos, quos Autor contraxit, extendit, in difficilioribus vero lectorem deſtituit. Unde magis ſatisfaciet VARIGNONIUS in ſuis dilucidationibus, quæ ſub titulo: *Eclairciſſemens ſur l'Analyſe des infiniment petits*, poſt fata ipſius *Pariſiis* An. 1725, in 4, (plag. 16, Tabb. 6) prodierunt. Opus egregium HOSPITALII Anglice vertit & altera parte de calculo integrali auxit E. STONE, ac ſub titulo: *A Method of fluxions both direct and inverſe*, *Londini* 1730, in 8. reg. (1 Alph. 6 plag. Tabb. 15) edidit.

§. 20. Equidem HOSPITALIUS addere conſtituerat partem alteram de calculo integrali; ſed cum LEIB-

NITIUS Scientiam infiniti dare sibi proposuisset, a proposito suo destitit. Enimvero præter specimina in Actis Eruditorum An. 1702, & An. 1703, nihil ejus publice comparuit. Interea calculi integralis faciliores regulas dare & exemplis illustrare consultum existimabat CARRE', cujus scriptum gallicum: *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion & d'oscillation par l'application du calcul integral* prodiit *Paris.* An. 1700, in 4. reg. (plag. 15, Tabb. 4). Sed longius progressus GABRIEL MANFREDIUS in Opere eximio *de constructione æquationum differentialium primi gradus* (*Bononiæ* An. 1707, in 4. 1 Alph. 2 plag. Tabb. 7) & vir summus NEWTONUS in Tractatu *de quadraturis Curvarum*, qui Opticæ subjungitur, præclara dedit. Plura quoque in parte altera dedit STONE de hoc calculo, quam quæ in Methodo Dn. CARRE' leguntur.

§. 21. Postquam NICOLAUS MERCATOR, Holsatus, in *Logarithmotechnia* (*Lond.* 1668, in 4. cum MICHAELIS ANGELI RICCII *Exercitatione Geometrica* edita) prop. 17, pag. 31, seqq. quadraturam hyperbolæ per seriem infinitam dedisset; serierum doctrinam per extractionem radicum insigniter promovit & ad curvarum quadraturas & rectificationes applicavit vir summus ISAACUS NEWTONUS: cujus *Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias*, cum *Enumeratione linearum tertii ordinis*, varios tractatus analyticos a Viro celeberrimo diu ante compositos continentem, *Londini* 1711, in 4. (plag. 16, Tabb. 2) edidit GUIL. JONES. Quemadmodum vero hoc opus ad serierum doctrinam perdiscendam multum commendari meretur; ita recondita de hoc argumento superaddi debent ex celeberrimi JAC. BERNOULLI dissertationibus *de seriebus infinitis* (§. 14).

§. 22. Serierum doctrinam ex inventis MERCATORIS, NEWTONI, LEIBNITII atque JOHANNIS BERNOULLI exhibuit quoque GEORGIUS CHEYNÆUS in *Methodo Fluxionum inversa* (*Londini* 1703, in 4. reg. plag. 6). Multo vero ante methodum serierum MERCATORIS & NEWTONI multis exemplis illustravit DAVID GREGORIUS in *Exercitatione Geometrica de dimensione figurarum, Edinburgi* An. 1684, in 4. edita (plag. 7, Tabb. 1). Horum exempla complura computata sunt a patruo ipsius JACOBO GREGORIO, quemadmodum ipse fatetur pag. 2, 3, & 4. De Geometria enim sublimiore optime meritus JACOBUS GREGORIUS, quemadmodum ex ejus Libro *de vera Circuli & Hyperlolæ Quadratura*, cum *Geometriæ parte universali*, quantitatum curvarum transmutationi inserviente colligitur. Prodiit *Patavia* 1668, in 4. Tractatus de Quadratura constans plag. 8, Appendix de Geometriæ parte universali plag. 19. Ceterum

terum hinc perſpicere licet, quid ab eo expectandum fuiſſet, niſi fata propoſitum ejus intervertiſſent.

§. 23. JOAN. CRAIGE, Scotus, 1685, *Londini* in 4. (plag. 6, Tab. I) edidit Tractatum *de Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum Quadraturas determinandi*, & An. 1693. addidit Tractatum *de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis*, *Londini* in 4. (plag. 11, Tab. I) excuſum. Utitur equidem calculo differentiali LEIBNITII, cum in Anglia calculus fluxionum adhuc ignoraretur, nec editis An. 1687, Principiis Philoſophiæ naruralis mathematicis NEWTONI, ullus Geometra de eodem cogitaret; per ambages tamen adhuc incedit, quod calculus integralis ſeu ſummatorius nondum ipſi eſſet perſpectus. In quadrandis igitur curvis utitur Theorematis BARROWIANIS, quibus opus non habemus, ſi calculi differentialis vis fuerit perſpecta, cujus pars quædam eſt ſummatorius ſeu integralis, qui dicitur. Inde eſt, quod etiam GREGORIUS alia via incedat, etſi ſeriebus infinitis utatur. De Locis Geometricis formulas generales tradit CRAIGIUS, quas HOSPITALIUS in opere analytico de ſectionibus conicis (§. 10) uberius explicavit & illuſtravit, & nos in Elementis Algebræ dilucidatas ad facillimam intelligentiam reduximus, via ad ulteriora planiſſima ſtrata. Enimvero ubi calculus integralis, quem Angli methodum fluxionum inverſam vocant, in Anglia quoque invaluiſſet; idem CRAIGIUS *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 12½). Libros duos *de Calculo fluentium* & totidem *de Optica analytica* edidit, quorum iſtis doctrinam de Quadraturis Curvarum promovet.

§. 24. Quæ apud HOSPITALIUM in Analyſi infinite parvorum, CARRESIUM, ſive Quadratum, CHEYNÆUM, GREGORIUM & CRAIGIUM in Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum Quadraturas determinandi & in Tractatu de Quadraturis figurarum Curvilinearum occurrunt; ea in unum volumen congeſſit & perſpicue explicavit, varia etiam problemata, quorum ſolutiones in Actis Eruditorum Lipſienſibus extant, inprimis quæ in iiſdem LEIBNITIUS de motuum cœleſtium cauſis phyſicis dedit, illuſtravit CAROLUS HAYES in opere Anglico, quod ſub titulo: *Traitiſe of Fluxions, or introduction to mathematical and mechanical Philoſophy*, *Londini* An. 1704. in fol. (3 Alph. 3 plag.) prodiit.

§. 25. Regulas Algebræ communis atque Analyſeos LEIBNITIANÆ, hoc eſt, calculi differentialis & ſummatorii, uno opere complexus eſt CAROLUS REYNAU, quod ſub titulo: *Analyſe demontrée*, *Pariſ.* 1708, in 4. reg. (Alph. 5, plag. 7, Tabb. æn. 5): ſed in exemplis parcior videri poterat, quam ut tyronibus inſervire poſſit, provectioribus tamen commendandus. Neque etiam ea præſtitiſſe vide-

videtur, quæ titulus promittit, cum eas demonstrationes in hoc Opere non reperias, quæ forsan in eodem quæsiveris, demonstrationis notionem distinctam animo complexus.

§. 26. Calculus fluxionum, qui cum differentiali & summatorio idem est, in Anglia primum comparuit, cum ISAACUS NEWTONUS Opticam suam ederet An. 1704, de qua suo loco dicemus. Addidit enim præter *Enumerationem Linearum tertii Ordinis seu curvarum secundi generis* Tractatum *de Quadratura curvarum*, in quo hanc doctrinam plurimum promovit, & calculum hunc explicat eademque utitur. Ex intervallo GUILIELMUS JONES *Londini* An. 1711, in 4. plag. 16, Tab. 2, edidit NEWTONI *Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias* cum *Enumeratione linearum tertii ordinis*, ex quo apparet, quid NEWTONUS in Geometria sublimiori per analysin promota præstiterit, & quantum serierum doctrinam promoverit. Cum vero in tractatu de Enumeratione linearum tertii ordinis demonstrationes desiderarentur; hunc defectum supplevit JACOBUS STIRLING in Illustratione Tractatus D. NEWTONI *de Enumeratione linearum tertii Ordinis*, quæ *Oxoniæ* An. 1717, in 8. (plag. $9\frac{1}{2}$) lucem adspexit & multa præclara continet.

§. 27. Haud ita pridem, nimirum An. 1736, JOHANNES COLSON Methodum fluxionum & infinitarum serierum NEWTONI in sermonem Anglicum translatam edidit *Londini* in 4. sub titulo: *The Method of fluxions and infinite series, With its application to the Geometry of curve-lines.* (Alph. 2) *. Tractatus hic idem est, quem publico An. 1728, in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtonianæ* promiserat PEMBERTON. Egregio Commentario librum hunc illustravit Editor, qui maximam operis partem complet & multa offert, quæ Analyseos cultores alibi frustra quærunt. Ipse NEWTONUS docet, quomodo æquationes in series infinitas resolvantur, quomodo fluentium fluxiones seu quantitatum variabilium differentialia & ex fluxionibus fluentes seu differentialium summæ inveniantur, & per methodum fluxionum maxima & minima, tangentes, quadraturæ & rectificationes curvarum determinentur. Ubi simul ostenditur, quomodo curvæ quadrabiles detegantur, curvæ cum sectionibus conicis comparabiles investigentur, curvæ rectificabiles inveniantur & quæ sunt alia hujus generis.

§. 28. Anno 1730, JACOBUS STIRLING *Londini* in 4. charta augusta (Alph. 1, plag. 15) edidit *Methodum differentialem* sive Tractatum *de Summatione & interpolatione serierum infinitarum.* In eo potissimum docet,

* Eundem NEWTONI Tractatum Gallice versum dedit nuperrime Celeb. DE BUFFON. *Paris* in 4. (Alph. 1) cum eleganti Præfatione.

docet, quibus artificiis assequamur valores illarum serierum, quæ summari nequeunt, ut habeatur solutio illorum problematum, quæ ex quadraturis pendent. Non modo inventa aliorum exponit, verum etiam propriis hanc doctrinam plurimum promovit, ut adeo opus insigne sublimioris Matheseos studiosis summopere sit commendandum.

§. 29. Commendanda hic quoque sunt ABRAHAMI DE MOIVRE *Miscellanea analytica de seriebus & quadraturis*, quæ eodem Anno *Londini* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 9) prodiere. Accessere variæ considerationes de Methodis comparationum, combinationum & differentiarum, solutiones difficiliorum aliquot problematum ad sortem spectantium, itemque constructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum, quæ in motibus corporum cœlestium occurrunt. Multa in hisce Miscellaneis occurrunt, quibus non modo serierum doctrina, verum etiam mensura sortis & alia ad Mathesin sublimiorem spectantia capita promoventur.

§. 30. Quæ NEWTONUS in Tractatu de Quadraturis curvarum dederat, alia methodo investigare docuit ROGERUS COTESIUS, Professor Astronomiæ & Experimentalis Philosophiæ apud Cantabrigienses, in *Harmonia Mensurarum, sive Analysi & Synthesi per rationum & angulorum mensuras promota*, quam cum aliis ejusdem opusculis mathematicis ejus successor ROBERTUS SMITH *Cantabrigiæ* An. 1722, in 4. (plag. 50, Tab. I) post mortem ejus præmaturam edidit. Potissimum ipsi propositam est dare *Logometriam*, quam vocat, qua scilicet per Logarithmos, sinus, atque tangentes investigantur, quæ hactenus ad Quadraturam circuli & hyperbolæ fuerunt reducta, differentialium summatione ad mensuras rationum & angulorum reducta. In operibus miscellaneis *Æstimatio errorum in mixta Mathesi* per variationes partium Trianguli plani & sphærici, qualia theoremata dedimus in Trigonometria plana, Tractatus *de Methodo differentiali Nevvtoniana*, quem multo ante ab eo conscriptum dicit Autor, quam a JONESIO, NEWTONI de eodem argumento Tractatus in Analysi superius commendata (§. 2) ederetur, *Canonotechnia* sive constructio Tabularum per differentias, & Tractatus *de Descensu gravium, de motu pendulorum in Cycloide & de Motu projectorum.* Quomodo inventa *Cotesiana* ex *Nevvtonianis* deducantur, docet Anonymus * in *Epistola ad Amicum de* COTESII *inventis*, *Londini*, eodem adhuc Anno in 4. edita (plag. 13).

§. 31. LEIBNITIUS calculum differentialem & summatorium primum exercuerat in quantitatibus finitis, veluti in summandis potentiis numerorum, & deinde lecto opere *Hugeniano* de horologia oscillatorio & ope-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V. G re

* Dr. HENRICUS PEMBERTON.

re Conico GREGORII A S. VINCENTIO ad quantitates infinite parvas applicavit, atque ſic via vere analytica in calculum differentialem & ſummatorium ſeu integralem incidit, quali hodie in Geometria ſublimiori utimur. In Anglia eundem calculum, ſeu methodum fluxionum ſtylo Anglicano, ad quantitates finitas applicavit BROOK TAYLOR in *Methodo incrementorum directa & inverſa*, quæ *Londini* 1715, in 4. (plag. 15½) prodiit. De obſcuritate, qua in ſcribendo uſus Autor, publice conqueſtus eſt JOANNES BERNOULLI, ut adeo mirari deſinant lectores in ſublimioribus nondum ſatis verſati, ſiquidem hinc inde hæſitent. Continentur tamen in hoc opere lectu digna.

§. 32. Integram Matheſin puram, una cum Algebra & calculo differentiali, ſuccincte explicavit WILHELMUS JONES in *Synopſi palmariorum Matheſeos*, Anglice An. 1706, *Londini* in 8. (plag. 20) edita; ſed ſine interprete a tyronibus vix intelliguntur, qui tamen hoc duce commode utuntur in repetendis iis, quæ ex aliis Autoribus didicere. In iis, quæ ad Algebram communem ſpectant, cum hac Synopſi convenit Tractatus *de Algebra* itidem Anglice ſcriptus & *Londini* 1717, in 8. reg. editus (plag. 15) a RONAYNIO: recentior enim analyſis in eo deſideratur, & methodus Tangentium atque de maximis & minimis per methodum exhauſtionum illuſtratur.

§. 33. Equidem BERNHARDUS NIEUWENTYT in *Conſiderationibus circa Analyſeos ad quantitates infinite parvas applicatæ principia & calculi differentialis uſum in reſolvendis problematibus Geometricis* (*Amſtel.* 1694, in 8. plag. 3) & in *Conſiderationibus ſecundis circa calculi differentialis principia* (*Amſtel.* An. 1696, in 8. plag. 3) contra calculum differentialem nonnulla dubia movit, & hinc in *Analyſi Infinitorum* (*Amſtelod.* A. 1695, in 8. plag. 20, Tab. 21) methodum aliam ſubſtituit; ſed non modo LEIBNITIUS atque BERNOULLIUS in Actis Eruditorum An. 1695, p. 310, & ſeqq. it. p. 369, & ſeqq. & An. 1697, p. 125 & ſeqq., verum etiam etiam Cl. JACOBUS HERMANNUS, nunc * Mathematum Profeſſor Francofurtanus, in *Reſponſione ad illas conſiderationes ſecundas*, *Baſileæ*, Anno 1700, in 8. (plag. 4) iiſdem abunde ſatisfecerunt; quamvis memini, quod hic LEIBNITIO non ex aſſe ſatisfecerit, quod quantitates infinite parvas tanquam entia realia conſideret, cum tamen non ſint niſi modus loquendi, qui exhibet, ſtylo *Jungiano*, toleranter vera, quemadmodum clariſſime docui in Ontologia, in qua realia ab imaginariis ubivis diſcrevi. Analyſi tamen infinitorum *Nieuwentytiana* in rem ſuam uti norunt intelligentes. BERNHARDUS DE FONTENELLE,

* Anno ſcil. 1715, quo primum hæc Commentatio edita eſt. Vide infra, Cap. VI. §. 17.

TENELLE, Academiæ Regiæ Scientiarum, quæ Parisiis floret, Secretarius, idiomate patrio An. 1727, *Parisiis* in 4. reg. (Alph. 3, plag. 3, Tab. I) edidit Elementa Geometriæ infinitorum (*Elémens de la Géométrie des infinis*), in quo potissimum sibi propositum habet, ut calculos hodie receptos ex ipsa notione infiniti deducat. Considerat vero, quemadmodum omnibus fere Mathematicis solenne est, infinite magnum & infinite parvum Mathematicorum per modum entis realis. Satisfacere intendit theoria sua iis, quibus Analysis infinitorum moderna suspecta videtur, ut adeo hic loci commemorari debuerit hoc opus.

§. 34. In Actis Philosophicis Anglicanis pro mensibus Septembri & Octobri Anno 1708, editis scripserat JOHANNES KEILL, inventorem Arithmeticæ fluxionum, sine omni dubio primum esse NEWTONUM, eandem tamen postea, mutatis nomine & notationis modo, editam esse a LEIBNITIO in Actis Eruditorum. LEIBNITIUS, cui hæc Acta miserat Cl. SLOANE, tum Societatis Regalis Secretarius, in literis d. 4 Martii An. 1711 datis, de injuria sibi illata conquestus desiderabat, ut KEILLIUS publice testaretur, non fuisse sibi animum LEIBNITIO imputandi, quasi alienum inventum sibi attribuerit. Enimvero KEILLIUS in epistola ad eundem SLOANIUM data, quæ primum scripserat defendit & ostendere conatur, quomodo ex *Newtonianis* sua deduxerit. Cum candorem suum jam apertius, quam ante oppugnari existimaret LEIBNITIUS, sibique parum convenire arbitraretur, ut provectiori ætate post tot documenta vitæ eum apologia defenderet; in literis ad SLOANIUM d. 29 Decembris An. 1711 datis, æquitati Societatis committebat, annon coërcendæ sint vanæ & injustæ vociferationes, quas ipsi NEWTONO improbari putabat confisus eundem sententiæ suæ libenter daturum indicia. Jussit Societas monumenta antiquiora consuli & Sociis aliquot in mandatis dedit, ut in eam rem inquirerent & quæ in scriptis antiquis invenirent ad eam, una cum sententia sua, referrent. Hi pronunciarunt, NEWTONUM esse primum inventorem, nec KEILLIUM inventum eidem vindicantem injuriam fecisse LEIBNITIO. Jussu adeo Societatis Regiæ in lucem editum est *Londini* 1712, in 4. (plag. $15\frac{1}{2}$) *Commercium Epistolicum* D. JOHANNIS COLLINS *&* *aliorum de Analysi promota*, & per Europam inter Mathematicos distributum. Continentur in eo excerpta ex literis, quorum autographa conservat illustris Societas Regalis, una cum Epistolis NEWTONI atque LEIBNITII, quæ jam apud WALLISIUM Tomo tertio Operum leguntur, Tractatus de Analysi per æquationes numero terminorum infinitas a JONESIO editus (§. 26), episto-

læ LEIBNITII ad HANS SLOANE & KEILLII responsiones ad easdem, de quibus modo diximus, & Relatio ac sententia Commissariorum, quam modo retulimus.

§. 35. LEIBNITIUS tunc temporis Viennæ in Austria degebat, nec Commercium epistolicum ibidem videre ipsi contingebat. Cum igitur ex ipso per litteras quærerem, num idem in Actis Eruditorum recenseri & quædam ad ipsum reponi consultum judicaret; consultius ipsi videbatur, ut charta quadam volante, suppresso loci ac Autoris nomine, publico significaretur, ipsum esse Viennæ nec Commercium epistolicum vidisse, atque ex litteris JOANNIS BERNOULLI excerptum publicaretur, quo rationes continebantur, cur inventum calculi differentialis ipsi dubium reddi minime possit. Inde ansam arripiebat KEILLIUS, cum in Transactionibus Anglicanis, tum in Diario literario quod Hagæ Comitum prodibat, paulo durius de LEIBNITIO atque BERNOULLIO scribendi. Quamobrem cum LEIBNITIO limites modestiæ transgredi videretur, a se impetrare non potuit, ut ipse responderet. Scripsit tamen sententiam suam ad amicos, ad quas ejus literas NEWTONUS quoque respondit, tumque apparuit, quæ a KEILLIO dicta fuerant, consentiente & approbante NEWTONO prolata fuisse. Epistolas hasce LEIBNITII atque NEWTONI idiomate Anglico cum excerptis nonnullis aliis *Historiæ fluxionum* suæ latine conscriptæ adjecit JOSEPHUS RAPHSON, in qua originem & progressum hujus methodi brevissimo compendio exhibere intendit. Prodiit *Londini* 1715, in 4. (plag. 16). Quid sibi proposuerit Autor, ipse in præfatione monet, scilicet inventiones præcipuas in hoc genere primis suis autoribus speciatim asserere & vindicare, & inprimis D. NEWTONO inventori longe & tempore primo, & præstantia inventionum præcellentissimo, & aditum patefacere tyronibus ad hæcce facilius & explicatius, adeoque ut cuivis introductionis loco ad *Newtoniana*, *Cheynæana* aliorumque inventa & congesta in hoc genere inserviret. Si quis historiam Analyseos infinitesimalis conscribere vellet, ut origo & progressus pateret, ac unicuique quod suum est tribueretur; illi multo majore studio ac solertia inquirendum esset in ea, quæ a tempore CAVALLERII usque ad præsens a Geometris fuere edita, & accurate determinandum, quantum unusquisque ex inventis alterius sibi notis vel proficere potuerit, vel actu profecerit: ubi certa a probabilibus exacte distinguenda. Sed alibi in Logica de historia scientiarum & artium mentem nostram aperuimus & uberius explicavimus.

§. 36. Controversia hæc de inventore calculi differentialis postea magna animorum contentione agitata,

ta, præſertim inter KEILLIUM & JOANNEM BERNOULLIUM, de qua inprimis legi poſſunt Acta Eruditorum Lipſienſia. Noſtrum jam non eſt eam definire, cum diſcuſſioni hic non ſit locus, ſine qua definiri nequit, nec hoc nobis ſumimus. Neque opus eſt ex Actis laudatis huc tranſcribere, quæ ibidem legi poſſunt. Nos veneramur merita NEWTONI, veneramur merita LEIBNITII, BERNOULLII, aliorumque; æquum exiſtimamus, ut ſuum cuique tribuatur, & gloria, quæ dat vires præclara agendi, excitentur magna ingenia; in aliorum merita extollenda proni ſumus: principiis tamen Philoſophiæ moralis adverſum judicamus de laude altercari, nec ulla nos autoritas movebit, ut altercationibus iſtiuſmodi calculum adjiciamus.

§. 37. Antequam igitur recenſioni præſenti Autorum colophonem imponamus, monemus curvarum deſcriptionem plurimum promoviſſe COLINUM MAC LAURIN, Matheſeos in collegio novo Abredonenſi Profeſſorem, & GULIELMUM BRAIKENRIDGE, Eccleſiæ Anglicanæ Presbyterum. Edidit ille *Londini* An. 1720, in 4. (plag. 19, Tabb. 12) *Geometriam organicam*, ſive *Deſcriptionem Linearum curvarum univerſalem*. Docet in eadem, quomodo lineæ ſecundi, tertii, quarti tandemque ordinis cujuſcunque deſcribantur, & ubi oſtendit, quomodo lineæ omnium ordinum altiorum ope linearum ordinis cujuſcunque inferioris deſcribantur, ſimul deſcriptionem Curvarum organicam *Newtonianam* demonſtrat. Plurima hic reperies ad Geometriam ſublimiorem ſpectantia. Alter horum autorum, *Londini* 1733, in 4. in publicam lucem emiſit *Exercitationem Geometricam de Deſcriptione Linearum Curvarum* (plag. 10). Tradit primum deſcriptionem curvarum primi generis, ſeu linearum ſecundi ordinis, deinde vero deſcriptionem Linearum cujuſcunque ordinis ope Linearum ordinis inferioris & denique deſcriptionem ſectionum conicarum ope plurium rectarum circa polos moventium. Diverſa tamen ſunt ejus theoremata ab illis, quæ tradit prior, & plura hiſce etiam majora promittit in una aut altera exercitatione poſt paucos menſes edenda: Nobis tamen huc uſque, præter eam quam hic commemoramus, nullam videre licuit. Utiles ſunt deſcriptiones curvarum generales ad Theoriam Curvarum condendam, qualem adhuc deſiderari ſupra (§. 19, c. 3) monuimus. Quid enim tribuendum ſit definitionibus geneticis, vel ex *Synopſi Geometrica* HONORATI FABRY, e Societate Jeſu, intelligitur, quæ *Lugduni Gallorum* in gratiam tyronum edita An. 1669, in 12. (Alph. 1. cum figuris multis in folio excuſis), & cui acceſſere tria opuſcula, nimirum de *Linea Sinuum & Cycloide*, *de maximis & minimis centuria & Synopſis Trigonometriæ*

planæ. Absit tamen, ut cum Autoribus Anglis, quorum Tractatus hic commendavimus, æquipares BARTHOLOMÆI INTIERI, Florentini, *ad nova arcana Geometrica detegenda aditum*, qui *Beneventi* 1703, in 4. (plag. 13, Tabb. 2) & APOLLONIUM ac SERENUM *Promotum*, qui *Neapoli* 1704, in 4. (plag. 9, Tab. 1) lucem adspexit, ubi sectionum conicarum graduum superiorum genesin tradit. A tyronibus tamen ea legi non inconsultum est, antequam ad sublimiora Anglorum inventa pedem promoveant.

§. 38. Cœterum multa ad calculum differentialem & integralem spectantia peti debent ex Actis Eruditorum, ex Historia & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis *Parisiis* prodeunt & *Amstelodami* recuduntur, ex Transactionibus Anglicanis, ex Miscellaneis Berolinensibus, & Commentariis Petropolitanis, de quibus singulis supra diximus (§. 36, & seqq. cap. 1). Inter Algebraistas inprimis quoque nominari debebant JOHAN. FAULHABERUS ex textore Mathematicus insignis, cum quo per aliquod tempus egit CARTESIUS, cum Algebræ vacaret, & JUSTUS BYRGIUS WILHELMI Hassiæ Landgravii Mechanicus, sed illius scripta perpauca, hujus nulla videre hactenus licuit.

§. 39. Coronidis loco adhuc observamus, in gratiam tyronum idiomate Anglico Institutiones fluxionum edidisse HUMPHREDUM DITTON, in quibus præcepta calculi explicat & exemplis quibusdam selectis illustrat, cum istiusmodi libellus adhuc desideraretur. Post obitum Autoris novam editionem dedit JOHANNES CLARKE, Regi a sacris ordinariis, quæ sub titulo: *An Institution of fluxions*, *Londini* An. 1726, in 8. reg. (plag. 16) prodiit. In eorundem usum L. TREVIGAR *Sectionum conicarum Elementa* methodo facillima demonstrata edidit *Cantabrigiæ* An. 1731, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 1, Tabb. æn. 12). In compendium misit Tractatum analyticum de sectionibus conicis HOSPITALII, in quo methodus genetica cum analytica conjungitur, ut in Geometria & Algebra vel mediocriter versatus præcipuas sectionum conicarum proprietates addiscere possit. Addidit nonnulla, quæ in HOSPITALIO desiderantur, sed ad Principia Philosophiæ naturalis mathematica intelligenda requiruntur. In Italia vero FRANCISCUS XAVERIUS BRUNETTI, Sacrario Pontificis Maximi CLEMENTIS XII Præfectus, sub titulo: *Dell' Aritmetica commune e speciosa Trattato*, seu Tractatus de Arithmetica communi & speciosa, *Romæ* A. 1731, in 4. (Alph. 1, plag. 11, Tab. 2) Introductionem edidit ad scripta arithmetica & analytica intelligenda, in quo præter Arithmeticam, Algebram quoque & Analysin infinitesimalem recentiorem perspicue explicat, ut adeo plura in hoc opere reperiantur, quam titulus promittit.

CAPUT

CAPUT V.

De Trigonometria.

§. 1. TRigonometria in gratiam Astronomiæ primum inventa: unde PTOLEMÆUS sub initium operis sui Astronomici tantum hujus doctrinæ exponit, quantum scopo suo sufficere visum est, & recentiores Astronomi passim institutionibus Astronomicis Trigonometriæ præcepta præmiserunt.

§. 2. Magis hanc scientiam excoluit JOHANNES DE REGIO MONTE in Libris quinque *de Triangulis omnimodis*, An. 1464, conscriptis, & *Norimbergæ*, mortuo Autore, a SCHONERO An. 1533, in fol. (2 Alph. 11 plag.) editis. Idem quoque Canonem Sinuum novum condidit assumto radio pro unitate, eoque in fractiones decimales diviso, cum ante idem in 60 scrupula divideretur. Immo ipse primum radium sumebat 60 & nonnisi in fractiones decimales subdividebat: sed cum animadverteret præstare in calculo, si sinus totus sit 1, canonem suum reformavit, aut novum potius condidit. Canon Sinuum ad radium 60000 constructus subjungitur ejusdem Tabulis Directionum Profectionumque, de quibus in Astronomia dicemus. Eum in plerisque sequitur CLAVIUS (§. 24, c. 1).

§. 3. *Canonem Sinuum* ad radium 1000000000000000 & ad dena quæque scrupula secunda Quadrantis supputavit JOACHIMUS RHETICUS, quem, mortuo Autore, una cum Sinibus primi & postremi gradus ad eundem radium & ad singula secunda scrupula Quadrantis edidit BARTHOLOMÆUS PITISCUS *Francof. ad Mœnum* 1613, in fol. (3 Alph. 21 plag.), qui adjecit principia Sinuum ad radium 1000000000000000000000 supputata & sinus decimorum, tricesimorum & quinquagesimorum quorumque scrupulorum secundorum per prima & postrema 35 scrupula prima ad radium 1000000000000000000000. Hujus Canonis usus inprimis est in corrigendis Tabulis Sinuum atque Tangentium vulgaribus.

§. 4. Multum nimirum Trigonometriæ perficiendæ incubuit RHETICUS, Mathematum Professor Wittebergensis, sed qui relicta Professione ad COPERNICUM profectus & apud eum egit: quemadmodum ex *Opere Palatino de Triangulis* apparet, quod ab ipso cœptum consummavit L. VALENTINUS OTHO, Principis Palatini Friderici IV Electoris Mathe-

Mathematicus. Prodiit An. 1616, in fol. (21 Alph. 17 plag.). Continentur in eo 1. RHETICI libri tres de fabrica Canonis doctrinæ triangulorum, & 2. ejusdem liber quartus de triangulis globi: 3. OTHONIS libri quinque de triangulis globi sine angulo recto: 4. prolixus Canon triangulorum.

§. 5. PITISCUS vero & ipse *Trigonometriam* egregie illustravit editis quinque de eadem libris An. 1599, quorum editio tertia auctior prodiit *Francof.* An. 1612, in 4. (2 Alph. 15 plag.). Libris istis subjicitur Canon Sinuum, tangentium & secantium una cum libris undecim, in quibus trigonometriæ usus in solutione problematum Geodæticorum, altimetricorum, architectonicorum, geographicorum, gnomonicorum & astronomicorum ostenditur, quæ a nobis suis in locis per eandem soluta.

§. 6. Non minus commendari merentur WILLEBRORDI SNELLII *doctrinæ Triangulorum Canonicæ* libri quatuor, quibus Canonis sinuum, tangentium & secantium constructio, triangulorum tam planorum, quam sphæricorum expedita dimensio breviter ac perspicue traditur, una cum Canone Secantium. Post mortem Autoris eos edidit MARTINUS HORTENSIUS, Delfensis (*Lugd. Bat.* 1627, in 8. plag. 29) & tractatus problematum geodæticorum & sphæricorum adjecit, quibus utriusque Trigonometriæ usus edocetur.

§. 7. An. 1591, PHILIPPUS LANSBERGIUS edidit *Geometriam Triangulorum*, quæ Anno 1663, *Middelburgi in Seelandia* in fol. (plag. 11) auctius recusa & primum inter opera ejus locum tenet (§. 26, c. 1). In eo Trigonometriam tam planam, quam sphæricam, & constructionem sinuum atque tangentium perspicue explicat, quemadmodum jam fecerat GEORGIUS PURBACHIUS, Præceptor REGIOMONTANI, Professor Matheseos in Academia Viennensi, qui in promovendo Matheseos studio plurimum operæ collocavit, & de cujus meritis plura dicemus in Astronomia.

§. 8. Insignis ad Trigonometriam accessio facta est, Logarithmis a JOHANNE NEPERO, Barone Merchistonii Scoto, in eandem introductis. Prodiit *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria & omni Logistica mathematica explicatio*, *Edinburgi* 1614, in 4. (plag. 21) & opera filii, parente mortuo, recusum est opus auctius An. 1619. Accessere nempe tractatus aliqui de logarithmorum constructione posthumi. In eodem opere continetur regula generalis facilius solvendi triangulorum sphæricorum rectangulorum casus omnes, cui similem nos quoque dedimus in Elementis nostris. Cæterum logarithmi isti ab iis, quibus nunc utimur, sunt diversi: supposuit enim NEPERUS in prima eorundem constructio-

ſtructione logarithmum Sinus totius ſeu radii 0, ut multiplicationem & diviſionem in Trigonometria plerumque prorſus evitaret, nec additionem vel ſubtractionem ſubſtituere opus haberet.

§. 9. Canonem NEPERI ad ſingula minuta prima quadrantis conſtructum ad dena ſecunda extendit BENJAMIN URSINUS, Mathematicus Electoralis Brandenburgicus, & cum Canonis tam naturalis, quam artificialis conſtructionem, tum Trigonometriam utramque & quidem ſphæricam juxta NEPERUM explicavit in *Trigonometria, Coloniæ* An. 1625, in 4. edita (conſtat liber 1 Alph. 12 plag. & Canon 2 Alph. 11 plag.). Multa continet lectu digna, præſertim quoad conſtructionem Canonis & praxin Trigonometriæ ſphæricæ.

§. 10. Poſtquam KEPLERUS hoc logarithmorum genus a JUSTO BYRGIO ſupra laudato (§. 38, C. 4) inventum, ſed illo reprehendente in Rudolphinis f. 11, in privatos tantum uſus reſervatum, ad Aſtronomiam tranſtulerat; ipſius gener JACOBUS BARTSCHIUS Canonem URSINI reduxit, reſectis tribus ultimis cyphris, & particulam antilogarithmorum exactiorum ad ſingula bina ſecunda, Tabulamque logarithmorum indicis proſtaphæreſeos ſupputavit atque Heptacoſiadem *Keplerianam* ad ſingula ſcrupula ſecunda dilatavit. Has tabulas, ſub ſoceri KEPLERI auctoritate, *Sagani* edidit An. 1630, ſed ob earum uſum in calculo *Rudolphino* inſignem ſub titulo: JOH. KEPLERI & JACOBI BARTSCHII *Tabulæ Manuales Logarithmicæ* An. 1700, *Argentorati* in 8. (1 Alph. 17 plag.) recudi fecit JOHANN. CASPAR EISENSCHMID, Med. D.

§. 11. Ex conſilio NEPERI logarithmorum formam immutavit HENRICUS BRIGGIUS, Profeſſor Geometriæ Oxonienſis, ita ut logarithmus unitatis fieret 0, quemadmodum nos expoſuimus in Elementis Arithmeticæ cap. 8. Conſtruxit Canonem Logarithmorum numerorum vulgarium ab 1 uſque ad 20000 & a 90000 uſque ad 100000, quem in *Arithmetica Logarithmica* una cum methodo inveniendi logarithmos & uſu eorundem exhibuit An. 1624, in fol. Sed mox *Goudæ* An. 1628, in fol. (9 Alph. 7 plag.) eandem recudi fecit ADRIANUS VLACQ Goudanus, qui logarithmos Briggianos 4 numeris minuit, lacunam inter 20000 & 90000 explevit, ut 100 logarithmorum chiliades exhibuerit, Canonem triangulorum ſeu Tabulam ſinuum & tangentium artificialium ad radium 10000000000 & ad ſingula ſcrupula prima quadrantis adjecit, in deſcriptione vero *Briggiana* quædam hic illic immutavit, quædam omiſit, quædam adjunxit. Idem poſtea An. 1633, Canonem ſinuum atque tangentium artificialium extendit ad ſingula dena ſecunda & ſub titulo Trigonometriæ artificialis ſeu Magni

Canonis triangulorum Logarithmici, *Goudæ* in fol. (5 Alph. 3 plag.), adjectis Chiliadibus viginti Logarithmorum pro numeris naturali ſerie creſcentibus H. BRIGGII, edidit.

§. 12. Inchoaverat idem BRIGGIUS Canonem ſinuum & tangentium artificialem pro gradibus graduumque centeſimis; ſed morte præpeditus non abſolvit. Quæ adeo deficiebant, ſupplevit HENRICUS GELLIBRAND & An. 1633, ſub nomine *Trigonometriæ Britannicæ* publicavit. Prodiit *Goudæ* in fol. (3 Alph. 7 plag.)

§. 13. Sub eodem *Trigonometriæ Britannicæ* nomine, ſed Anglico idiomate opus trigonometricum præclarum edidit JOHANNES NEWTON, *Londini* 1658, in fol. (5 Alph. 19 plag.), in quo continentur 1. conſtructio & uſus Canonis ſinuum & tangentium naturalis atque artificialis, 2. ſolutio triangulorum, tam planorum, quam ſphæricorum, 3. chiliades centum logarithmorum pro numeris vulgaribus, 4. Canon logarithmorum pro ſinibus & tangentibus ad ſingulos gradus & partes graduum centeſimas, 5. Canon logarithmorum pro ſinibus & tangentibus ad tres primos Quadrantis gradus & partes graduum milleſimas.

§. 14. Fundamentum Logarithmorum breviter quidem, attamen perſpicue expoſuit STIFELIUS in Arithmetica integra (§. 7. C. 1.) Lib. 3, f. 249, b & ſeqq. monens poſſe hic fere novum librum integrum ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportere, ut ſe hic ſubducat & clauſis oculis abeat. Utilitatem fractionum decimalium ad exprimendos numeros prope veros, qui in calculo excludant errorem quantumlibet exiguum, adeoque contemnendum, dudum ante monſtravit REGIOMONTANUS. Hiſce igitur luminibus uſi ſunt BYRGIUS atque NEPERUS in Logarithmis computandis. Recentiores vero alias invenere methodos, de quibus in Algebra agitur. Illa tamen, qua uſi ſunt Canonis conditores, ad captum tyronum compoſita, adeoque a nobis in Arithmetica retenta.

§. 15. An. 1643, *Bononiæ* in 4. (1 Alph. 1 plag.) BONAVENTURÆ CAVALLERII *Trigonometria plana & ſphærica, linearis & logarithmica*, cum canone duplici Trigonometrico & chiliade numerorum abſolutorum ab 1 uſque ad 10000, eorumque logarithmis ac differentiis, opus Autore ſuo dignum, prodiit. Eodem uſus eſt GEMINIANUS RONDELLI, Mathem. Profeſſor Bononienſis, qui An. 1705, *Bononiæ* in 4. (2 Alph. 12 plag.) *Trigonometriam univerſalem linearem & logarithmicam*, Italico idiomate edidit, cum Canone ſinuum, tangentium & ſecantium, atque logarithmorum ſinuum & tangentium & decem chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 16. SETHI WARDI *Idea Trigono-*

gonometriæ demonstratæ, quæ cum Prælectione *de Cometis* & *Inquisitione in* BULLIALDI *Astronomiæ Philolaicæ fundamentum*, *Oxonii* An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, est admodum concisa & characteribus expressa. Ejusdem vero indolis est *Trigonometria* WILHELMI OUGHTREDI, quæ cum Canone sinuum, tangentium & secantium *Londini* 1657, in 4. lucem adspexit (1 Alph. 13 plag.). In eundem quoque censum veniunt JOANNIS WILSON *Principia Trigonometriæ succincte demonstrata*, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1718, in 8. (plag. 5, Tab. 2) prodiere.

§. 17. RICHARDUS NORWOOD in *Trigonometria*, quæ Anglico sermone *Lond.* 1651, in 4. recusa, (2 Alph. 3 plag.) præter Trigonometriam planam & sphæricam, logarithmorum doctrinam explicat, & omnia Trigonometriæ sphæricæ problemata per duo axiomata fundamentalia NEPERI solvit. Adjiciuntur Canones sinuum & tangentium naturalium atque artificialium, cum 10 chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 18. WILHELMUS HAWNEY An. 1725, *Londini* in 8. reg. (Alph. 1, plag. 8) Trigonometriam planam & sphæricam omnem explicatam dedit & ejus usum in Navigatione, Astronomia, Geographia, Architectura militari, Geodæsia & Euthymetria, atque Gnomonica prolixe commonstravit in libro sermone Anglico edito sub titulo: *The Doctrine of plain and spherical Trigonometry.*

§. 19. *Compendium Trigonometriæ planæ & sphæricæ* non contemnendum, *Leodii* 1704, in 8. (12½ plag.) edidit JACOBUS GOODEN, e Societate Jesu, in quo regulæ accurate demonstrantur & exemplis utilibus ex Geodæsia, Astronomia & Geographia petitis illustrantur. Adjiciuntur palmaria ex EUCLIDE theoremata, cum Canonibus sinuum, tangentium & logarithmorum contractis.

§. 20. In cursibus Trigonometriam bene explicant DECHALES atque OZANAM (§. 4. 7. c. 1). Præterea in multis aliis libris, qui de Astronomia & Navigatione conscripti sunt, Trigonometria tam plana, quam sphærica explicatur. Sed de eo dicemus suo loco, quando illorum mentionem facturi sumus.

§. 21. *Tabulæ Sinuum & Tangentium itemque Logarithmorum* separatim editæ commendantur VLACCI, quæ *Hagæ Comitum* An. 1665, prodierunt, & OZANAMI, quæ juxta eas correctæ. Quid nos in nostris præstiterimus, quæ *Halæ* 1711 (plag. 20) prodierunt, & 1728, recusæ ex præfatione iisdem præfixa intelligi potest.

§. 22. Analysis speciosa Trigonometriæ sphæricæ, primo mobili, Triangulis rectilineis & Progressioni Arithmeticæ & Geometricæ aliisque variis Problematis applicata a R. P. JACOBO KRESA, e Societate Je-

ſu, quæ *Pragæ* prodiit 1720, in 4. (Alph. 2, Tab. 2), docet uſum Algebræ communis, cujus Iſagoge libro primo præmittitur, in Trigonometria plana & Sphærica.

CAPUT VI.

De Statica & Mechanica.

§. 1. Theoria Staticæ atque Mechanicæ apud veteres fuit valde imperfecta, nec quicquam ea de re extat, niſi quod ARCHIMEDES in duobus *De æquiponderantibus* libris, de centro gravitatis figurarum planarum, & de Statices palmario fundamento, & PAPPUS lib. 8. *Collect. Mathemat.* de quinque Potentiis mechanicis, vecte, axe in peritrochio, trochlea, cochlea & cuneo demonſtrat.

§. 2. Neque ulterius progrediuntur Autores recentiores, qui inſtitutiones Mechanicas ediderunt: immo plerique Archimedea de centro gravitatis, quæ non ſunt ad palatum tyronum, nec ad praxin directe tendunt, omittunt. Pertinent huc GUIDI UBALDI liber *Mechanicorum*, *Piſauri* An. 1577, editus in fol. (2 Alph.) SIMONIS STEVINI *Statica* (§. 23, Cap. 1); JAC. ROHAULT *Tractatus de Mechanica*, qui inter poſthuma habetur *Hagæ* 1690, in 12. reg. (1 Alph. 22 plag.) edita & non nullis editionibus Phyſicæ ejus in Latinum verſæ ſubjungitur; IGNATII GASTONIS PARDIES *Statica* Gallice *Hagæ Comitum* An. 1692, in 12. (10½ plag.) tertia vice recuſa & vitioſiſſime in Latinam linguam translata; BERNHARDI LAMY Tractatus Gallicus *de Mechanica* (*Pariſiis* 1687, in 12. plag. 12), cui acceſſit plagula una continens Novam methodum demonſtrandi præcipua theoremata Elementorum Mechanicorum; GUIL. OUGHTRED *Inſtitutiones Mechanicæ* (§. 27, cap. 1), PAULI CASATI *Mechanicorum* libri octo *Lugduni Gallorum* An. 1684, in 4. (4 Alph. 7 plag.) & AND. JUNGENICKELS, ex vitriario primum militis gregarii, deinde Suggeſtuum tormentorum Præfecti *Clavis Machinarum*, Germanice conſcripta & *Norimbergæ* An. 1661, in 4. (2 Alph. 3 plag.) edita. Hos inter STEVINUS atque CASATUS multa ad praxin profutura afferunt: ROHALTIUS atque LAMY ob perſpicuitatem tyronibus commendandi: JUNGENICKELIUS iis ſatisfacit, qui in Geometria non multum verſati fundamenta mechanica populari modo cognoſcere cupiunt.

§. 3. Theo-

§. 3. Theoriam potentiarum mechanicarum, quæ dicuntur, seu machinarum simplicium nemo prolixius demonstravit, ac singula huc spectantia uberius exposuit, quam VARIGNONIUS in opere posthumo, quod duobus Tomis *Parisiis* An. 1725, in 4. reg. (Alph. 4, plag. 21, Tabb. 64) sub titulo: *Nouvelle Mécanique & Statique* prodiit, ubi ex motu composito demonstrationes deducit. Ad eorum palatum est, qui theoriis profundis delectantur. Ideam hujus operis jam publicaverat An. 1687, *Parisiis* in 4. sub titulo: *Projet d'une nouvelle Mécanique*, in quo nonnisi principia continentur peritis valde probata. Adjiciuntur duo Tractatus, quorum primo examinatur Machina ab affrictu libera, cujus mentionem facit PERRAULT in Commentario ad VITRUVIUM; secundo autem opinio BORELLI de ponderibus ex chorda suspensis.

§. 4. Ulterius primus omnium progressus GALILÆUS GALILÆI in *Discursibus & demonstrationibus mathematicis circa duas novas scientias, pertinentes ad Mechanicam & motum localem*, una cum *Dialogis ejus de systemate mundi*, *Lugduni Bat.* 1699, in 4. editis. (Dialogi de motu constant 1 Alph. 14 plag). In iis enim resistentiam solidorum considerare aggressus est, quamvis parum feliciter, usus nimirum principiis parum genuinis, & de motu cum generalia tradidit, tum in specie motum gravium tam libere, quam super plano inclinato descendentium vel ascendentium, atque motum projectorum & pendulorum felicissime evolvit.

§. 5. Inventa GALILÆI expolivit discipulus ejus EVANGELISTA TORRICELLIUS in libris duobus *de motu gravium naturaliter descendentium & projectorum*, qui inter opera ejus Geometrica habentur (§. 12, Cap. 3); immutavit JOH. BAPTISTA BALIANUS in Tractatu *de motu naturali gravium* (*Genuæ* 1646, in 4.), sed parum feliciter; & doctrinam de motu pendulorum ulterius promovit CHRISTIANUS HUGENIUS in insigni Tractatu *de Horologio oscillatorio*, *Paris.* An. 1673, in fol. (2 Alph.), cujus etiam parte tertia de linearum curvarum evolutione & dimensione Geometria sublimior novis inventis illustratur. Illustris LEIBNITIUS de resistentia solidorum certiora dedit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 319, & eandem doctrinam celeberrimus VARIGNONIUS more suo maxime universalem reddidit Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum An. 1702, pag. 87.

§. 6. JOH. ALPHONSUS BORELLUS in Tractatu *De vi percussionis* regulas motuum explicare aggressus est. Prodiit primum *Bononiæ* An. 1666, in 4. & cum Tractatu altero *De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, *Lugd. Batav.* An. 1686, in 4. (3 Alph. 18 plag. 21 Tabb. æn.). Idem in Opere eximio *De motu animalium*,

malium, *Lugd. Batav.* 1685, in 4. (3 Alph. 18 plag. 18 Tabb. æn.) regulas Staticorum ad motus animalium varios explicandos applicavit.

§. 7. Primi regulas motuum veras dedere eodem tempore WALLISIUS, HUGENIUS & CHRISTOPHORUS WREN: ille quidem de Corporibus non elasticis, hi vero de corporibus elasticis. Extant regulæ *Wallisianæ* in Transactionibus Anglicanis n. 43, p. 864, *Wrennianæ* n. 43. p. 867, & *Hugenianæ* n. 46, pag. 927, Conf. *the Philosophical Transactions abrig'd* by JOHN LOWTHORP Vol. I. cap. 5, p. 545, & seqq.

§. 8. HUGENIUS postea Tractatum peculiarem *De motu corporum ex percussione* conscripsit, qui inter posthuma opera habetur, & in quo inventa sua clarius explicat: WALLISIUS vero absolutissimum *de Mechanica seu motu* opus perfecit, *Oxonii* An. 1669, in 4. primum editum, deinde Tomo primo Operum insertum, in quo non solum inventa veterum & *Galilæana*, *Wrenniana*, *Hugeniana* atque propria, ope analyseos plerumque demonstrantur, verum etiam in prolixa de centro gravitatis pertractatione multa ad Geometriam sublimiorem spectantia una evolvuntur. Utitur Arithmetica hinc inde infinitorum, sed ope calculi differentialis ac integralis talia felicius eruuntur.

§. 9. Quoniam opus præclarum captum tyronum transcendit; operæ pretium fecit Cl. JOH. KEILL, Astronomiæ Professor in Academia Oxoniensi, quod in *Introductione ad veram Physicam*, quæ An. 1705, *Oxonii* in 8. reg. (19½ plag.) auctior recusa, palmaria illius de motu dogmata ad captum tyronum ex elementis demonstraverit, more veterum Geometrarum.

§. 10. Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in Tractatu *de Mechanica* (*Paris.* 1695, in reg. 12. plag. 18.) non modo ea demonstrat, quæ ad praxin mechanicam usui sunt; verum etiam motuum doctrinam attingit. Unde merito in hoc genere commendatur.

§. 11. Prostant etiam alia de motu corporum ex percussione Scripta particularia. Pertinet huc MARIOTTI Tractatus de percussione corporum (*du choc des corps*,) qui *Parisiis* An. 1673, in 12. (plag. 18, Tab. 2) editus Autore suo dignus; & inter opera ejus legitur, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1717, in 4. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 25) prodierunt. In eo ex experimentis pendulorum demonstrationes deducit; P. DECHALES Tractatus Gallicus *De motu* (*Lugd. Gall.* An. 1682, in 8) & P. PARDIES *Discursus de motu locali* (*Hag. Comit.* An. 1692, in 12. tertia vice Gallice recusus) non magni momenti, nec veritati per omnia consentaneus. Inprimis vero hic nominanda sunt *Elementa* Gallica *Mechanicæ & Physicæ* a PARENTIO, *Paris.* An. 1700, in reg. 12, (plag. 22, Tabb. 12) edita, quamvis non satis perspicua.

§. 12. HU-

§. 12. Hugenius primum considerare cœpit in motu curvilineo, præsertim circulari, vim centrifugam, & de ea aliquot theoremata, sed suppressa demonstratione, Tractatui de Horologio oscillatorio (§. 4) subjunxit. Conscripsit deinde Tractatum *De vi centrifuga*, qui inter posthuma comparet, ubi theoremata ista demonstrantur. Sed antequam is in publicum prodiret, Cl. Keillius faciles ac elegantes eorundem theorematum demonstrationes dedit sub finem Introductionis ad veram Physicam modo laudatæ (*§. 9*). Easdem regulas per calculum differentialem in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum An. 1700, p. 19. eruit Hospitalius & nos nostro more in Elementis Mechanicæ demonstravimus.

§. 13. De motu, præsertim curvilineo, inventa prorsus præclara & admiranda dedit Geometra summus Isaacus Newtonus in excellenti *Principiorum Mathematicorum Philosophiæ Naturalis* Opere (*Londini* An. 1687, in 4. reg. 2 Alph. 18 plag.) quod hinc inde emendatum & auctum *Cantabrigiæ* 1713, in 4. reg. (2 Alph. 19 plag.) & mox *Amstelodami* An. 1714, eadem forma recusum cum præfatione Rogeri Cotes, Astronomiæ & Philosophiæ experimentalis Professoris Plumiani in Academia Cantabrigiensi, qui operam dedit, ut opus præstantissimum nitide imprimeretur. Tandem An. 1726, *Londini* in 4. reg. (Alph. 2 plag. 3) prodiit editio tertia aucta & emendata, ceteris omnibus præferenda. Docetur in hoc opere applicatio Geometriæ ad Naturæ explicationem & Scientia mechanica mirifice fuit promota.

§. 14. Excitavit illud attentionem Geometrarum primi ordinis, eosque incitavit, ut varia ad majorem universalitatem perducerent & ulterius proveherent: quos inter inprimis nominandus mihi est celeberrimus Varignonius, cujus præclara in hoc genere meditata in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum passim leguntur.

§. 15. Cæterum cum ad lectionem operis *Newtoniani* non admittantur, nisi in Theoria mathematica multum diuque versati, cum in ea majorem perspicuitatem desideraverit ipse Hugenius; Guilielmus Whiston, Matheseos tum Professor in Academia Cantabrigiensi, in *Prælectionibus Physico-Mathematicis* Philosophiam Newtoni mathematicam explicatius tradidit & facilius, quamvis subinde laxius, demonstravit (*Cantabrigiæ* An. 1710, in 8. 1 Alph.). Forsan huc etiam tendit liber alius ab Henrico Ditton *Londini* An. 1706, sub titulo *the general Laws of nature and motion with their application to Mechanicks, also the doctrine of centripetal forces and velocities of bodies, describing any of the Conick Sections* editus, quem nobis non visum

ſum nomen Autoris ex aliis ſpeciminibus nob s noti commendat.

§. 16. Inprimis etiam loco introductionis in opus *Newtonianum* commendanda eſt explicatio quarundam ſectionum ejuſdem, quam dedit JOHANNES CLARKE & ſub titulo: *A Demonſtration of ſome of the principal ſections, of Sir Iſaac Newton's principles of natural Philoſophy, in* wich *his peculiar method of treating that uſeful ſubject is explained and applied to ſome of the chief phænomena of the ſyſtem of the World, Lond.* 1730, in 8. reg. (plag. 22, Tabb. 17) edidit, & omnium maxime DOMCKII *Philoſophia mathematica Newtoniana* illuſtrata, quam Latino ſermone conſcriptam *Londini* An. 1731, in 8. (Alph. 1, plag. 3, Tabb. 16) publici juris fecit autor. Enimvero cum opus *Newtonianum* merito tantopere celebratum a tyronum non modo, ſed etiam provectiorum captu valde removeatur, utiliſſimam operam ſumeret, qui continuo Commentario idem illuſtraret, qualem in Geometriam CARTESII edidit RABUEL (§. 7, c. 4). * Præſtaret enim, ut principiis Geometriæ, Analyſeos & Mechanicæ inſtructus ſtatim ad lectionem ejus accederet, cum dulcius ex fonte bibantur aquæ, quam demum per ambages non ſine multo temporis diſpendio ad eandem perduceretur, aut prorſus ab eadem avocaretur.

§. 17. Multa egregia de motu & reſiſtentia cum ſolidorum, tum fluidorum a celeberrimis ævi hujus Geometris detecta in Actis Eruditorum & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, nec non in Tranſactionibus Anglicanis, paſſim extant; & præclarum de motu ſolidorum & fluidorum opus Geometræ inſignis JACOBI HERMANNI, Mathematum Profeſſoris primum Patavii, deinde Francofurti ad Oderam, poſthac Petropoli Mathematum, tandem in Academia patria Baſileenſi Philoſophiæ moralis celeberrimi, *Amſtel.* 1716, in 4. (Alph. 2, plag. 15, Tabb. 12) ſub *Phoronomiæ* nomine editum plurima inventa nova eaque egregia continet. More veterum doctrinam hanc demonſtrare voluit, quorum tamen methodum non ſatis familiarem expertus, nec intimius perſpectam poſſedit, ut adeo & ſibi, & aliis magis conſuluiſſet, ſiquidem analytica methodo, in qua erat verſatiſſimus, uſus fuiſſet.

§. 18. Ne igitur deſideraretur opus Mechanicæ, in quo Motus ſcientia profundius explicaretur, & lectores ad ſolvenda proprio marte problemata præpararentur, LEONHARDUS EULERUS, Academiæ Imperialis ſcientiarum, quæ Petropoli floret, Membrum & Matheſeos ſublimioris Profeſſor, *Mechanicam* ſive *Motus ſcientiam analytice expoſitam* con-

* Id fecerunt PP. LE SEUR & JACQUIER ex ordine Minimorum. Prodierunt hujus Commentarii Volumina duo, *Genevæ in* 4. primum An. 1739 (Alph. 3, plag. 5) ſecundum An. 1740 (Alph. 2, plag. 7) Tertium mox proditurum expectatur.

conſcripſit & duobus Tomis, *Petropoli* in 4. reg. (Tom. I, Alph. 2, plag. 17, Tabb. 14, & Tom. II, Alph. 2, plag. 18, Tabb. 18) in lucem publicam emiſit, plura ſuo tempore additurus. Reperies in hoc opere multa nova, quæ alibi fruſtra quæſiveris, & ad ejus lectionem cum fructu abſolvendam admittitur, qui in Analyſi finitorum & infinitorum ſatis fuerit exercitatus.

§. 19. Quibus machinarum conſtructio curæ cordique eſt, in eorum gratiam Tractatum de Viribus motricibus (*Traité des Forces mouvantes*) *Pariſiis* An. 1722, in 8. reg. (Alph. 1½, Tabb. 8) edidit DE CAMUS. Explicantur enim principia & ad machinas applicantur, quorum in praxi mechanica cognitio præſupponitur.

§. 20. Machinarum deſcriptiones dederunt JACOBUS DE STRADA, *Ferdinandi*, *Maximiliani* & *Rudolphi* II, Imperatorum Antiquarius, An. 1618, a nepote OCTAVIO DE STRADA in publicum emiſſas, & An. 1629, recuſas; ZEISINGIUS in *Theatro Machinarum*, *Lipſiæ* An. 1612, in 4. edito, JACOBUS BESSON in *Theatro inſtrumentorum & machinarum* An. 1582, in lucem emiſſo in fol. (plag. 32), cum FRANCISCI BEROALDI Figurarum declaratione demonſtrativa & JOLII PASCHALIS additionibus: AUGUSTINUS DE RAMELLIS DE MASANZANA in opere, quod ex Gallico in ſermonem Germanicum translatum *Lipſiæ* An. 1620, in fol. (7 Alph. 18 plag.) ſub titulo: *Schatz-Kammer Mechaniſcher Künſte* prodiit, & GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER, in *Theatro Machinarum* novo (*Norimb.* 1673, in fol. plag. 11, Tabb. æn. 154).

§. 21. Quoniam deſcriptiones machinarum, quas Autores iſti tradunt, omnes ſunt nimis breves, & inprimis dimenſionum rationes non exprimunt, ita ut adæquata machinarum idea inde hauriri nequeat; Mechanicus ingenioſus atque induſtrius JACOBUS LEUPOLDUS novum promiſit Theatrum machinarum & inſtrumentorum in Actis Eruditorum An. 1712, p. 366, cui ut ſtaret, ipſimet eum hortati ſumus. Stetit tandem, quantum per fata licuit, & *Lipſiæ* An. 1724, in publicam lucem protulit *Theatrum machinarum generale*, *Schau-Platz des Grundes mechaniſcher Wiſſenſchafften* in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tab. 71), in quo potentias mechanicas & virium motricium ad machinas applicationem declarat. Eodem adhuc anno comparuerunt *Theatrum machinarum hydrotechnicarum*, *Schau-Platz der Waſſer-Bau-Kunſt*, in quo ea traduntur, quæ ad Architecturam aquarum faciunt (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 51) & pars prior *Theatri machinarum hydraulicarum*, *Schau-Platz der Waſſer-Künſte*, in quo repræſentantur machinæ ad aquas elevandas excogitatæ (Alph. 2, Tabb. 52). Pars poſterior ſubſecuta

anno ſequente (Alph. 2, plag. 1, Tabb. 54). Eodem adhuc anno 1725, comparuit *Theatrum Machinarium*, quod vocat Autor, *Schau-Platz der Hebezeuge* (Alph. 2, Tab. 96), in quo reperies machinas ponderibus elevandis aptas hiſque agnatas, & *Theatrum ſtaticum univerſale*, *Schau-Platz der Wage- und Gewicht- Kunſt*, (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 57), quod exhibet varias librarum & ſtaterarum ſtructuras, una cum inſtrumentis hydroſtaticis, meteorologicis & ad libellationem neceſſariis, & quæ ad pondera ſpectant, explicat. An. 1726, *Theatrum Pontificiale*, quod vocat autor, *Schau-Platz der Brücken und des Brücken-Baues* (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 57), quæ eam Architecturæ partem illuſtrat, quæ de pontibus ſtruendis agit. Tandem An. 1727, *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, *Schau-Platz der Rechen-und Meſs-Kunſt* (2 Alph. 8½ plag. Tabb. 43) ſucceſſit, in quo inſtrumenta Arithmetica & Geometrica deſcribuntur. Niſi mors Autoris finem impoſuiſſet, dare adhuc conſtituerat Theatra 1. fontium hydraulicorum, 2. molarum, 3. ad mechanicam ignis ſpectantium, 4. machinarum in metalli fodinis uſitatarum, 5. machinarum & inſtrumentorum, quæ in Architectura civili & militari uſui ſunt, 6. quæ in re Oeconomica & 7. venatoria uſum habent, 8. machinarum & inſtrumentorum aërometricorum, 9. machinarum & inſtrumentorum opticorum, 10. machinarum & inſtrumentorum in Gnomonica & arte horologiopæa uſitatorum, 11. inſtrumentorum aſtronomicorum, 12. acuſticorum & muſicorum aliorumque agnatorum, 13. anatomicorum & chirurgicorum, & tandem omnium machinarum & inſtrumentorum apud artifices & opifices obviorum.

§. 22. Dolendum inprimis erat, quod molarum uſitatarum genera cum Architecturæ parte, quæ iiſdem excitandis deſtinatur, non deſcribere potuerit Autor. Hunc igitur defectum ſupplere conatus eſt JOHANNES MATTHIAS BEYER, qui per modum Tomi noni Theatri machinarum LEUPOLDI An. 1735, *Lipſiæ* in fol. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 43) edidit, in quo non modo uſitata molarum genera, verum etiam ea, quæ ad extructionem earundem neceſſaria ſcitu, deſcribuntur. Acceſſit Tomus ſecundus, in quo jura molendinorum operoſe congeruntur (Alph. 2, plag. 12) in uſum Juriſperitorum.

§. 23. Molas Batavorum peculiari libro exhibuit PETRUS LIMPERGH ſermone patrio, cujus *Moole-Boek*, *Amſtelodami* An. 1690, in fol. reg. (plag. 2, Tabb. 32) prodiit. Accuratiores illarum delineationes ac deſcriptiones dedit JOHANNES VAN ZYL in Theatro Machinarum univerſali, *of groot algemen Moolen-Boek*, cujus

cujus Tomus I, *Amstelodami* An. 1734, in fol. reg. prodiit (plag. 6, Tabb. 56), etenim singulæ partes, qualescunque tandem fuerint, quam accuratissime secundum suas dimensiones repræsentantur, ut integræ structuræ adæquatam ideam inde haurire liceat. Textus in Germanicam linguam translatus fuit, ut operis hujus etiam in Germania esset usus.

§. 24. Accuratas quarundam machinarum recentius inventarum descriptiones dedit PERRAULT in opusculo Gallico, quod sub titulo: *Recueil de plusieurs Machines de nouvelle invention*, *Parisiis* An. 1700, in 4. (plag. 7, Tabb. 11) prodiit, & HUGENIUS cum in Tractatu *De horologio oscillatorio* horologium a se inventum, tum in *Operibus posthumis* automatum suum planetarium accurate describit.

§. 25. In Gallia machinas ab Academia Scientiarum approbatas, a prima fundatione usque ad nostra tempora, una cum illarum descriptionibus, delineatas consensu Academiæ sub titulo: *Machines & Inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, *Parisiis* sex Tomis publici juris fecit GALLONUS An. 1735, in 4. reg. (Alph. 6, plag. 20, Tabb. 422). Non modo machinæ scenographice repræsentantur, verum etiam ichnographice, cum orthographiis & singularum partium delineationibus adjiciuntur, ubi opus fuerit. Descriptiones sunt satis accuratæ, ut nihil in iis desiderari possit. Subinde etiam vires ad agitandam machinam requisitæ ad calculum revocantur, aliaque cognitu necessaria annotantur. Opus hoc Mechanicæ practicæ cultoribus plurimum commendandum.

§. 26. Structuram horologiorum exponit Anglus Anonymus * in Tractatu Anglico, qui auctior *Londini* An. 1700, in 12. reg. sub titulo: *The artificial Clockmaker* ($7\frac{1}{2}$ plag. Tabb. 2) prodiit & An. 1707, in Germanicum idioma translatus, novæ editioni Gnomonicæ *Welperianæ* subjungitur: quod argumentum etiam attingit OUGHTREDUS in posthumis pag. 68, & seqq. Idiomate autem Germanico de horologiorum structura commentatus est JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, in mechanicis & praxi optica versatissimus. Prodiit ejus Tractatus sub titulo: *Vollständige Nachricht von den Uhren*, *Halæ* 1718, in 8. (plag. 9, Tab. 7). Addidit An. 1722, Continuationem, in qua supplentur, quæ desiderari poterant de horologio examinatorio & repetitorio (plag. 12, Tabb. 22).

§. 27. Autoribus tamen istis palmam præripit D. JACOBUS ALEXANDER, Monachus Benedictinus Congregationis S. Mauri, in Tractatu generali de Horologiis, qui sub titulo: *Traité général des Horloges*, Pari-

I 2

* GULIELMUS DERHAM Canon. Windsor. non uno nomine commendandus.

Parisiis in 8. maj. 1734, prodiit (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 26), quem ob utilitatem suam, me suasore, in Germanicam linguam transtulit CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGERUS, Medicinæ Doctor, & *Lemgovii* An. 1738, in 8. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 25) edidit sub titulo: *Des P. Dom JACOB ALEXANDERS ausführliche Abhandlung von den Uhren.* Agit etiam de horologiis solaribus majoribus construendis. Ceterum hoc opus omnibus commendandum, qui horologiorum constructionem accurate cognoscere desiderant. Singularia vero de constructione horologiorum tradit in libro Gallico HENRICUS SULLY, qui secunda vice auctior recusus *Parisiis* An. 1737, in 12. (plag. 20, Tabb. 5) cum multis accessionibus. Maximopere commendandus iis est, qui perfectionem horologiorum curæ cordique habent, atque adeo in Germanicam linguam verti meretur, ut Tractatui ALEXANDRI jungi posset.

§. 28. Silentio denique hic prætereunda non erant CASPARI SCHOTTI, e Societate Jesu, *Technica curiosa*, libris 12, comprehensa, quæ *Norimbergæ* An. 1664, in 4. (Alph. 6, Tabb. 20) prodierunt. Etenim in iis, præter varia experimenta aliaque technasmata, continentur etiam mechanica, chronometrica & automatica, consequenter plurima ad Mechanicam practicam spectantia. Edidit idem *Magiam universalem Naturæ & Artis* in tres partes distributam *Bambergæ* 1677, in 4. (Alph. 14, plag. 2, Tabb. 90): pars enim tertia multa continet, quæ ad Mechanicam & Staticam spectant, nimirum quæ sub nominibus Magiæ centrobarycæ, mechanicæ, thaumaturgæ libris tribus prioribus continentur.

§. 29. Idem SCHOTTUS in Technica curiosa lib. 9, sub titulo *mirabilium chronometricorum* multa artis horologiopææ utilia tradit, præter alia mechanica. Inprimis etiam de mobili perpetuo varios conatus describit.

CAPUT VII.

De Hydrostatica, Aerometria, & Hydraulica.

§. 1. HYdrostaticam primus docuit ARCHIMEDES in libris *De insidentibus humido*, cujus dogmata ad experimenta applicavit MARINUS GHETALDUS in ARCHIMEDE *promoto*: unde sua excerpsit OUGHTREDUS (§. 19, cap. 1).

§. 2. MA-

§. 2. MARIOTTUS in Tractatu Gallico de motu aquarum & aliorum corporum fluidorum, qui primum sub titulo: *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides*, prodiit *Parisiis* An. 1686, in 12. reg. (plag. $17\frac{1}{2}$) & in editione Batava operum ipsius legitur, propositionum hydrostaticarum & hydraulicarum magnam partem & rationibus confirmavit, & experimentis comprobavit. Propter insignem utilitatem D. JOHANNES CHRISTOPHORUS MEINIG eum in Germanicam linguam transtulit & notis quibusdam illustratum *Lipsiæ* An. 1723, in 8. (Alph. 1, plag. $5\frac{1}{2}$) edidit.

§. 3. Nec contemnenda habet ROBERTUS BOYLE, cum in *Paradoxis Hydrostaticis* (*Genevæ* An. 1680, in 4. plag. 15, Tabb. 3), tum in *Medicina Hydrostatica* (*Genevæ* An. 1693, in 4. plag. $10\frac{1}{2}$): quod utrumque scriptum in usum præsertim physicum legi meretur, intelligendum etiam ab iis, qui Mathematum sunt imperiti.

§. 4. FRANCISCUS TERTIUS DE LANIS, e Societate Jesu, Tomo tertio *Magisterii Naturæ & Artis*, *Parmæ* An. 1692, in fol. (6 Alph. 14 plag. Tabb. 13) lib. 25, f. 49, & seqq. dogmata hydrostatica uberius exposuit, quam alibi leguntur. Tomo autem primo & inprimis secundo passim Machinas Hydraulicas descripsit: quemadmodum etiam in primo Mechanicam multum illustravit. Tom. I, *Brixiæ* An. 1684, in fol. 6 Alph. Tab. 24. Tom. II, *Brixiæ* 1686, 6 Alph. 5 plag. Tabb. 20).

§. 5. BERNHARDUS LAMY parte secunda Mechanicæ (§. 2, cap. 6), quæ inscribitur *Traité de l'equilibre des liqueurs*, propositiones aliquot Hydrostaticæ ac Hydraulicæ fundamentales explicavit: quod etiam fecere ROHALTIUS (§. cit.) & WALLISIUS in *Mechanicis* (§. 8, c. cit.). Commendanda quoque tyronibus *Hydrostatica* P. DECHALES, quæ in Mundo ipsius Mathematico Tom. III, legitur. (§. 4, cap. 1).

§. 6. Sublimiora dedit Geometra summus ISAACUS NEWTONUS in *Principiis Philosophiæ Naturalis Mathematicis* Sect. 5, lib. 2, pag. 282, & seqq.

§. 7. De Aërometria scriptum aliud non extat, nisi quod sub titulo: *Elementa Aërometriæ*, *Lipsiæ* An. 1709, in 12. (16 plag. Tabb. 12) edidi in usum potissimum tyronum, ut Mathesin ad experimenta applicare discant. Sed ea deinceps hisce Elementis Matheseos universæ inserui. Passim tamen huc spectantia leguntur apud GUERICKIUM, Consulem Magdeburgicum, antliæ pneumaticæ inventorem, in *Experimentis novis Magdeburgicis de vacuo spatio*, *Amstelodami* An. 1672, in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tabb. 18) editis & qui post eum aëris proprietates experimentis comprobarunt.

§. 8. Ceterum hic etiam locum

meretur libellus Gallicus, qui sub titulo: *Traitez des Barometres, Thermometres & Hygrometres* prostat & barometrorum, thermometrorum atque hygrometrorum constructionem ac usum edocet (*Amstel.* 1707, in 12. plag. 7, Tabb. 35). Inprimis autem hinc inde in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum inseruntur, quibus Aërometria locupletari ac ad majorem perfectionem adduci potest.

§. 9. Ad hydraulicam perficiendam tendit JOHANNIS CEVÆ, Mediolanensis, *Geometria motus* (*Bononiæ* 1692, in 4. plag. 12, Tabb. 9), in qua de motu tam simplici, quam composito traduntur, quæ ad motum aquarum explicandum utilia sunt.

§. 10. JOHANNES BAPTISTA BALIANUS lib. 3, 4 & 5, *de motu naturali gravium, solidorum & liquidorum* (§. 5, cap. 6) de motu liquidorum, canalium sectionibus, & de foraminibus vasis, ad praxin hydraulicæ utilia profert: quorsum etiam spectant Tractatus aliquot PICARDI, ROEMERI & MARIOTTI supra recensiti (§. 31, cap. 1).

§. 11. DOMINICUS GULIELMINI in *Mensura Aquarum fluentium* (*Bononiæ* An. 1690, & 1691, in 4. plag. 19, Tabb. 8) theorias hydraulicas sublimiores ad praxin revocare studet. Nemo autem in theoria hydraulica sublimiora dedit quam Geometræ celeberrimi, NEWTONUS in Opere modo laudato (§. 6) lib. 2. sect. 7. p. 318, & seqq. atque VARIGNONIUS in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum An. 1699, & 1703. Multa nova & egregia de hoc argumento dedit Geometra insignis HERMANNUS in *Phoronomia* (§. 17, cap. 6).

§. 12. Quemadmodum vero EULERUS theoriam mechanicam perficere studuit (§. 18, cap. 6), in quam stricturas Londini edidit ROBINSON NOURSE * sub titulo: *Remarks on Mr. Eulers Treatise of motion*, nobis nondum visas; ita DANIEL BERNOULLI, Medicinæ Professor Basileensis, antea Matheseos sublimioris in Academia scientiarum imperiali Petropolitana, nunc Professor honorarius, similem operam impendit theoriæ Hydrostaticæ & Hydraulicæ, quam sub titulo: *Hydrodynamicæ sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii*, *Argentorati* An. 1738, in 4, reg. (Alph. 1, plag. 16, Tabb. 12) publici juris fecit, cum hoc opus jam octo annis ante congessisset, dum Petropoli ageret.

§. 13. Ceterum ad Hydraulicam quoque facit SEXTI JULII FRONTINI *de Aquæ ductibus urbis Romæ Commentarius*, quem uberrimis notis explicatum *Patavii* Anno 1722, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 15) in lucem emisit JOANNES POLENUS, Professor Patavinus, cui etiam debentur de *Motu aquæ mixto* libri duo, quibus multa nova pertinentia ad æstua-

* Aut potius BENJAMIN ROBINS; *Nourse* nomen est Bibliopolæ.

æstuaria, ad portus atque ad flumina continentur, *Patavii* An. 1697, in 4. reg. (plag. 18, Tabb. 3) & liber *de Castellis, per quæ derivantur fluviorum aquæ, habentibus latera convergentia*, qui etiam continet nova experimenta ad aquas fluentes & ad percussionis vires pertinentia, & *Patavii* An. 1718, in 4. (plag. 9, Tab. 1) prodiit. Idem etiam An. 1723, edidit *Epistolam ad* JOANNEM JACOBUM MARINONIUM, Mathematicum Cæsareum, in qua præter defectum Solis anno isto Patavii observatum, agitur de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes, & cui subjicitur JOANNIS BUTEONIS *libellus de fluentis aquæ mensura* cum annotationibus nonnullis, *Patavii* in 4. (plag. $3\frac{1}{2}$, Tabb. 1).

§. 14. Neque silentio hic prætereunda sunt MARINI MERSENNI *Phænomena Hydraulica pneumatica*, quæ inter *Cogitata ipsius Physico-Mathematica* leguntur, in quibus tam naturæ, quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur, *Parisiis* An. 1654, in 4. (Alph. 8, plag. 19). In hac nimirum collectione, quæ inter opera mathematica, superius commemorari merebatur, reperiuntur 1. Tractatus de mensuris, ponderibus, atque nummis tam Hebraicis, quam Græcis & Romanis, ad Parisiensia expensis, 2. Tractatus, cui titulus: Hydraulica pneumatica, Arsque navigandi, Harmonia theorica, practica, & Mechanica phænomena, 3. Tractatus mechanicus theoricus & practicus, 4. Balistica & Acontismologia, in qua sagittarum, jaculorum & aliorum missilium jactus & robur arcuum explicantur, 5. Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis & bini refractionum demonstratarum Tractatus, 6. ARISTARCHI SAMII Tractatus de mundi Systemate & Reflexiones Physico-Mathematicæ, quibus varia adjiciuntur ad præcedentia. In Synopsi tantummodo sine demonstratione recensentur Propositiones EUCLIDIS, PETRI RAMI, ARCHIMEDIS, THEODOSII, MENELAI, MAUROLYCI, APOLLONII, MYDORGII, *geometricæ*; PAPPI, GUIDONIS UBALDI & STEVINI *mechanicæ*.

§. 15. De motu fluminum scripsit DECHALES in Tractatu *De fontibus naturalibus* prop. 39, & seqq. Tomi III, *Mundi Mathematici* f. 137, & seqq. sed paucis plura & abstrusiora hisce complexus est HERMANNUS in *Phoronomia* cap. 10, pag. 226, & seqq. Ex instituto de hoc argumento scripsit DOMINICUS GULIELMINI, cujus *della Natura de' Fiumi Trattato Fisico-Matematico* prodiit *Bononiæ* An. 1697, in 4. (Alph. 2, plag. 3, Tabb. 15). Multa in Italia prodiere scripta Italico sermone, in quibus plura ad hoc argumentum spectantia leguntur, occasione controversiæ de Rheno fluvio in Padum deducendo.

§. 16. Inter

§. 16. Inter Veteres, machinas hydraulicas descripsit HERON *Alexandrinus* in libro *spiritalium* a COMMANDINO in Latinam linguam translato (*Parisiis* An. 1583, in 4.) Ex recentioribus similem operam collocarunt SALOMON DE CAUX, Architectus militaris Electoris Palatini, in libro Gallico *De Machinis, præcipue hydraulicis*, qui An. 1615, prodiit: CASPARUS SCHOTTUS in *Mechanica Hydraulico-pneumatica, Herbipoli* 1657, in 4. (Alph. 2, plag. 22, Tabb. 56) edita, DECHALES in *Mundo Mathematico* Tom. III, (§. 4, cap. 1), GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER in *Architectura Curiosa* Germanica (*Norimbergæ* An. 1704, in fol. plag. 21, Tabb. 200), qui ultra 70 fontium salientium & ultra 120 fontium artificialium formas describit; & LUCAS ANTONIUS PORTIUS in nonnullis *de fontibus naturalibus*, quæ nonnullis *de motu corporum* subjuncta, possibilitatem inprimis quorundam fontium adstruens, qui a PLINIO commemorantur. (*Neapoli* An. 1704, in 4. plag. 7, Tabb. 5).

§. 17. Denique quæ de Hydrostatica & Hydraulica per plurimos libros & volumina dispersa leguntur, qua theoriam & praxin, uno complexus est & sub titulo: *An introduction to a general system of Hydrostaticks and Hydraulicks, Londini* An. 1729, in 4. charta aug. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. æn. 60) edidit STEPHANUS SWITZER. Extant etiam in hoc libro descriptiones machinarum, quibus aqua elevatur.

§. 18. Inprimis autem iis, qui praxin solidam Hydraulicæ curæ cordique habent, commendari meretur *Architectura hydraulica*, quam Gallico idiomate conscriptam *Parisiis* Anno 1737, in 4. reg. cum 44 Tabulis æneis splendidissimis edidit DE BELIDOR. * In hoc opere etiam accurata traditur molarum descriptio & quæ ad molas aqua agitandas requiruntur ibidem explanantur. Opus utilissimum in linguam Germanicam verti mereretur.

§. 19. Ad Hydraulicam quidam referunt *Libellationem* aquarum, de qua nos egimus in Mechanicæ Elementis. Egregium de ea Tractatum conscripsit PICARDUS, quem PHILIPPUS DE LA HIRE post mortem ipsius *Parisiis* An. 1684, in 12. (plag. 15, Tabb. 3) edidit, unde sua desumsere, qui de hoc argumento apud Nostros scripsere, veluti LEUPOLDUS atque STURMIUS filius. Inter opera MARIOTTI extat quoque *De libellatione* Tractatus brevis.

* Habet quidem Tom. I, 2 Alph. 9 plag. Tabb. 44. Prodiit autem Tom. II. Anno 1739, & complectitur 2 Alph. 12 plag. Tabb. 55.

CAPUT

CAPUT VIII.

De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva.

§. 1. O*Pticæ* & *Catoptricæ Elementa* olim conscripsit EUCLIDES, quæ a JOHANNE PENA, Mathematico Regio, Latine versa *Parisiis* An. 1604, prodiere. Extant etiam in *Cursu Mathematico* HERIGONII (§. 1. cap. 1) & in editione *Gregoriana* operum EUCLIDIS (§. 2, cap. 3).

§. 2. Circa annum Christi 1100, ALHAZEN Arabs ingens *de Optica* volumen composuit, quod in libros, capita & propositiones distinxit FRIDERICUS RISNERUS. Usus est scriptis veterum, præsertim PTOLEMÆI de *Optica* libris decem, qui hodie desiderantur.

§. 3. Cum demonstrationes ALHAZENI sint admodum intricatæ ac prolixæ; VITELLIO Polonus circa An. 1270, aliud *de Optica* volumen conscripsit in libros X digestum. Pleraque ex ALHAZENO desumsit, sed demonstrationum fundamenta ex APOLLONIO, THEODOSIO, MENELAO, THEONE, PAPPO & PROCLO petiit. Ad hunc Autorem *Paralipomena* edidit JOHANNES KEPPLERUS, quibus Astronomiæ pars optica traditur. (*Francofurti* An. 1604, in 4. 2 Alph. 15 plag.). Habentur tamen multa quoque alia in hisce Paralipomenis, & inter alia modum visionis primus decente ratione explicat Autor. ALHAZENUM & VITELLIONEM uno volumine edidit FRIDERICUS RISNERUS *Basileæ* An. 1572, in fol. (Alph. 7, plag. 18). Titulus libri est: *Opticæ Thesaurus.* ALHAZENI *Arabis libri septem nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis & Nubium ascensionibus. Item* VITELLIONIS *libri* X. *Omnes instaurati, figuris illustrati & aucti, adjectis etiam in* ALHAZENUM *commentariis a* FEDERICO RISNERO.

§. 4. Compendium Opticæ antiquæ circa annum 1279, conscripsit JOHANNES PECCAMUS, Archiepiscopus Cantuariensis & Primas Angliæ (*Coloniæ Agrippinæ* 1627, in 4. plag. 11), quale etiam recentius dedit AMBROSIUS RHODIUS, Professor Mathematum Wittebergensis, cujus *Optica*, *Wittebergæ* 1611, cum *Tractatu de crepusculis* in 8. prodiit (1 Alph. 10 plag). Uberius eandem exposuit RISNERUS ante laudatus, cujus *Opticæ* libri quatuor, *Cassellis* An. 1606, in 4. prodiere (Alph. 1, plag. 14).

§. 5. Opticam quoque illustrare aggressus est circa idem tempus ROGERIUS BACON, Philosophus suo

tempore summus, Anno 1284, Oxonii mortuus, & ob scientias Mathematicas magiæ accusatus. Ejus *Perspectivam* in lucem protraxit JOANNES COMBACHIUS, Philos. Professor marpurgensis, (*Francof.* An. 1614, in 4. 1 Alph. 5 plag.): parum tamen mathematici ea continet, etsi lectu non indigna.

§. 6. Enimvero Veteres ea, quæ visionem directam & reflexam concernunt, potissimum explicant: quæ vero ad refractam spectant, nimis imperfecte tradunt. JOANNES BAPTISTA PORTA libris novem *de Refractione* conscriptis hanc doctrinam melius tradere conatus est (prodiere *Neapoli* An. 1593, in 4. 1 Alph. 6 plag.); sed parum adhuc profecit. Primus qui Dioptricam meliori habitu induit & lentium sphæricarum proprietates demonstravit accurate, fuit JOHANNES KEPPLERUS, cujus *Dioptrica* prodiit *Augustæ Vindelicorum* An. 1611, in 4. (plag. 14) & posthac alibi recusa. Præmittuntur *Epistolæ* GALILÆI *de iis, quæ post editionem Nuncii siderei ope perspicilli nova & admiranda in cœlo deprehensa sunt*, itemque *Examen præfationis* JOHANNIS PENÆ *in Opticam* EUCLIDIS *de usu Opticæ in Philosophia.*

§. 7. CARTESIUS in *Dioptrica*, quæ principiis Philosophiæ subjungi solet, veram refractionis legem a SNELLIO inventam, sed suppresso inventoris nomine, affert & modum visionis distinctius, quam ab aliis factum fuerat, explicat, lentium ellipticarum & hyperbolicarum proprietates recenset & praxin poliendi vitra ita docet, ut in ea non satis versatum judicent experti.

§. 8. Theoriam Dioptricæ magis excoluit, novis plerumque demonstrationibus inventis, WILHELMUS MOLYNEUX in *Dioptrica nova* Anglice conscripta (*Londini* An. 1692, in 4. plag. 16, Tabb. 40), ubi calculo trigonometrico ad eruendas lentium sphæricarum proprietates juxta veram refractionis legem utitur. Omnium maxime eandem hactenus perfecit HUGENIUS, cujus *Dioptrica* maximam posthumorum partem constituit. Eidem & praxis multum debet: de quo tractatus *De poliendis vitris* testatur, Dioptricæ subjunctus. Prodiere primum *Opera posthuma*, *Lugd. Batav.* An. 1703, in 4. (2 Alph. 19 plag. Tabb. 24), deinde cum aliis recusa (§. 35, cap. 1). Opus Hugenianum perfectissimum eorum, quæ in hoc genere prostant: requirit autem lectorem in Geometria probe versatum.

§. 9. Tyronibus adeo commendandum est *Dioptricæ Tentamen* Gallicum NICOLAI HARTSOEKER (*Paris.* An. 1694, 1 Alph. 10 plag.), ubi multa quoque ad Physicam & praxin spectantia traduntur. Ipse enim in poliendis vitris & opticis technasmatis erat versatissimus.

§. 10. In splendidi Operis dioptrici CHERUBINI, Capucini, Tomo

mo primo, qui ſub titulo: *Dioptrique oculaire*, *Pariſiis* An. 1671, in fol. (5 Alph. 11 plag. Tabb. 16) prodiit, multa ad praxin ſpectantia reperiuntu. In altero Tomo, qui ſub titulo: *La Viſion parfaite*, *Pariſiis* 1678, in fol. (3 Alph. 10 plag. Tabb. 23) lucem adſpexit, argumentum palmarium eſt tubus binoculus, cujus ſub finem Tomi primi mentionem injecerat.

§. 11. Opticam ſine Catoptrica & Dioptrica tradit CHRISTOPHORUS SCHEINERUS, e Societate Jeſu, in *Oculo* (*Oeniponti* An. 1619, in 4. 1 Alph. 10 plag.). Ab iis potiſſimum legendus, qui rationes phænomenorum viſionis directæ cognoſcere geſtiunt.

§. 12. Vir ſummus NEWTONUS in egregio Optices opere novas luminis proprietates, ante nondum animadverſas, & quarum conſideratio (ceu ex HUGENII Dioptrica apparet) maximi in Dioptrica momenti, per experimenta edocet. Prodiit opus primum *Londini* An. 1704, in 4. reg. (2 Alph. 5 plag.) ſub titulo: *Opticks, or a Treatiſe of the Reflexions, Refractions, Inflexions and coleurs of Light.* In fine adjiciuntur duo Tractatus Latini, primus ſcilicet *de enumeratione linearum tertii ordinis*, alter *de Quadratura curvarum.* Ipſum in Latinam linguam tranſtulit SAMUEL CLARKE, Autore approbante & nonnulla adjiciente (*Londini* An. 1706, in reg. 4. 2 Alph. 9 plag. Tabb. 19). An. 1719, ibidem prodiit verſionis editio altera in 4. (Alph. 2, plag. 8, Tabb. 12), ubi quæſtiones adjectæ augentur, ſed Tractatus geometrici omittuntur, quos in Analyſi ſua ediderat JONES (§. 21, cap. 4). Poſt mortem NEWTONI, *Londini* An. 1729, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 24) prodierunt *Lectiones ejus opticæ* An. 1669, 1670 & 1671, *in Scholis publicis habitæ.* In his equidem multa continentur quæ in Optica leguntur, alia tamen prorſus ratione proponuntur. Reperiuntur hic, quæ alibi fruſtra quæſiveris.

§. 13. Huc etiam referri poteſt MARIOTTI *Tentamen de Coloribus* (*Pariſ.* An. 1681, in reg. 12. Alph. 1, plag. 9, Tabb. 16) quod Tentaminum Phyſicorum Gallice conſcriptorum quartum eſt, & in editione Batava operum ipſius legitur, atque HUGENII Tractatus Gallicus *de Lumine* (*Lugd. Batav.* 1690, in 4. 1 Alph. 2 plag.), qui in Operum reliquorum volumine primo extat. Ejus hypotheſi in explicandis phænomenis opticis utitur PETRUS ANGO in *Optica* Gallica (*Pariſ.* An. 1682, in 12).

§. 14. ANDREAS TACQUET in *Optica* Perſpectivæ fundamenta jecit, & in *Catoptrica* ſpeculorum planorum & ſphæricorum proprietates bene demonſtrat. (§. 28, cap. 1), ſed Dioptricam non attingit. ISAACUS BARROWIUS in *Lectionibus Opticis*, quæ Lectionibus Geometri-

 cis

cis præmittuntur (§. 19, cap. 3), theoriam Catoptricæ & Dioptricæ demonstrat. Nec dubitamus, quin JACOBUS GREGORIUS in *Optica promota* multa præclara dederit, etsi nobis non visa. An. 1663, in 4. lucem adspexit.

§. 15. Utriusque Compendium dedit DAVID GREGORIUS in *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ sphæricæ* (*Oxonii* 1695, in reg. 8. plag. 7). Idem in linguam Anglicam vertit WILHELMUS BROWNE, M. D. & prolixum supplementum adjecit atque Introductionem præmisit. Prodiit secunda vice cum appendice J. T. DESAGULIERS, L. L. D. de telescopio reflectente cum epistolis, quas de eodem NEWTONUS & JACOBUS GREGORIUS ad se invicem scripsere, *Londini* An. 1735, in 8. reg. (plag. 20, Tabb. 4). Prima telescopii catoptrico-dioptrici idea debetur GREGORIO, qui eam describit in *Optica promota* p. 94. Sed eam perfecit NEWTONUS & tandem feliciſſime istiusmodi telescopium construxit J. HADLEY, atque nunc construuntur ab EDUARDO SCARLET, Optico Regio, ejusque filio. Descripsimus idem in Elementis Dioptricæ nostris.

§. 16. Opticam, Catoptricam & Dioptricam una exposuit ZACHARIAS TRABERUS, e Societate Jesu, in *Nervo Optico* (*Viennæ* An. 1675, in fol. 2 Alph. 16 plag. Tabb. 28). Multa in praxi jucunda habet, sed theoria exigui momenti. Quoad praxes opticas opus absolutum censeri potest JOHANNIS ZAHN *Oculus artificialis teledioptricus*. Editio altera auctior, sed vitiosior prodiit *Norimbergæ* An. 1702, in fol. (9 Alph. 8 plag.) cum figuris multis cum ligno, tum æri incisis. Huc etiam spectat ATHANASII KIRCHERI *Ars magna lucis & umbræ* (*Romæ* 1646, in fol. 10 Alph. 16 plag. Tabb. 34).

§. 17. JOHANNES CHRISTOPHORUS KOLHANS in *Tractatu Optico* (*Lips.* An. 1663, in 8. 1 Alph. 15 plag.) non contemnenda prorsus dedit excerpta cum ad theoriam, tum ad praxin opticam spectantia, retentis ipsorummet Autorum verbis. Omnes tres Opticæ partes discursu vulgari recensuit in gratiam artificum JOHANNES MICHAEL CONRADI in Optica Germanica, qaam sub titulo: *Der dreyfach geartete Sehe-Strahl*, *Coburgi* An. 1710, in 4. edidit (plag. 17, Tabb. 25).

§. 18. *De poliendis vitris Commentarios* reliquit HUGENIUS, qui inter posthuma leguntur (§. 35). Hac arte excelluit ipse: primus enim lentes objectivas tanta exactitudine paravit, ut iis pares nullibi reperirentur, quemadmodum in Astronomicis docuimus & Dioptricis. In Germania An. 1716, in 8. (plag. 14, Tab. 20) *Halæ* prodiit sub titulo: *CHRISTIAN GOTTLIEB HERTELS vollständige Anweisung zum Glasschleiffen, wie auch zu Verfertigung der optischen Maschinen*. Erat Autor Matheseos

Pro-

Professor in Academia illustri Lignicensi & in arte poliendi vitra plurimum exercitatus. Eandem notis illustravit JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, qui & ipse hanc artem non sine successu excoluerat. Prodierunt *Witteberga* An. 1719, in 8. (plag. 7, Tabb. 21) sub titulo: *Neue Anmerckungen vom Glasschleiffen.*

§. 19. Scriptis opticis accenseri merentur ea, in quibus microscopicæ observationes recensentur. Pertinent huc I°. ROBERTI HOOKE *Micrographia* Anglice scripta (*Londini* An. 1667, in fol. 3 Alph. 8 plag. Tabb. 38) II°. *Antonii van Leeuwenhoek* scripta varia; nempe 1) *Arcana Naturæ detecta*, *Delphis* An. 1695, in 4. (Alph. 2, plag. 6, Tabb. 11) 2) *Continuatio Arcanorum Naturæ detectorum* Ibid. An. 1697, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tab. 7) 3) *Arcana Naturæ ope & beneficio exquisitissimorum microscopiorum detecta*, *Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. Alph. 3, Tabb. 26) 4) *Continuatio epistolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinensem Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. (plag. 16½, Tabb. 10) 5) *Epistolæ ad Societatem Regiam Anglicam & alios illustres viros*, *Lugd. Bat.* 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 33). 6) *Epistolæ physiologicæ super compluribus naturæ arcanis*, *Delphis* An. 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 31). Titulus generalis: ANTONII A LEEWENHOEK *Opera omnia*, *seu Arcana naturæ ope exactissimorum microscopiorum detecta*, *experimentis variis comprobata*, *epistolis ad varios illustres viros*, *ut & ad integram*, *quæ Londini floret*, *sapientem Societatem datis comprehensa*, impressus Lugduni Batavorum & scriptis istis diverso tempore nec eadem prorsus forma editis in unum fasciculum collectis præfixus. III°. JOHANNIS FRANCISCI GRIENDELS VON AACH *Micrographia curiosa* Germanica (*Norimbergæ* An. 1687, in 4. plag. 9, Tabb. 35) IV°. PHILIPPI BONANNI *Micrographia curiosa*, adjuncta observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur (*Romæ* An. 1691, in 4. 2 Alph. 12 plag. Tabb. 68).

§. 20. Inter scriptores Perspectivæ omnium maxime commendatur DESARGUES, cujus *methodum universalem exercendi Perspectivam* gallice conscriptam edidit ABRAHAMUS BOSSE, ex Gallico in Belgicum sermonem transtulit J. BARA. Prodiit *Amstelodami* An. 1686, in 8. (plag. 12, & figurarum æri incisarum 1 Alph.).

§. 21. Nec parum Perspectivæ studiosum juvant ANDREÆ ALBERTI Libri duo *De Perspectiva*, (*Norimb.* An. 1670, in fol. plag. 19, Tabb. 15): primis vero tyronum conatibus respondet BERNHARDI LAMY *Perspectiva* Gallice conscripta (*Parisiis* An. 1701, in 8).

§. 22. Concinnas Praxium Per-

ſpectivæ demonſtrationes dedit JOH. FRANCISCUS NICERON ex Ordine Minimorum, in hac arte excellens, in *Thaumaturgo Optico*, cujus tantum pars prima *Pariſiis* 1646, in fol. prodiit (2 Alph. 18 plag. Tabb. 42). Poſt mortem ejus immaturam Anno 1652, prodiit *Perſpectiva curioſa* Gallice conſcripta in 4. ſub ejuſdem nomine, in libros quatuor diviſa, in qua plura continentur, quam in Thaumaturgo.

§. 23. Ad praxin properantibus & theoriam ſpinoſam averſantibus ſatisfacit Anonymus Gallus e Societate Jeſu in *Perſpectiva practica* Gallice *Pariſiis* An. 1642, in 4. publicata & a JOHANNE CHRISTOPHORO REMBOLDO Germanice verſa atque *Auguſtæ Vindelicorum* An. 1710, in 4. edita (1 Alph. 8 plag. cum 150 Tabulis æri inciſis atque textui inſertis). Enimvero An. 1663. prodiit editio altera duabus partibus & auctior, & quoad primam emendatior ac locupletior. (Tom. I, Alph. 2, plag. 10. Tom. II, Alph. 1, plag. 13. Tom. III, Alph. 2, plag. 8). In parte ſecunda docetur Perſpectiva corporum inclinatorum: in tertia agitur de laquearibus & anamorphoſibus opticis, catoptricis & dioptricis.

§. 24. Praxin Perſpectivæ multis exemplis illuſtrat P. ANDREAS PUZZO in *Architectura Pictorum & Sculptorum*. Tomus prior prodiit *Romæ* An. 1693, in fol. poſterior ibidem An. 1700, in fol. Uterque totidem continet Tabulas æneas, quot folia, nimirum prior 102; poſterior 120, Prior Germanice prodiit *Auguſtæ Vindelicorum* An. 1706, in fol. poſterior ibidem An. 1709.

§. 25. An. 1711, G. J. GRAVESANDIUS, Juris Doctor, nunc Mathematum Profeſſor Lugdunenſis, *Hagæ Comitum* idiomate Gallico evulgavit Tentamen de Perſpectiva, in 8. (plag. 12, Tabb. 32). Titulus libelli: *Eſſai de Perſpective*, in quo multiplices regulas ſeu methodos demonſtrat.

§. 26. Cæterum ſcriptoribus Opticis adhuc accenſendus eſt HONORATUS FABRI, e Societate Jeſu, qui in *Synopſi Optica* (*Lugd.* An. 1667, in 4. 1 Alph. 8 plag,) illa omnia, quæ ad Opticam, Dioptricam & Catoptricam pertinent, breviter quidem, accurate tamen demonſtrat. *

* Imprimis commendari meretur ROBERTI SMITH Optices Syſtema integrum, quod ſub titulo: *A compleat Syſtem of Opticks*, prodiit *Cantabrigiæ*, An. 1738, in 4. reg. (Tom. I: Alph. 1. plag. 15, Tabb. 45. Tom. II, Alph. 2, Tabb. 38).

CAPUT

CAPUT IX.

De Astronomia.

§. 1. Scripta astronomica sunt varii generis. Aut enim observationes recensent, aut calculos motuum cœlestium trigonometricos & geometricos exponunt, aut tabulas Astronomicas complectuntur, aut usum globi cœlestis, aut denique corporum mundanorum rationem declarant.

§. 2. Veterum observationes, quas inter eminent observationes HIPPARCHI, conservavit PTOLEMÆUS in *Almagesto*. An. 882, apud Saracenos observationibus operam dedit ALBATEGNIUS. Ab An. 1457, Norimbergæ iisdem incubuit JOHANNES REGIOMONTANUS (vero nomine MÜLLER), cui successere discipuli JOHAN. WERNERUS & BERNHARDUS WALTHERUS, ab An. 1475, usque ad An. 1504, observationes suas continuantes. REGIOMONTANI atque WALTHERI observationes prodiere *Norimbergæ* cum quibusdam aliis REGIOMONTANI atque PURBACHII scriptis An. 1544, in 4. (plag. 22). Titulus operis: *Scripta* JOHANNIS REGIOMONTANI *de Torqueto*, *Astrolabio armillari*, *Regula magna Ptolemaica baculoque astronomico & observationibus cometarum; item observationes motuum Solis ac stellarum tam fixarum, quam erraticarum; item libellus* M. GEORGII PURBACHI *de Quadrato Geometrico*. Ab An. 1509, COPERNICUS, post eum WILHELMUS Hassiæ Landgravius cum Mathematico CHRISTOPHORO ROTHMANNO & Mechanico suo JUSTO BYRGIO Cassellis, & TYCHO DE BRAHE Uraniburgi observarunt. Incepit observationes suas TYCHO An. 1582, easque continuavit usque ad An. 1601, majori & meliori instrumentorum apparatu, quam ante ipsum fecerat nemo. Omnes observationes hactenus recensitæ continentur in *Historia cœlesti*, quæ jussu FERDINANDI III, Imperatoris *Ratisbonæ* 1672, in fol. prodiit (12 Alph. 6 plag. Tabb. 3). Describuntur quoque in eadem instrumenta TYCHONIS; una exhibentur observationes MOESTLINI, SCHICKHARDI aliorumque. Ipse alias Tycho instrumenta sua descripsit An. 1602, in *Astronomiæ instauratæ Mechanica*, *Norimbergæ* An. 1602, in fol. edita (Alph. 1, plag. 11). WILHELMI vero Hassiæ Landgravii observationes, una cum observationibus REGIOMONTANI atque WALTHERI edidit WILLEBRORDUS SNELLIUS, *Lugduni Batavorum* An. 1618, in 4. (Alph. 1, plag. 13).

§. 3. Ma-

§. 3. Magis sumtuoso instrumentorum apparatu & majori studio, quam TYCHO, observationibus cœlestibus vacavit JOHANNES HEVELIUS, Consul Dantiscanus. Instrumentorum apparatum descripsit Tomo primo *Machinæ cœlestis* (*Gedani* An. 1673, in fol. reg. 5 Alph. 4 plag. Tabb. 30): Tomo secundo (*Gedani* An. 1679, in fol. 14 Alph. 6 plag.) observationes 48 annorum comprehendit. Dolendum vero, quod Tomi præsertim posterioris exemplaria pleraque ferali flamma fuerint absumta. Equidem ROBERTUS HOOKE in *Animadversionibus in Tomum primum* Anglico sermone editis *Londini* An. 1674, in 4. (plag. 11, Tabb. æn. 3) instrumenta *Heveliana* reprehendit ceu minus exacta; sed celeberrimus HALLEIUS, consensu Societatis Regiæ Britannicæ, Dantiscum An. 1679, profectus & instrumentorum, & observandi accurationem approbavit. Observationes, quas in gratiam hospitis instituit, una cum aliis reperiuntur in *Anno climacterico* s. *Rerum Uranicarum observationum quadragesimo nono* (*Gedani* 1685, in fol. 2 Alph. 6 plag. Tabb. 8). Jam ante An. 1661, celeberrimus Galliæ Astronomus ISMAEL BULLIALDUS Dantiscum venit Observatorium HEVELII visurus & modum ejus observandi examinaturus. Quid uterque, BULLIALDUS nimirum atque HALLEIUS, de eodem senserint; docent *Excerpta ex literis illustrium & clarissimorum virorum ad* D. JOH. HEVELIUM *perscriptis Judicia de rebus astronomicis ejusdemque scriptis*, quæ *Dantisci* An. 1683, in 4. (Alph. 1, plag. 5) *edidit* JOANNES ERICUS OLHOFIUS p. 67, 68, 71, 79, 187.

§. 4. In Anglia seculo superiori observandi studio clarus extitit JEREMIAS HOROCCIUS ab A. 1636 usque ad An. 1640. Ejus observationes ex epistolis ad GUIL. CRABTRIUM, suum in studiis astronomicis socium, excerptæ leguntur in *Operibus posthumis* (*Londini* An. 1673, in 4. 3 Alph. 12 plag. Tabb. 2). Adjiciuntur excerpta ex schediasmatis GUIL. CRABTRII de observationibus ab ipso institutis An. 1635, 36, 37 & 38.

§. 5. In Italia JOH. BAPTISTA RICCIOLUS superiori seculo observatorem egit, qui præcipuas observationes suas in *Astronomia Reformata* (*Bononiæ* An. 1665, in fol. 6 Alph. 5 plag.) cum selectis veterum & recentiorum observationibus contulit & de Astronomiæ perfectione inde judicium tulit.

§. 6. Selectæ celeberrimi CASSINI aliorumque observationes extant in præstantissimo opere, cujus titulus: *Recueil d'observations faites en plusieurs voyages par ordre de Sa Majesté, pour perfectionner l'Astronomie & la Géographie, avec divers Traités Astronomiques par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences.* (*Paris.* An. 1693, in fol. 6 Alph. 12 plag. Tabb. 11).

Vide

Vide supra §. 37. c. 1. Ejusdem CASSINI, aliorumque Astronomorum Regiorum, CASSINI *junioris*, MARALDI atque PHILIPPI DE LA HIRE observationes complures extant in *Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum*, qui quotannis prodeunt: de quibus supra (§. cit.). Habemus quoque observationes non contemnendas in *Transactionibus Anglicanis*, *Miscellaneis Berolinensibus*, *Commentariis Petropolitanis*, *Actis Eruditorum* & *Diario Trevoltiensi*. Vide supra (§. 36, 38, 39).

§. 7. In Anglia longa annorum serie observationes cœlestes continuavit observator celeberrimus JOANNES FLAMSTEDIUS. Quænam in historia ejus cœlesti, ab Astronomis dudum desiderata, essent comparitura, in *Miscellaneis Berolinensibus* p. 263 & seqq. docetur. An. 1712, *Historiam cœlestem* FLAMSTEDII edidit HALLEIUS *Londini* in fol. reg. (Alph. 6, plag. 8, Tabb. 5) Libris duobus, quorum prior exhibet Catalogum stellarum Fixarum Britannicum novum & locupletissimum, una cum earundem Planetarumque omnium observationibus, sextante, micrometro &c. habitis; posterior transitus siderum per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice complectitur. Nimirum An. 1704, aliquot Societatis Regiæ Sodalibus, FRANCISCO nimirum ROBARTES, CHRISTOPHORO WRENNO, ISAACO NEWTONO, DAVIDI GREGORIO & JOHANNI ARBUTHNOT ex chartis FLAMSTEDII observationes ejus edendas suis sumtibus commiserat serenissimus Daniæ Princeps GEORGIUS, Reginæ ANNÆ conjux: Sed cum moreretur, antequam liber observationum primus absolveretur, tandem Regina, FLAMSTEDII oculis in nascentia indies siderum phœnomena intentis & in ætate provecta minus acutis, hanc curam demandavit EDMUNDO HALLEIO, ut ea quæ adhuc deerant perficeret. Enimvero cum editio non prorsus esset ad mentem FLAMSTEDII, de nova ipse cogitavit: cui tamen immortuus est An. 1719, die ultima Decembris, cum magna ejus pars typis jam esset descripta, ita ut tandem denuo HALLEIUS editionem hanc novam ad umbilicum perducere teneretur. Prodiere itaque *Historiæ cœlestis Britannicæ* Volumina tria, Autore JOANNE FLAMSTEDIO, Astronomo Regio, *Londini* in fol. maj. An. 1725, (Alph. 13). Volumen I, continet stellarum fixarum & planetarum omnium observationes, sextante & micrometro peractas, subjunctis locis, quæ ex observationibus deducta sunt. Volumen II, complectitur fixarum stellarum & planetarum omnium transitus, per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice, nec non Solis, Lunæ & Satellitum Jovis observationes arcu meridionali habitas & loca planeta-

rum inde derivata ab An. 1689, ad An. 1720. Volumen III, comprehendit Historiam Astronomiæ, Catalogos fixarum ante autorem editos una cum ABRAHAMI SHARPII Indice fixarum australium in nostro hemisphærio non conspicuarum & Catalogum Britannicum Autoris ad A. C. 1689, cui subjunguntur longitudines & latitudines stellarum fixarum, quæ a Luna tegi possunt, sigillatim & appendicula Tabularum astronomicarum a SHARPIO constructarum. Optandum quoque foret, ut selectæ observationes Hafnienses ROEMERI, Berolinenses KIRCHII ac viduæ ipsius, Norimbergenses EIMARTI atque WURTZELBAUERI lucem publicam adspicerent.

§. 8. FRANCISCI BLANCHINI *Observationes astronomicas & geographicas per Italiam passim habitas* nuperrime *Veronæ* in fol. edi curavit EUSTACHIUS MANFREDI, Astronomus Bononiensis.

§. 9. Observationes physicæ, mathematicæ, atque botanicæ jussu Regis Christianissimi in America Meridionali & India occidentali ab An. 1701, usque ad annum 1712, a LUDOVICO FEUILLE'E, Minimo, factæ sub titulo: *Journal des Observations physiques, mathématiques, & botaniques* prodiere *Parisiis* duobus Vol. in 4. reg. 1714, & 1725, (Vol. I, Alph. 4, plag. 6, Tabb. æn. 66. Vol. II, Alph. 3, plag. 5, Tabb. æn. 57, & An. 1729. ST. SOUCIET, e Societate Jesu, idiomate Gallico *Paris.* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 18, Tabb. 8) publicæ luci exposuit *Observationes mathematicas, astronomicas, geographicas, chronologicas & physicas, ex antiquissimis Sinarum libris excerptas, & recentius a Patribus Societatis in India & China factas.* Addit An. 1732, Tomum secundum, qui continet *Historiam Astronomiæ Sinarum* a R. P. GAUBIL e Societate Jesu conscriptam, cum dissertationibus (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 3). Huc etiam referendæ sunt FRANCISCI NOEL, Societatis Jesu, *Observationes mathematicæ & physicæ in India & China factæ ab* An. 1684, *usque ad* An. 1708, quæ *Pragæ* 1710, in 4. (plag. 14, Tab. 1) prodierunt.

§. 10. Astronomiam Geometricam inter veteres justo volumine exposuit CLAUDIUS PTOLEMÆUS anno Christi 147 mortuus. Opus ejus, quod μεγάλη Σύνταξις inscribitur, A. C. 827, jussu MAIMONIS Regis Saracenorum in Arabicum translatum & An. 1528 ex Arabico in Latinum versum a GEORGIO TRAPEZUNTIO & a LUCA GAURICO Mathematum Professore Neapolitano revisum, illoque anno primum editum. An. 1551, idem cum ejusdem PTOLEMÆI scriptis Astrologicis, libris nempe quatuor *de judiciis*, *Centiloquio* & *significationibus stellarum inerrantium* sub titulo: Cl. PTOLEMÆI *omnia, quæ extant, Opera præter Geographiam,*

graphiam, *Basileæ* in fol. (*6* Alph.) opera ERASMI OSWALDI recusum.

§. 11. Cum ipsum Astronomiam integram complectatur, sed ad captum tyronum minime sit accommodatum; GEORGIUS PURBACHIUS in commodiorem formam id redigere cœpit. Sed cum vix cœpto labore rebus humanis valedicere cogeretur; REGIOMONTANUS discipulus, suasu Præceptoris, telam pertextam absolvit. Recusi sunt ejus Libri tredecim *in* PTOLEMÆI *magnam compositionem*, *quam Almagestum vocant*, *Noribergæ* 1550, in fol. (2 Alph. 11 plag.) & in iis uuiversa doctrina de cœlestibus motibus, magnitudinibus, eclipsibus &c. in epitomen redacta proponitur. Commendantur merito Astronomiæ studiosis, præsertim si qui Astronomiam veterem cognoscere in animum induxerint.

§. 12. Juxta formam *Almagesti* inter Arabes ALBATEGNIUS opus *de Scientia stellarum* composuit, *Norimbergæ* An. 1537, & *Bononiæ* An. 1545, in 4. editum, in quo ex propriis observationibus Astronomiam perficere studet.

§. 13. Seculo decimo sexto NICOLAUS COPERNICUS in libris *6 Revolutionum cœlestium* aliquoties recusis, resuscitato PHILOLAI de motu Telluris dogmate, primus ad theoriam cœlo consonam fundamenta posuit. Prostat inter alias editiones *Basileensis* An. 1566, in fol. (Alph. 4. plag. 14). COPERNICUM secutus PHILIPPUS LANSBERGIUS theorias motuum cœlestium faciles dedit (§. 26, cap. 1).

§. 14. Ex adverso autem CHRISTIANUS SEVERINUS LONGOMONTANUS in *Astronomia Danica*, in qua integram Astronomiam pertractat & regulas exemplis veris illustrat, theorias intricatiores proposuit, cum motum Telluris annuum circa Solem in Astronomiam cum TYCHONE admittere nollet. (*Amstelod.* An. 1640, in fol. *6* Alph.) Etenim extra omnem controversiam positum est, motus Planetarum per hypothesin Terræ motæ non modo facilius, quam in hypothesi Terræ quiescentis explicari posse; verum etiam loca planetarum in ista computata cum cœlo demum consentire. Unde etiam Inquisitores in Italia permittunt, ut eadem utantur Astronomi, etsi eam pro veritate demonstrata venditari non ferant.

§. 15. Omnes omnino Astronomi usque ad KEPPLERUM motum planetarum circularem statuerunt: unde theoriæ ipsorum cœlo non satis responderunt. Hanc Astronomiam circularem omnium optime exposuit ANDREAS TACQUET in octo de *Astronomia* libris (§. 28, cap. 1). Dolendum vero, quod præcepta nullis exemplis illustraverit, ut magis inservirent studiis tyronum.

§. 16. Enimvero vir acerrimi judicii ingeniique sagacissimi JOHAN-

NES KEPLERUS observationibus TYCHONIS (quas etiam adhibuerunt LONGOMONTANUS atque LANSBERGIUS) feliciſſime uſus in *Commentariis de motibus ſtellæ Martis* ſeu *Aſtronomia nova* αἰτιολογητῳ An. 1609, in fol. (4 Alph.) theoriam planetarum ellipticam propoſuit & in *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ* (*Franc.* 1635, in 8. 2 Alph. 15 plag.) ad omnium planetarum motus ſupputandos adhibuit, ac primus in cauſas phyſicas motuum cœleſtium inquirere cœpit. Hanc theoriam cauſis phyſicis convenientem demonſtravit NEWTONUS lib. 3 Princ. Mathem. Philoſ. Nat. itemque LEIBNITIUS in Tentamine de cauſis motuum cœleſtium phyſicis, quod legitur in *Actis Eruditorum* An. 1689, p. 82, quod idem ſuo modo oſtendere conatus PHILIPPUS VILLEMOT in *Novo ſyſtemate motus Planetarum*, *Lugduni* An. 1707, in 12. (plag. 12, Tabb 12) edito. Phænomenis rectius, quam cæteras hypotheſes, ſatisfacientem deprehenderunt Aſtronomi.

§. 17. Equidem KEPLERI inventa ſprevit LANSBERGIUS ſuaque iiſdem antepoſuit: ſed optime illum contra hujus inſultus defendit HOROCCIUS in poſthumis (§. 4), qui in extollendis laudibus KEPLERI, a quo, ſub initium ſtudii aſtronomici, LANSBERGII magnificis promiſſis & nimium acerbis in KEPLERUM ſtricturis factus fuerat alienior, veluti extra ſeipſum rapitur.

§. 18. ISMAEL BULLIALDUS in *Aſtronomia Philolaica* (*Pariſiis* An. 1645, in fol. 7 Alph. 20 plag.) KEPLERI theoriam emendare conabatur, ut ſcilicet calculus magis geometricus fieret, cum KEPLERUS regula poſitionum interdum uti cogatur (§. 691, *Aſtron.*): oſtendit vero SETHUS WARDUS, Aſtronomiæ in Academia Oxonienſi Profeſſor, in *Inquiſitione in Aſtronomiam Philolaicam* BULLIALDI, quæ Tractatui de Cometis ſubjecta prodiit *Oxonii* An. 1653, in 4. (plag. 14), errores quoſdam ab ipſo fuiſſe commiſſos: quos agnoſcens BULLIALDUS in *Fundamentis Aſtronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & aſſertis, adverſus* WARDI *impugnationem* (*Pariſiis* An. 1657, in 4. plag. 7) emendavit. Cæterum WARDUS *Ideæ* quoque *Trigonometriæ demonſtratæ*, quæ cum prælectione *de Cometis*, *Oxonii* An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, inquiſitionem aliquam in BULLIALDI Aſtronomiæ Philolaicæ fundamenta adjecit.

§. 19. SETHUS WARDUS in *Aſtronomia Geometrica* (*Londini* 1656, in 8. reg. 14½ plag.) methodum geometricam propoſuit motus ſiderum computandi; ſed a veris motuum regulis per KEPLERUM ſtabilitis recedit. Eandem anno ſequenti propoſuit *Comes* DE PAGAN in *Theoria Planetarum*, *Pariſiis* An. 1657, in 4. idiomate patrio edita. Non ignoravit eam KEPLERUS; ſed ex *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ* haud obſcure

ſcure colligitur, quod ideo rejecerit, quia veris naturæ legibus adverſam reperit.

§. 20. BULLIALDI hypotheſin excoluit VINCENTIUS WING in *Aſtronomia Britannica* (*Londini* An. 1669, in fol. 7 Alph. 5 plag.) ubi præcepta ſingula Aſtronomiæ practicæ veris exemplis illuſtrantur ad captum tyronum ſtudii Aſtronomici. Præmittit *Trigonometriam* planam & ſphæricam, in qua exemplis illuſtrantur problemata, & in ſphærica exhibet regulam catholicam NEPERI.

§. 21. *Wardianam* ad numeros revocavit JOHANNES NEWTON in *Aſtronomia Britannica* patrio ſermone conſcripta (*Lond.* 1657, in 4. 1 Alph. 20 plag.). Eandem excoluit THOMAS STREETE in *Aſtronomia Carolina*, *Londini* An. 1661, in 4. (plag. 29) primum edita & non ſine augmento ibidem 1710. in 4. (2. Alph. plag. 3,) recuſa. Id peculiare habet, quod motum Apheliorum & Nodorum ſuſtulerit. Aſtronomiam hanc Carolinam ex idiomate Anglico in Latinum tranſtulit GABRIEL DOPPELMAYER & *Norimbergæ* An. 1705, in 4. (Alph. 1, plag. 13, Tabb. 5) edidit.

§. 22. Omnia Aſtronomorum tam veterum, quam recentiorum, hypotheſes atque inventa, quæ tunc temporis proſtabant, in unum volumen congeſſit JOHANNES BAPTISTA RICCIOLUS e Societate Jeſu in *Almageſto Novo* (*Bonon.* An. 1651, in fol. 16½ Alph.). Contra DAVID GREGORIUS in *Elementis Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ* (*Oxoniæ* 1702, in fol. 5 Alph. 12 plag.) recentiorem Aſtronomiam expoſuit, COPERNICI, KEPLERI atque NEWTONI inventis ſuperſtructam, quorum ille verum ſyſtema mundi, iſte veras planetarum orbitas ac motuum leges, hic tandem omnium cauſas phyſicas detexit. Multum præſtantiæ operis accederet, ſi numeris ex recentioribus obſervationibus illuſtraretur. In Anglia in linguam Anglicam verſa ſunt hæc Aſtronomiæ Elementa: Latina vero recuſa ſunt *Genevæ* An. 1726, in 4. (Alph. 5, Tabb. 46) cum nonnullis additamentis.

§. 23. Nucleum Aſtronomiæ recentioris exhibuit GUILIELMUS WHISTON in *Prælectionibus Aſtronomicis* (*Cantabrigiæ* An. 1707, in 8. reg. 1 Alph. 6 plag.) ſolam tamen partem theoricam pertingit. Idem fuit inſtitutum JOHANNIS KEILL in *Introductione ad veram Aſtronomiam* (*Oxoniæ* An. 1718, in 8. Alph. 1, plag. 9½, Tabb. 2), in qua recentiſſima continentur Aſtronomorum inventa. Alias Tyronibus inprimis commendandi ſunt NICOLAI MERCATORIS *Inſtitutionum Aſtronomicarum* Libri duo (*Londini* An. 1676, in 8. 1 Alph.), in quo & Sphærica, & theorica, juxta hypotheſes tam veteres, quam recentiores, breviter explicatur & exemplis illuſtratur, calculus quoque aſtronomicus perſpicue docetur.

§. 24. Quodsi cui volupe fuerit, theoricas Veterum animi gratia cognoscere; ei satisfaciet PURBACHIUS in *Theoricis Planetarum* sæpius editis. Recusæ sunt *Basileæ* An. 1569, in 8. cum REGIOMONTANI *disputationibus contra Cremonensia in planetarum theoricas deliramenta* & JOHANNIS ESSLERI *speculo Astrologico* (plag. 18). Accessere huic editioni CHRISTIANI WURSTISII, Mathematum Professoris Basileensis, *quæstiones novæ in illas theoricas* (1 Alph. 5 plag.). Explicat autem PURBACHIUS in tyronum gratiam solas theoricas planetarum, forma calculi geometrici neglecta, quæ ex REGIOMONTANI *Epitome Almagesti* PTOLEMÆI hauriri debet. Hasce Theoricas prolixo ac perspicuo Commentario illustravit ERASMUS OSWALDUS SCHRECKENFUCHSIUS, qui *Basileæ* An. 1556, in fol. (Alph. 5, plag. 5) prodiit, ita ut Astronomiam veterem, qualem tradidit PTOLEMÆUS, omnium optime ex hoc opere haurire possint tyrones. Theoricam Astronomiam tantummodo explicavit in gratiam tyronum PURBACHIUS, quia isto tempore in Scholis doctrina sphærica tradebatur ex JOANNIS DE SACRO BOSCO libello *de Sphæra*, sæpissime recuso; quem prolixo Commentario illustravit CLAVIUS Tomo tertio Operum (§. 24). MICHAEL MOESTLINUS, Matheseos Professor Tubingensis, KEPLERI Præceptor, in *Epitome Astronomiæ* (*Tubingæ* An. 1610, in 8. 1 Alph. 12 plag.) non modo theoricas Planetarum, sed & partem Astronomiæ sphæricam explicat.

§. 25. Tabulæ Astronomicæ antiquissimæ sunt *Ptolemaicæ*, in PTOLEMÆI *Almagesto*; sed hodie cum coelo non amplius consentiunt. Eas An. 1252, corrigi curavit ALPHONSUS XI Rex Castiliæ, usus inprimis opera ISAACI HAZAN Judæi, impensis 400000 aureorum factis. Hinc enatæ sunt *Tabulæ Alphonsinæ*, quibus ipse Rex præfationem præmisit. Sed mox harum etiam defectum agnoverunt Astronomi periti PURBACHIUS & REGIOMONTANUS: unde REGIOMONTANUS & post ipsum WALTHERUS atque WERNERUS observationibus cœlestibus incubuerunt; non tamen fata permisere, ut iis emendandis manum admoverent. Sane *Tabulæ resolutæ*, quas dedit REGIOMONTANUS, ex Alphonsinis derivatæ. Hasce correctas & locupletatas edidit SCHONERUS An. 1536. Ea reperire licet in Operibus ejus mathematicis, de quibus postea dicemus. Neque ab his abludunt *Tabulæ resolutæ de supputandis siderum motibus* JOANNIS VIRDUNGI HASFURDII, quas An. 1542, *Norimbergæ* edidit JACOBUS CURIO, nunquam antea typis excusas, in 4. (plag. 15), nisi quod sint breviores.

§. 26. NICOLAUS COPERNICUS in libris *Revolutionum cœlestium* tabulis Alphonsinis alias substituit ex recentioribus & partim propriis observationibus

tionibus a se supputatas; sed ex COPERNICI observationibus & theoriis mox ERASMUS REINHOLDUS *Tabulas Prutenicas* procudit, aliquoties recusas. Utor ego editione *Tubingensi* An. 1571, in 4. 2 Alph. 15 plag.

§. 27. Tabularum Prutenicarum imperfectionem juvenis agnovit TYCHO DE BRAHE: qua agnita permotus, ut tanto cum fervore observationes cœlestes venaretur. Ipse tamen nonnisi Solis ac Lunæ motus inde restituit *Progymnasmatum* Tomo primo. Sed mox iisdem utebantur LONGOMONTANUS, qui in *Astronomia Danica* exemplo PTOLEMÆI & COPERNICI theoricis singulorum Planetarum *Tabulas* motuum subjunxit, *Danicarum* nomine hodienum celebratas, & KEPLERUS, cujus opera prodiere *Tabulæ Rudolphinæ* (*Ulmæ* An. 1627, in fol. 2 Alph. 20 plag.), quæ hodienum magno in pretio habentur, anterioribus omnibus prælatæ. Has in aliam formam transmutavit MARIA CUNITIA, cujus *Urania protia* sive *Tabulæ Astronomicæ mire faciles* vim hypothesium physicarum a KEPLERO proditarum complexæ, facillimo calculandi compendio, sine ulla Logarithmorum mentione phænomenis satisfacientes Latine & Germanice *Olsnæ* in Silesia An. 1650, in fol. (6 Alph. 4 plag.) prodiere, ut scilicet calculus *Rudolphinus* difficilis facilior redderetur. Idem institutum fuit MERCATORIS in *Astronomicis Institutionibus* (§. 23) & JOH. BAPTISTÆ MORINI, cujus *Tabulæ Rudolphinæ* in compendium redactæ versioni Latinæ Astronomiæ Carolinæ STREETII subjunctæ (§. 21).

§. 28. Equidem LANSBERGIUS Tabularum Rudolphinarum fidem sublestam reddere tentavit & *Tabulas motuum cœlestium perpetuas*, quas vocat, condidit (§. 26, cap. 1) sed non solum HOROCCIUS hominis arrogantiam retudit in *Astronomia Kepleriana defensa*, quæ maximam posthumorum partem absolvit (§. 4); verum etiam reliqui Astronomi parum eidem tribuerunt. Similiter *Rudolphinarum* autoritatem non imminuere *Tabulæ Britannicæ* WINGII (§. 20), quæ in ipsius *Astronomia Britannica* leguntur, & NEWTONI, quas in sua *Astronomia Britannica* proposuit (§. 21), nec Gallicæ Comitis DE PAGAN (*Paris.* An. 1658, in 4. 1 Alph. 11 plag.), *Novalmagesticæ* RICCIOLI, quæ extant in ejusdem *Astronomia Reformata* (§. 22), *Philolaicæ* BULLIALDI, quæ leguntur in *Astronomia Philolaica* (§. 18) & *Carolinæ* STREETII in *Astronomia Carolina* (§. 21). Inter meliores tamen censentur Philolaicæ & Carolinæ, ita ut ob benignum ELAMSTEDII, optimi hac in re arbitri, judicium Carolinas *Prælectionibus* suis *Astronomicis* subjunxerit WHISTON (§. 23).

§. 29. Novas quoque Tabulas ex datis *Keplerianis* & *Bullialdinis* juxta propriam hypothesin Cono-ellipticam

cam supputavit JOH. JACOBUS ZIMMERMANN Ecclesiæ Würtemberga-Bieticanæ Diaconus, in *Prodromo Bicipite Cono-ellipticæ & a priori demonstratæ Planetarum Theorices* (*Stutgardiæ* An. 1679, in 4. plag. 15); sed nullam hactenus in foro Astronomico autoritatem adeptæ.

§. 30. *Tabulæ* omnium novissimæ sunt *Ludovicianæ*, quas Astronomus præclarus PHILIPPUS DE LA HIRE ex solis observationibus, citra ullius hypotheseos subsidium, deduxit: quod ante inventa micrometra, tubos & horologium oscillatorium impossibile habebatur. Prodiere *Parisiis* An. 1702, in 4. (1 Alph. 4 plag. Tabb. 4) cum ante jam An. 1687, Tabulæ Solares & Lunares sub titulo *partis prioris Tabularum Astronomicarum* (in 4. plag. 17) lucem adspexissent. Haberi possunt pro Tabulis Rudolphinis correctis. Dudum etiam in manibus Astronomorum versantur JOH. DOMINICI CASSINI *Tabulæ astronomicæ* * & in Anglia novas condidit HALLEIUS.

§. 31. JOHANNES HEVELIUS in *Prodromo Astronomiæ* (*Gedani* An. 1690, in fol. 4 Alph. 7 plag. Tab. 1) cum *Catalogo fixarum ex propriis observationibus deducto* Tabulas quoque Solares exhibuit domesticis observationibus superstructas, quæ præstantissimæ habentur. Optandum vero fuisset, ut fata permisissent, quo reliquorum quoque Planetarum Tabulas conderet observationum suarum fructum laturus celeberrimus Autor.

§. 32. Primus fixarum Catalogum confecit ex domesticis observationibus HIPPARCHUS, quem ad suum tempus reductum PTOLEMÆUS exhibuit in *Almagesto* lib. 7. Novum dedit TYCHO *Progymnasmatum* Tomo primo p. 257, & seqq. quem extendit KEPLERUS in Rudolphinis. Exhibet fixarum Catalogum, sed tantummodo correctum, non vero ex propriis observationibus conditum RICCIOLUS in *Astronomia Reformata*. Ast *Tabula Longitudinis* ac *Latitudinis stellarum fixarum* ex observatione ULUGH BEIGHII, TAMERLANI Magni Nepotis, ex MSC. Persicis Latine vertit, Commentariis illustravit & *Oxonii* An. 1665, in 4. (1 Alph. 13 plag.), edidit THOMAS HYDE. Addit MUHAMMEDIS TIXINI *Tabulas declinationum & ascensionum rectarum*. HEVELIUS *in Prodromo* catalogos fixarum omnes, qui hactenus prostant, una exhibet atque inter se comparat.

§. 33. Enimvero locupletissimus Fixarum omnium, quæ conspici possunt, ex propriis observationibus conditus a FLAMSTEDIO & sub titulo: *Catalogi Fixarum Britannici*, exhibetur in Astronomi summi Historia

* Edidit nuperrime JACOBUS CASSINI Domin. filius, *Tabulas Astronomicas*, una cum *Elementis Astronomiæ* gallice, *Parisiis*, in 4. 2 Vol. An. 1740. Primum volumen, quod Astronomiam complectitur, habet Alph. 3, plag. 15, Tabb. 20. Alterum quod Tabulis destinatur, constat Alph. 1, plag. 3, Tabb. 5.

ſtoria cœleſti, de qua abunde diximus ſuperius (§. 7).

§. 34. Aſtra deſcribunt & ſchematiſmis illuſtrant JOHANNES BAYERUS in *Uranometria*, *Ulmæ* An. 1661, quæ prodiit textu in 4. figuris in folio impreſſis (plag. 13, Tabb. 48), qua in citandis ſtellis utuntur Aſtronomi, & JOHANNES HEVELIUS in *Firmamento Sobieſciano* (*Gedani* An. 1690, in fol. plag. 6, Tabb. æn. 54). Optandum vero fuiſſet, ut literas, quibus ad indigitandas ſtellas uſus fuit BAYERUS, etiam HEVELIUS retinuiſſet: id quod fecit JOHANNES FLAMSTEDIUS in opere magnifico *Atlantis cœleſtis*, quod *Londini* An. 1729, in fol. reg. (plag. 5, Tabb. 29) prodiit. Compendia uſibus tyronum ſervientia ſunt ÆGIDII STRAUCHII *Aſtrognoſia* (*Wittebergæ* An. 1684, in 12. plag. 9, Tabb. 25) & WILHELMI SCHICKARDI *Aſtroſcopium* (*Lipſiæ* An. 1698, in 12. plag. 6, Tabb. 2).

§. 35. Globi cœleſtis conſtructionem & uſum perſpicue explicavit SCHONERUS in Tractatu, qui inter opera ipſius extat. Recentius præter alios uſum globi cœleſtis docent GUILIELMUS BLEAU in *Inſtitutione Aſtronomica de uſu globorum* (*Amſtelod.* An. 1690, in reg. 8. plag. 16) & BION in libro Gallico ejuſdem argumenti, qui ſub titulo *Uſage des Globes céleſtes & terreſtres, & des ſphéres*, *Pariſiis* An. 1699, in 12. reg. (16 plag. Tabb. 26) prodiit, ac nuper auctior recuſus.

§. 36. Librum BIONIS Germanice vertit & annotationibus nonnulliſque additamentis locupletavit D. CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGER. Prodiit *Lemgoviæ* ſub titulo: *Des Herrn BIONS Abhandlung von der Welt-Beſchreibung und dem Gebrauch derer Himmels und Erd-Kugeln auch Sphären* An. 1736, in 8. (Alph. 1, plag. 19, Tabb. 35). Explicat hic Autor in altera præſertim editione, quæ ex Aſtronomia & Geographia tanquam cognita ſupponi debent, ſiquidem uſum utriuſque Globi, terreſtris ſcilicet ac cœleſtis, intelligere volueris. Adduntur etiam phyſica de Meteoris & alia, quæ ad Calendarii notitiam faciunt.

§. 37. Cum LOTHARIUS ZUMBACH DE KOESFELD, Med. D. poſtea Matheſeos Profeſſor in illuſtri Collegio Carolino, quod Caſſellis erat, novos Globos, cœleſtem juxta Catalogum fixarum HEVELII & terreſtrem ex recentiſſimis obſervationibus, GERARDO VALK chalcographo conſtruxiſſet, adornationem quoque & diſtributionem ac uſum Globorum deſcripſit. Enimvero quia Globus cœleſtis tantummodo ſatisfacit phænomenis primi mobilis, novum excogitavit inſtrumentum aſtronomicum, quale adhuc deſiderari arbitrabatur, quo loca & motus Planetarum atque ſtellarum fixarum proprii in longitudinem & latitu-

latitudinem Zodiaci, eclipses Solis & Lunæ, occultationes stellarum, aliaque plurima inde derivata, absque calculo exacte, facile, ac promte exhibentur. Instrumentum hoc *Planetolabium* appellavit & GERARDUS VALK dextre idem præparavit. Descriptioni itaque Globorum adjunxit descriptionem Planetolabii sui, explicans omnem ejus rationem & usum. Utraque descriptio sub titulo: *Praxis Astronomiæ utriusque, ut & Geographiæ exercita per usum Globi cœlestis & Terrestris, tum & Planetolabii*, prodiit *Amstelodami* An. 1700, in 4. Descriptio globorum constat plag. 18, Tabb. 4. Planetolabii plag. 9, Tabb. 2. Supponit illa ad manus esse Globos, hæc Planetolabium. Equidem SCHONERUS jam invenerat Organum Uranicum, quod vocat, e quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, & quod sub finem operum describitur; cum tamen ejus constructio nitatur hypothesibus Veterum, ZUMBACHII vero Planetolabium secundum hypothesin recentiorem ellipticam, & *Bullialdi* inprimis Astronomiam Philolaicam fuerit constructum, & multo accuratius exhibeat loca planetarum; quin non inutilem operam sumserit ZUMBACHIUS dubitandum non est. Ne quid in mechanica Astronomiæ Theoricæ parte desiderari posset, addidit idem *Jovilabium* & *Saturnilabium*, quorum isto loca Satellitum Jovis, hoc autem loca Satellitum Saturni, absque calculo, ad datum quodcunque tempus determinantur. *Descriptio Jovilabii* prodiit *Amstelodami* An. 1716, in 4. (plag. 6, Tab. 1); *Saturnilabii* vero ibid. An. 1726, in 4. (plag. 9, Tabb. 2).

§. 38. Construxit ZUMBACHIUS Planetolabium suum ad imitationem Astrolabii, instrumenti ad explicanda phænomena motus primi dudum adhibiti. Astrolabii constructionem & usum rigidissime demonstravit CLAVIUS in Tractatu *de Astrolabio*, qui in Operibus ejus legitur (§. 24, cap. 1). Etsi autem CLAVIUS tantummodo de polari, quod vocatur, egerit; tanta tamen usus prolixitate & schemata construxit tam implexa ac intricata, ut a nullo mortalium totum fuisse perlectum judicet TACQUETUS. Quamobrem ipse lib. 3 Opticæ, qui de projectione astronomica agit, doctrinam hanc magis perspicue proponit, & non minus æquinoctiale, quam polare explanat. Ceterum quoad doctrinam de projectione sphæræ, tam orthographica, quam stereographica, commendari meretur Tractatus, quem sub titulo: *A Treatise of the sphere* patrio sermone *Londini* An. 1714, edidit JOANNES WITTY (plag. 15, Tabb. 10). Tyronibus autem, qui usum Astrolabii cognoscere student, satisfaciet BION in Tractatu, qui *Parisiis* An. 1702, in 12. reg. (plag. 10½, Tabb. 9) sub titulo: *L'Usage des Astrolabes tant universels que particuliers* lucem adspexit.

§. 39. Ad

§. 39. Ad naturam ſiderum & rationem univerſi cognoſcendam conducunt, præter RICCIOLUM in Almageſto, CHRISTOPHORI SCHEINERI *Roſa Urſina* (*Bracciani* An. 1626, uſque ad An. 1630, in fol. 11 Alph. cum figuris multis textui inſertis) opus de maculis ſolaribus abſolutiſſimum; ejuſdem *Diſquiſitiones Mathematicæ de controverſiis & novitatibus aſtronomicis* (*Ingolſtadii* An. 1614, in 4. plag. 12); opuſculum *de refractionibus cæleſtibus* (*Ingolſtadii* An. 1617, in 4.) & ejuſdem *Sol ellipticus* (*Auguſtæ Vindelicorum* in 4. plag. 5); GALILÆI Tractatus *de maculis ſolaribus* (*Romæ* An. 1613) & *Nuncius ſidereus* aliquoties recuſus; ejuſdem *Dialogi de Syſtemate mundi* (*Lugd. Bat.* An. 1699, in 4. 3 Alph.), opus lectu digniſſimum; JOHANNIS KEPLERI Tractatus Germanicus *de Cometa* anni 1607, (*Halæ* 1608, in 4. plag. 5) & *De Cometis libelli tres* (*Auguſtæ Vindelicorum* An. 1619, in 4. plag. 20, Tab. 1): ejuſdem *Prodromus diſſertationum coſmographicarum, continens Myſterium coſmographicum de admirabili proportione orbium cæleſtium, deque cauſis cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonſtratum per quinque regularia corpora Geometrica*, cum Narratione GEORGII JOACHIMI RHETICI de libris revolutionum NICOLAI COPERNICI (*Tubingæ* An. 1596, in 4. 1 Alph.): ejuſdem *Somnium* ſeu *opus poſthumum de Aſtronomia lunari* (*Francof.* An. 1634, in 4. 1 Alph.): ejuſdem *Harmonica Mundi* (*Lincii* An. 1619, in fol. 3 Alph. 13 plag.): ejuſdem *Hyperaſpiſtes* TYCHONIS (*Franc.* An. 1625, in 4. plag. 28) adverſus SCIPIONIS CLARAMONTII *Antitychonem*, in quo contra TYCHONEM BRAHE demonſtrare ſatagit cometas eſſe ſublunares, non cœleſtes (*Venetiis* An. 1621, in 4. 2 Alph. 2 plag.); HEVELII *Selenographia* (*Gedani* An. 1647, in fol. 6 Alph. 10 plag. Tabb. 111), in quo ejus facies ſecundum omnes phaſes accuratiſſime delineatur: ejuſdem *Prodromus Cometicus*, quo hiſtoria Cometæ An. 1664 exorti, curſum, facieſque diverſas capitis ac caudæ, accurate delineatas complectens, nec non *Diſſertatio de Cometarum omnium motu, generatione, variiſque phænomenis* exhibetur (*Gedani* An. 1665, in fol. plag. 17, Tabb. 3): ejuſdem *Deſcriptio Cometæ* An. 1664, (*Gedani* An. 1666, in fol. 2 Alph. 5 plag. Tabb. 7): ejuſdem *Epiſtola de Cometa* An. 1672, (*Gedani* An. 1672, in fol. 2 plag. Tab. 1): ejuſdem *Cometographia* (*Gedani* An. 1668, in fol. 10 Alph. 19 plag. Tabb. 38), opus de Cometis abſolutiſſimum: ejuſdem *Diſſertatio de nativa Saturni facie* (*Gedani* An. 1656, fol. 12 plag. Tabb. 9), ubi phaſes Saturni delineat & ad cauſas ſuas revocare ſtudet: ejuſdem *Mercurius in Sole viſus, cum* HOROCCII *Venere in Sole viſa, & Hiſtoria*

stellæ miræ (*Gedani* An. 1662, in fol. 2 Alph. 2 plag. 10 Tabb.); CHRISTIANI HUGENII *Systema Saturninum* (*Hagæ Comitis* An. 1659, in 4. plag. 12), in quo annulus Saturni describitur & unus ejus satellitum annunciatur, & inprimis ejusdem *Cosmotheoros* (ibid. An. 1698, in 4. plag. 18, Tabb. 5, item *Leoburgi* 1704, in 8. plag. 8, Tabb. 5), in quo natura planetarum ex conjecturis probabilibus eruitur: FRANCISCI BLANCHINI *Hesperi & Phosphori Nova phænomena*, *sive Observationes circa Planetam Veneris* (*Romæ* An. 1728, in fol. Alph. 1, plag. 2, Tabb. 10), in quo opere maculæ Veneris exactissime delineantur, & Veneri eadem opera impenditur, quam in Luna consumsit HEVELIUS, præter alia ad parallaxin Veneris & ejus a Terra distantiam spectantia: DE MAUPERTUIS Discursus Gallice conscriptus *de Figuris differentibus astrorum* (*Paris.* An. 1732, in 8. plag. $5\frac{1}{2}$): JACOBI BERNOULLI *Conamen novi systematis Cometarum* (*Amstelodami* An. 1682, in 8. $6\frac{1}{2}$ plag. Tabb. 8): JOH. BAPTISTÆ DU HAMEL *Astronomia Physica* (Tom. 1. Operum Philos. *Norimb.* An. 1681, in 4): WILHELMI DERHAM *Theologia Astronomica*, quæ sub titulo: *Astro-Theology*, *Londini* An. 1715, in 8. (plag. 20, Tabb. 3) prodiit, & *Hamburgi* ex Anglico sermone in Germanicum translata lucem adspexit.

§. 40. Huc etiam referendi sunt Autores qui motuum cœlestium causas physicas tradere aggressi sunt; KEPPLERUS in Physica cœlesti seu Commentariis de motibus stellæ Martis, & in Epitome Astronomiæ Copernicanæ (§. 16), NEWTONUS in Principiis Philos. Natur. Mathem. cum GREGORIO in Elementis Astronomiæ (§. cit.) VILLEMOT supra laudatus (§. cit.): & Cel. J. POLENUS in *Dialogo de Vorticibus cœlestibus* (*Patavii* An. 1712, in 4. 1 Alph. 6 plag. 7 Tabb.).

§. 41. Systema Copernicanum defendunt, præter GALILÆUM ante laudatum in Dialogis de Systemate mundi (§. 39), peculiaribus scriptis PETRUS MEGERLINUS, Professor Mathematum Basileensis in *Systemate mundi Copernicano argumentis invictis demonstrato* (*Amstelodami* An. 1682, in 8. plag. 6, Tabb. 3); BULLIALDUS in *Philolao ab inferis resuscitato* seu *Dissertatione de vero systemate* (*Amstelod.* An. 1629, in 4.), PETRUS HORREBOWIUS Mathematum Professor Hafniensis, in *Copernico triumphante*, sive *de parallaxi Orbis annui Tractatu epistolari* (*Hafniæ* 1727, in 4. plag. 7, Tabb. 1) & JOH. JACOBUS ZIMMERMANN in *Scriptura Copernizante* Germanice sæpius edita. Utor editione *Norimbergensi* anni 1709, in 8. (plag. 8).

§. 42. Astronomiam, quam in parte prima secundum proprias hypotheses explicaverat, in secunda ad usum concionatorum transfert AN-

TONIUS

TONIUS MARIA SCHYRLÆUS DE RHEITA, Capucinus, in *Oculo Enochi atque Eliæ*, seu *Radio sidereo mystico* (*Antverpiæ* An. 1665, in fol. 4 Alph. 9 plag.), qui etiam sub finem partis primæ praxin Dioptricæ explicat.

§. 43. Calculum eclipsium peculiaribus scriptis in usum tyronum illustrarunt ELIAS MOLERUS in *Opere novo Astronomico*, in quo doctrina de supputandis deliquiis juxta Tabulas Prutenicas explicatur (*Lugduni* An. 1687, in 4. 1 Alph. 4 plag.); JOHANNES HANKE, e Societate Jesu, in *Tenebris summatim illustratis*, qui secundum Tabulas RICCIOLI computum instituit (*Moguntiæ* An. 1682, in 4. plag. 15) & inprimis ZIMMERMANNUS modo laudatus in scripto Germanico, cui titulus: *Auf alle und jede Hypotheses applicable Fundamental-Aufgaben von den Sonn- und Mond-Finsternissen* (*Hamburgi* An. 1691, in 8. 15½ plag.) Eclipseos solaris calculum quoque bene tradidit, & Logarithmos in usum Logisticæ sexagenariæ exhibuit, quales alibi non prostant. Commemorari hic quoque merentur Dissertationes quædam academicæ. Nimirum calculum Eclipsium solarium exemplo Eclipseos anni 1705, illustravit JOHANNES BERNHARDUS WIDEBURGIUS, nunc Professor Mathematum Jenensis (*Helmstadii* An. 1714, in 4. plag. 12, Tabb. 4) & Eclipseos solaris anni 1723, calculum secundum methodum PHILIPPI DE LA HIRE, ex ejusdem Tabulis, quoad minutissima, repræsentat GEORGIUS MATTHIAS BOSE, nunc Physicæ Professor in Academia Wittebergensi, in *Commentatione in Eclipsin Terræ* An. 1723, d. 13 Maji (*Lipsiæ* An. 1723, in 4. maj. Alph. 1, Tab. 1) Huc etiam pertinent *Dissertationes de Eclipsi lunari & de Eclipsi solari* CHRISTOPHORI LANGHANSEN, Professoris Mathematum Regiomontani, quarum primam sub præsidio BLÆFINGII, tum Mathematum Professoris, alteram ipse Præses defendit.

§. 44. Equidem Tabularum astronomicarum conditores præcepta quoque calculi iisdem præmittere solent, quod etiam fecit PHILIPPUS DE LA HIRE: quoniam tamen sæpissime præcepta breviora sunt, quam ut ad omnem calculum astronomicum absolvendum tyronibus præsertim satisfaciant; ideo JOANNES ALBERTUS KLIMMIUS, idiomate Germanico, *Norimbergæ* An. 1725, in 4. (Alph. 1, plag. 17, Tabb. 16). Tabulas PHILIPPI DE LA HIRE cum nova, completa, & accurata descriptione omnis calculi astronomici in usum tyronum calculi edidit. Ad eundem finem tendit opus in hoc genere maxime commendandum, *Astrosophia numerica*, sive astronomica supputandi ratio ANGELI CAPELLI, Canonici & Astronomiæ Professoris Parmensis, quæ duabus partibus *Venetiis* An. 1733 & 1736, in 4. prodiit

diit (Pars I, plag. 14, Tabb. æn. 8. Pars II, Alph. 1, plag. 16). Parte priori abunde docentur, quæ ad calculum faciunt; posteriori autem Tabulæ astronomicæ continentur.

§. 45. JOANNES LEONHARDUS ROSTIUS An. 1718, *Norimbergæ* in 4. (Alph. 3, Tabb. 14), edidit librum astronomicum sub Titulo: *Astronomisches Hand-Buch*, h. e. Manuale Astronomicum, in quo doctrinam sphæricam exemplis perspicuis illustrat, & modum observandi declarat, ipse nimirum in observando versatissimus. Addidit deinde An. 1727, (*Norimbergæ* in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 14) partem alteram sub Titulo: *Aufrichtiger Astronomus*, h. e. Astronomus ingenuus. In ea plurima tradit, quæ ad doctrinam sphæricam, motus Cometarum, & observationes astronomicas spectant. Inprimis autem plurima tradit, quæ ad calculum Eclipsium facilitandum conducunt. Ad Astronomiam adeo practicam addiscendam utile opus.

§. 46. Quoniam in anterioribus aliquoties mentionem injecimus *Operum Mathematicorum* JOANNIS SCHONERI, ut de iis adhuc dicamus res ipsa flagitare videtur. Ea in unum volumen congessit, & correcta & locupletata *Norimbergæ* An. 1561, in fol. excudi curavit Autoris filius ANDREAS SCHONERUS (Alph. 10). Continentur in hisce 1. Isagoge Astrologiæ judiciariæ, 2. de Judiciis Nativitatum libri tres, 3. Tabulæ resolutæ astronomicæ, 4. de usu globi cœlestis, 5. de compositione globi cœlestis, 6. de usu globi terrestris, 7. de compositione globi terrestris, 8. Libellus de distantiis locorum per numeros & instrumentum investigandis, 9. de constructione Torqueti, 10. In constructionem atque usum Rectanguli sive radii astronomici Annotationes, 11. In Fabricam & usum magnæ Regulæ PTOLEMÆI Annotationes, 12. Horarii Cylindri Canones, 13. Æquatorium astronomicum, ex quo errantium stellarum motus, luminarium configurationes & defectus colliguntur, oppositis ubique planetarum sphæris & terminorum expositionibus, 14. Planisphærium seu Meteoroscopium, in quo singula, quæ per motum primi mobilis contingunt, inveniuntur, 15. Organum Uranicum, quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, 16. Instrumentum impedimentorum Lunæ, per quod dies impediti facillime colliguntur his apprime utile, qui Almanach conscribere gestiunt. Videmus adeo in hisce operibus non contineri alia, nisi quæ ad præsens caput pertinent, quæ siderum nempe scientiam concernunt.

§. 47. Plura nobis recensenda essent scripta astronomica, si omnia promiscue in medium afferre liberet. Sed cum ea, quæ a veteribus & recentioribus usque ad Annum 1660, seculi superioris literis consignata fuere,

re, ex RICCIOLI Almagesto facile suppleri queant, cetera ex Diariis Eruditorum, quæ hodie magno numero eduntur, peti queant; potiora a nobis commemorata esse sufficit. De TYCHONIS tantum *Progymnasmatibus Astronomiæ instauratæ*, aliquoties laudatis, observamus, quod pars prima equidem inscribatur *De nova stella anni* 1572, generaliter tamen de restitutione motuum Solis & Lunæ stellarumque inerrantium tractet (*Uraniburgi & Pragæ* 1610, in 4. 4 Alph. 13 plag.); altera vero de Cometa An. 1577, agat (*Pragæ* An. 1610, in 4. 2 Alph. 13 plag.). Tomo secundo hujus editionis adjiciuntur TYCHONIS DE BRAHE *Epistolæ Astronomicæ* (*Uraniburgi* An. 1010, in 4. 1 Alph. 16 plag.). Sola Progymnasmata sub titulo Operum TYCHONIS DE BRAHE postea *Francofurti ad Mœnum* in 4. recusa.

§. 48. Dignum quoque est, cujus singularem mentionem injiciamus, Automatum Planetarium HUGENII, motus planetarum motu suo accurate indicans, descriptum sub finem posthumorum (§. 35, cap. 1). Etsi enim ante ipsum istiusmodi automata construxerint alii, quorum nonnulla recenset SCHOTTUS in Technica curiosa: eorum tamen usus hodie nullus amplius est, postquam *Hugenianum* ad Astronomiæ recentioris perfectionem compositum.

§. 49. Præterea nobis adhuc commemoranda sunt scripta quædam recentiora, quæ silentio præteriri nefas. Nimirum An. 1697, *Norimbergæ* in fol. (Alph. 1, plag. 4, Tabb. 4) JOH. PHILIPPUS A WURTZELBAU edidit Tractatum de situ Geographico secundum latitudinem & longitudinem civitatis Norimbergensis sub titulo: *Uranies Noricæ Basis*; in usum observationum suarum, quas ibidem multa solertia & instrumentis exquisitis instituebat. Sed cum in longitudine ac refractionibus aliquid immutandum esse posthac deprehenderet, ejus supplementum An. 1713, in fol. (plag. 5½) addidit sub titulo: *Stabilimentum Baseos Uranies Noricæ Astronomicæ & Geographicæ, pro deducta antehac inclytæ urbis latitudine & corrigendis longitudinum Geographicarum numeris* &c. ubi etiam de obliquitate Eclipticæ & refractione horizontali agit. Tandem An. 1719, accessit opus Motuum solarium, in qua ex Solis observationibus in Meridiano Norimbergensi per tria secula habitis iidem definiuntur, & eorundem Tabulæ exhibentur, sed intra dimidium seculum variabiles ob eccentritatis, quam statuit, mutabilitatem. Prodiit *Norimbergæ* An. 1719, in fol. (plag. 22½, Tab. 1) sub titulo: *Uranies Noricæ Basis astronomica*, sive *Rationes motus annui ex observationibus in Solem, hoc nostro & seculo abhinc tertio, Norimbergæ sub eodem Meridiano habitis quam plurimis deductæ & ampliter demonstratæ*. Operi huic solari adjicitur tractatus de situ geographico Norim-

Norimbergæ & ejus ſupplementum, de quo ante diximus, ut adeo integrum, quale nunc in bibliopoliis proſtat, conſtet (Alph. 2, plag. 9, Tabb. 5).

§. 50. An. 1735, *Hafniæ* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 11) PETRUS HORREBOWIUS, Phil. & Med. D. in Univerſitate Hafnienſi Aſtronomiæ Profeſſor, edidit *Baſin Aſtronomiæ*, ſive Aſtronomiæ partem mechanicam, in qua deſcribuntur obſervatoria atque inſtrumenta aſtronomica Rœmeriana Danica, ſimulque eorundem uſus, ſive methodi obſervandi Rœmerianæ in uſum publicum, & præſertim in gratiam una prodeuntis valde inſignis atque uſus ampliſſimi, nunquam non poſteris memorandi, Tridui obſervationum Tuſculanarum ROEMERI ex fundamentis exponuntur. Dolendum vero, quod duo libri, in quo obſervationes ſuas deſcripſerat ROEMERUS ferali iſto incendio An. 1726, quod circa finem Octobris totam fere Hafniam vaſtavit, una cum obſervationibus *Horrebovianis* perierint.

§. 51. Multum deſudavit ROEMERUS in detegenda parallaxi orbis annui, nec ſine ſucceſſu hoc ſe præſtitiſſe ſibi videbatur. Ex ejus adeo obſervationibus HORREBOWIUS eandem demonſtrandam ſibi ſumſit, ediditque ea fini Hafniæ in 4. (plag. 8, Tab. 1) ſuis ſumtibus *Copernicum triumphantem*, ſive *de parallaxi orbis annui Tractatum epiſtolarem* ad Sereniſſimum Principem CHRISTIANUM, Daniæ & Norwegiæ hæredem An. 1727, cujus pleraque exemplaria ferale iſtud, quod modo commemoravimus, incendium conſumſit.

§. 52. Enimvero nondum triumphare Copernicum in *Commentariis Bononienſis Scientiarum & Artium Inſtituti* (§. 40, cap. 1) oſtendit EUSTACHIUS MANFREDI, cum ex obſervationibus Rœmerianis, quæ colligitur in fixis, quoad declinationem & aſcenſionem rectam, mutatio parallaxi orbis annui minime conſentiat. Nimirum hactenus Aſtronomi in parallaxin orbis annui inquiſituri id tantummodo agebant, ut omni circumſpectione diſpicerent, num aliqua fixarum a loco fixo aberratio annua deprehendatur, parum ſolliciti utrum præciſe talis ſit, qualem exigit motus annuus Telluris circa Solem, an vero eidem contrarietur. Saluberrimo igitur conſilio MANFREDIUS *Theoriam de annuis inerrantium ſtellarum aberrationibus*, in Aſtronomia hactenus deſideratam condidit eamque publici juris fecit *Bononiæ* Anno 1729, in 4. (plag. 10, Tabb. 6), ut juxta eam obſervationes examinari queant, ne per errorem parallaxis orbis annui inde colligatur, quæ inde colligi nequit.

§. 53. Celebratiſſimus hodie inter Aſtronomos eſt Gnomon Meridianus Bononienſis ad D. *Petronii*, cui Aſtronomia multa debet incrementa & cujus hiſtoriam dederunt

JOAN-

JOANNES DOMINICUS CASSINI atque DOMINICUS GULIELMINUS. Hujus instrumenti descriptionem & observationes astronomicas omnes eodem, ab ejus constructione usque ad hoc tempus, peractas An. 1736, *Bononiæ* in 4. reg. (Alph. 2. plag. 2) edidit idem MANFREDIUS. In hoc opere de obliquitatis eclipticæ mutatione & theoria Solis præclara leguntur, & illa inprimis extra omnem controversiæ aleam ponitur.

§. 54. Anno 1725, HORREBOWIUS edidit *Hafniæ* in 4, (plag. 16, Tab. 1) *Clavem Astronomiæ*, sive *Astronomiæ partem physicam, in qua potissimum in parallaxin Solis inquirit.* Pendet autem methodus ab hypothesi quadam physica. Unde ipsi posthac consultum visum, ut missis omnibus hypothesibus elementa Astronomiæ quoad refractiones, obliquitatem eclipticæ, polique altitudinem nudis observationibus ROEMERI superstrueret. Eo consilio in publicam lucem emisit, An. 1732, *Hafniæ* in 4. (plag. 16, Tab. 1). *Atrium Astronomiæ*, sive *de inveniendis refractionibus, obliquitate eclipticæ, atque elevatione poli* Tractatum. Subjunxit schediasma de arte interpolandi, quod jam antea seorsim publicatum ad scripta analytica referendum. Ceterum in Atrio hoc aperiendo amplissimum usum ostendit Tridui illius *Roemeriani*, quod in Basi Astronomiæ extat (§. 50), & se in posterum uberiorem adhuc ostensurum pollicetur.

Unde non mireris ROEMERUM morti vicinum ejus editionem, una cum descriptione instrumentorum suorum serio commendasse, & eo fine ejus exemplar nitide descriptum S. R. Selandiæ Episcopo C. W. WORMIO tradidisse.

§. 55. Ad scripta Astronomica referendæ etiam sunt Ephemerides, in quibus loca planetarum eorumque adspectus, ad singulos anni dies computati, una cum Eclipsium descriptionibus exhibentur. Juxta Tabulas Prutenicas, *Ephemerides* ab An. 1577, ad annum 1590, construxerat JOANNES STADIUS. Juxta easdem ab An. 1581 usque ad annum 1620, computatas *Venetiis* excudi curavit JOANNES ANTONIUS MAGINUS, Mathematum Professor Bononiensis, edito opere *Primi Mobilis*, duodecim libris contenti, in quibus habentur Trigonometria sphæricorum & astronomica, gnomonica, geographicaque problemata, magnus trigonometricus canon emendatus & auctus, ac magna primi mobilis Tabula ad decades primorum scrupulorum supputata (*Bononiæ* An. 1609, in fol. Alph. 10, plag. 21), celebris: sed cum eas examinaret DAVIDES ORIGANUS, Mathematum Professor Francof. ad Viadrum, eas non satis accuratas deprehendit. Quamobrem ipse An. 1599, *Franc. ad Viadrum* in 4. (4 Alph. 12 plag.) novas edidit *Ephemerides*, ab An. 1595 usque ad An. 1630, deinceps continuatas

usque ad finem sæculi. Præmissa est Introductio seu compendiaria Ephemeridum enarratio, qua non solum, quæ ad motum primi & secundorum mobilium usumque pleniorem Ephemeridum faciunt, sed & plurima alia chronologica & astrologica præcepta ea facilitate explicantur, ut inde quisque calendaria anniversaria & nativitatum texere possit judicia. Hæ Ephemerides seculo decimo sexto celebratissimæ fuerunt, iisdemque usi sunt calendariographi. Etsi enim KEPLERUS ab An. 1617 usque ad An. 1636, ex Tabulis suis Rudolphinis supputatas *Lincii* in 4. (3 Alph. 17 plag.) edidisset, inchoatas *Lincii* 1616, & absolutas *Sagani* Silesiæ typis Autoris An. 1630, quibus præmittitur explicatio fundamentorum Ephemeridis & instructio super nova ejus forma; facile tamen apparet, cur usum Ephemeridum ORIGANI impedire minime potuerint.

§. 56. Cum ORIGANI Ephemerides cum seculo præcedente exspirassent, initio hujus complures de novis computandis consilia agitarunt: quo successu, nostrum jam non est enarrare. Initio hujus seculi Ephemerides dederat MEZZAVACCHA, quibus deficientibus, manum eidem operi admovit Marchio ANTONIUS GHISLERIUS, cujus *Ephemerides motuum cœlestium* ab An. 1721 ad An. 1740, ex Tabulis DE LA HIRE, STREETII & FLAMSTEDII ad Meridianum Bononiæ supputatæ prodierunt *Bononiæ* An. 1720, in 4. (Alph. 3, plag. 9½). Anno autem 1725, ibidem lucem adspexere *Novissimæ Ephemerides motuum cœlestium e Cassinianis Tabulis ad meridianum Bononiæ supputatæ*, autoribus EUSTACHIO MANFREDIO Bononiensis Scientiarum Instituti Astronomo & sociis ad usum Instituti. Tomus primus continens Ephemerides ex An. 1726 in An. 1737, constat Alph. 2, plag. 4, Tabb. 8: Tomus II, complectens Ephemerides ex An. 1738 in An. 1750, Alph. 2, plag. 6, Tabb. 7. Id singulare habet MANFREDIUS, quod dederit typos eclipsium solarium, quales per totam Telluris faciem, ubi conspicuæ sunt, apparent, juxta principia projectionis.

§. 57. Singulis annis Parisiis in usum anni sequentis, jussu Academiæ Regiæ scientiarum, ad Meridianum Parisiensem editur Ephemeris sub titulo: *Connoissance des Tems pour l'Année* v. gr. 1739. Ephemeridi subjiciuntur Tabulæ quædam astronomicæ cum earundem explicatione & usu, una cum Catalogo singulorum membrorum Academiæ Regiæ scientiarum, qualis est mense Novembri ejus, quo editur, anni. Extant in iisdem eclipses Satellitum Jovis, cum in casum observationum astronomicarum potissimum edantur istæ Ephemerides, quæ præterea usum Calendarii præstant.

§. 58. Olim usque ultra dimidium seculi superioris ad Astronomiam quo-

quoque relata fuit *Aſtrologia judiciaria*, ars divinandi ex aſtris: omnes enim & naturæ, & hominum actiones, horumque fata iiſdem ſubjecerunt Veteres. Magna ea fuit autoritas, exculta & defenſa a gravibus Autoribus, ita ut ipſe PTOLEMÆUS de eadem commentatus fuerit, eamque Aſtronomiæ ſociam fecerit (§. 10, cap. 9). Noſtro autem ævo, vanitate ejus agnita, indigna cenſetur, quæ inter ſcientias mathematicas referatur: quæ etiam ratio eſt, cur nullum eidem in Elementis noſtris Matheſeos univerſæ fecerimus locum. Quodſi tamen cui volupe fuerit Aſtrologiæ præcepta cognoſcere, ei ſatisfaciet SCHONERUS in *Opuſculo aſtrologico*, quod ex diverſorum libris ſumma cura pro ſtudioſorum utilitate collegit & *Norimbergæ* An. 1539, in 4. (plag. 14) edidit. Legitur idem in Operibus, in quibus primum tenet locum (§. 46). In his autem prolixa quoque occurrit tractatio de judiciis nativitatum, ut in hac Aſtrologiæ parte nihil amplius deſiderari poſſit. Compendioſior eſt *Tractatus aſtrologicus de genethliacorum thematum judiciis, pro ſingulis nati accidentibus, ex vetuſtis & optimis quibuſque auctoribus collectus induſtria* HENRICI RANZOVII, *Producis Cimbrici*, qui *Francofurti ad Mœnum* An. 1633, in 8. (Alph. 1, plag. 2) prodiit, & quo in juventute uſus, cum artem illam pernoſcere geſtirem.

§. 59. Superiori adhuc ſeculo Aſtrologiæ maxime deditus fuit JOANNES BAPTISTA MORINUS, Medicinæ Doctor, & Pariſiis Regius Mathematum Profeſſor, cujus *Aſtrologia Gallica principiis & rationibus propriis ſtabilita*, atque in 26 libros diſtributa, prodiit *Hagæ Comitis* An. 1661, in fol. cum prolixa præfatione apologetica (Alph. 6, plag. 12), qui vulgo dicitur Aſtrologiam demonſtraſſe. Sed quantum diſtent a veris demonſtrationibus ejus probationes, haud difficulter judicabit, qui genuinæ demonſtrationis formam animo concepit.

CAPUT X.

De Scriptis Chronologicis, Geographicis & Gnomonicis.

§. 1. DOctrinam temporum primus in Scientiæ formam redegit JOSEPHUS SCALIGER, cujus *De emendatione temporum* libri primum An. 1587, lucem adſpexerunt, deinde quindecim annis elapſis prorſus immutati denuo prodierunt. Multa eruditione conſcriptum eſt hoc opus; ſed



sed ad captum Tyronum minime compositum.

§. 2. Præclarum quoque in Chronologia opus est DIONYSII PETAVII *Doctrina Temporum*, *Parisiis* An. 1627, in fol. primum edita; sed An. 1703, tribus Tomis in fol. reg. (21 Alph. 7 plag.) Antverpiæ recusa. Accessit editioni novæ integer Tomus tertius, in quo continentur *Uranologium sive systema variorum auctorum, qui de Sphæra ac sideribus eorumque motu Græce commentati sunt*, An. 1630, seorsim editum; Libri VIII variarum Dissertationum Chronologiam illustrantium & Libri tres epistolarum. Nimirum in Uranologio continentur GEMINI Elementa Astronomiæ; PTOLEMÆI de Apparentiis inerrantium & significationibus, cui Tractatui subjungitur Calendarium vetus Romanum, cum ortu occasuque stellarum ex OVIDIO, COLUMELLA, PLINIO; ACHILLIS TATII Isagoge ad ARATI Phænomena; Ejusdem fragmenta a VICTORIO edita, quæ cum anterioribus eadem fere continent; HIPPARCHI BITHYNI ad ARATI & EUDOXI Phænomena Enarrationum libri tres; ARATI Genus & Vita; THEODORI GAZÆ liber de mensibus; S. MAXIMI Martyris Computus ecclesiasticus; ISAACI Monachi Computus; S. ANDREÆ Hierosolymitani methodus investigandi Cycli solaris & lunaris, nec non Paschatis. Ceterum paulo durius tractat SCALIGERUM, cui opus suum opposuit.

§. 3. Dogmata SCALIGERI ad faciliorem intelligentiam proposuit SETHUS CALVISIUS, Cantor Lipsiensis, vir longe ultra sortem sui similium eruditus, cujus *Introductio ad Chronologiam* sæpius cum in 4. tum in folio recusa.

§. 4. Triumviris istis jungi meretur JOANNES BAPTISTA RICCIOLUS in *Chronologia Reformata*, quæ *Bononiæ* An. 1669, in fol. prodiit (Alph. 11, plag. 18).

§. 5. Tyronibus inserviunt DIONYSII PETAVII *Rationarium temporum* (*Moguntiæ* An. 1646, in 8. 2. Alph. 22 plag.), GUILIELMI BEVEREGII *Institutiones Chronologicæ*, quæ cum *Arithmetica Chronologica* recusa *Londini* An. 1705, in 4. (1 Alph. 11 plag.) & ÆGIDII STRAUCHII *Breviarium Chronologicum* (*Wittebergæ* An. 1664, in 12. 2 Alph. 10 plag.).

§. 6. Ad Chronologiam Historicam spectat opus ISAACI NEWTONI, quod *Londini* An. 1728, in 4. sub titulo: *The Chronology of ancient Kingdoms amended* (Alph. 2, plag. 4, Tabb. 3) prodiit, in quo agitur de Chronologia Græcorum, Ægyptiorum, Assyriorum, Babyloniorum & Medorum, atque Persarum. Traditur etiam in eodem descriptio templi SALOMONIS. Cum nobis jam sit negotium cum Chronologia mathematica; facile patet, Chronologiam NEWTONI non esse hujus

hujus loci. Ne tamen quis miretur, cur ejus nullam injecerimus mentionem, cum NEWTONUS inter Mathematicos summus emineat; eum silentio præterire noluimus. Singulares vero prorsus sibique proprias de Chronologia antiquorum imperiorum fovet opiniones NEWTONUS, ita ut enormis detur inter ipsum & ceteros Chronologos dissensus. Quamobrem eodem adhuc anno, ARTHURUS BEDFORD idiomate patrio Animadversiones in Chronologiam NEWTONI edebat *Londini* in 8. (plag. 15). Ostendit autem, NEWTONUM e diametro esse adversum scriptoribus sacris: quæ adeo ratio esse videtur, cur ad eum confutandum adeo properaverit.

§. 7. Ad Calendariographiam spectant, quæ Tomo quinto operum CLAVII habentur (§. 24, cap. 1); SETHI CALVISII *Elenchus Calendarii Gregoriani* (*Franc. ad Mœn.* An. 1612, in 4. plag. 27); FRANCISCI VIETÆ *Relatio Calendarii vere Gregoriani & Calendarium Gregorianum perpetuum* (§. 25, cap. 1); BLONDELLI *Historia Calendarii Romani* Gallice conscripta (*Paris.* An. 1682, in 4.); ERHARDI WEIGELII *Bürgerlicher Zeit-Spiegel*, seu speculum temporis civile (*Jenæ* An. 1664, in 4. plag. 15), GUILIELMI BONJOUR *Calendarium Romanum* (*Romæ* An. 1701, in fol. 21 plag.) FRANCISCI BLANCHINI *Solutio Problematis paschalis* (*Romæ* An. 1703, in 4. plag. 13, Tabb. 5); DOMINICI QUARTAIRONII *Responsiones ad assertiones* DOMINICI CASSINI *pro reformatione Calendarii Gregoriani* (*Romæ* 1703, in 4. plag. 4); EUSTACHII MANFREDII *epistola ad* QUARTAIRONIUM, *qua* CASSINI *assertiones* 16 vindicantur (*Venetiis* An. 1705, in 4. reg. plag. 8); THOMÆ PII MAPHÆI Opus *De Cyclorum Soli-Lunarium inconstantia & emendatione* (*Venetiis* An. 1706, in 4. 1½ Alph.).

§. 8. *Calendarium Judaicum* ex Hebræorum penetralibus cum versione Latina edidit SEBASTIANUS MÜNSTERUS *Basileæ* An. 1527, in 4. (1 Alph. 5 plag.); in quo computus Judæis usitatus exponitur. *Rabbi* ORI Calendarium Palæstinorum & universorum Judæorum ex Hebræo sermone in Latinum vertit, & *Francof. ad Mœnum* publicavit JACOBUS CHRISTMANNUS, in Academia Heidelbergensi Professor An. 1594, in 4. (plag. 20).

§. 9. Inter veteres Geographos eminet PTOLEMÆUS, cujus *Geographiæ* libri octo, in quibus non modo traduntur ad Geographiam mathematicam spectantia, sed inprimis etiam quæ ad historicam faciunt, *Basileæ* prodiere plus simplici vice, e. gr. An. 1542, in fol. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 48). Inter compendia vero maxime celebre fuit JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus *de sphæra*, sæpius recusus: in quem

post alios commentatus est CLAVIUS (§. 24, cap. 1).

§. 10. Præstantissimum in hoc scientiarum genere & fere unicum est JOHANNIS BABTISTÆ RICCIOLI *Geographia & Hydrographia Reformata* (*Venetiis* An. 1662, in fol. 7 Alph. 17 plag.), ex quo ERHARDUS WEIGELIUS scitu præ cæteris necessaria, in tyronum gratiam, in compendium misit in speculo Terræ, (*Erd-Spiegel*), quod vocat, patrio idiomate conscripto, (*Jenæ* Anno 1665, in 4. 1 Alph. 3. plag.).

§. 11. Multa habet RICCIOLUS, quæ ad Geographiam proprie non spectant, sed ab eo in eadem pertractantur, ne ea aliunde supponere habeat opus. Unde tyronum conatibus magis respondet *Geographia*, quæ in cursu Mathematico MILLIETI DECHALES extat (§. 4, cap. 1).

§. 12. Ceterum applausum Eruditorum dudum quoque meruit BERNHARDI VARENII *Geographia generalis*, sæpius recusa. Elegans est editio *Cantabrigiensis* anni 1672, in 8, (1 Alph. 9 plag. Tabb. 5), juxta quam recusa est *Jenæ* An. 1693, in 8. sed præstantissima omnium prodiit *Cantabrigiæ* An. 1712, in 8. reg. (1 Alph. 15 plag. 9 Tabb. 9) cum Appendice JACOBI JURIN, in qua nova habentur inventa, post obitum scilicet VARENII demum detecta. VARENIO autem non solum mathematica, verum etiam physica curæ cordique sunt.

§. 13. Laudantur quoque *Elementa Geographiæ generalis* Cl. J. G. LIEBKNECHT Prof. Giess. (*Franc.* An. 1712, in 8. 1 Alph. 10 plag. fig. plag. $3\frac{1}{8}$). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS vero in *Compendio Geographico*, quod idiomate vernaculo in gratiam tyronum *Francof.* An. 1705, in 8. edidit (plag. 10, Tabb. 5) praxin inprimis conficiendi mappas geographicas bene tradit, quamvis demonstrationes omiserit, utpote quæ non sunt ad palatum tyronum.

§. 14. De *Hydrographia*, seu arte navigandi, commendatur Tractatus in Cursu mathematico MILLIETI DECHALES (§. 4, cap. 1). Data opera omnium prolixissime scripsit de eadem GEORGIUS FOURNIER e Societate Jesu in *Hydrographia* Gallice edita *Paris.* An. 1653, in fol. (10 Alph. 10 plag.). Habebatur pro opere præstantissimo in hoc genere: verum postea in Anglia prodiere libri complures de arte navigandi, qui præ illo commendari merentur.

§. 15. JACOBUS HODGSON, Matheseos in schola mathematica regia orphanotrophii ad S. Salvatorem conscripsit *Theoriam navigationis demonstratam*, in usum Navigationis docendæ. Eam deinde multo auctiorem sub titulo, *A System of the Mathematicks*, hoc est, systema Matheseos, *Londini* An. 1723, in 4. duobus Voluminibus (Alph. 7, plag. $19\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 14, cum figuris mul-

multis ligno incisis & textui insertis) multo auctiorem recudi curavit. In hoc systemate ex Mathesi non traduntur, nisi quæ ad Navigationem rigide demonstrandam faciunt & in ea usum habent. Præmittuntur ex EUCLIDIS Elementis sex prioribus, quæ ad hunc scopum conducunt, una cum Trigonometria plana ex inventis recentiorum plurimum illustrata. Reperies hic porro Trigonometriam sphæricam, & doctrinam de projectione sphæræ, tam orthographica, quam stereographica prolixe explicatam, quarum hæc ad solvenda problemata trigonometrica & astronomica applicatur. Ex Astronomia docentur, quæcumque usui esse possunt in navigatione, veluti modus computandi appulsum Lunæ ad stellas fixas, & harum per illam occultationes, quarum in determinandis longitudinibus locorum usus est. Inferuntur novæ Tabulæ solares, quarum docetur constructio & usus. Adduntur Tabulæ aliæ, quibus opus est in navigatione. Ipsa autem praxis Navigationis omnis perspicue docetur, exemplis illustratur, & Theoriæ demonstratæ superstruitur. Id nimirum egit Autor, ut ex suo opere Navigationis theoriam & praxin solide addiscere liceat, & quæ ex reliqua Mathesi præsupponuntur aliunde hauriri non demum opus sit.

§. 16. Anno 1715, HENRICUS WILSON, problemata nautica variis modis soluta dedit in Tractatu, quem sub titulo: *Navigation new modell'd*, hoc est, Navigatio in novam formam redacta, *Londini* in 8. maj. (Alph. 1, plag. 12) publici juris fecit. Docet problemata ista solvere 1. per constructiones geometricas triangulorum, in locum solutionum trigonometricarum surrogandas, 2. per calculum trigonometricum, & ope peculiarium Tabularum, ut calculo nullo sit opus; 3. per calculum, qui canone sinuum, tangentium, secantium & logarithmorum non habet opus, sed tantummodo paucis quibusdam numeris in Tabulam redactis; 4. ope circini & scalæ geometricæ; tandemque 5. per novam methodum a se inventam, qua problemata Trigonometriæ planæ sine Tabulis ac instrumentis solvuntur. Navigationem primam geometricam, secundam trigonometricam, tertiam arithmeticam, quartam instrumentalem, quintam vero practicam appellat. Nullum adeo dubium est, quin hunc librum multo cum fructu legant, qui artem navigandi addiscere cupiunt, modo ex ceteris partibus Matheseos hausta theoria fuerint instructi, quæ hic præsupponitur.

§. 17. Quoniam libri, qui magno numero de navigatione conscripti sunt, vel solam praxin tradunt, vel nimis diffusi sunt, nec levi pretio comparandi; ideo ARCHIBALDUS PATOUN praxin navigationis ex primis principiis demonstratam sub titulo: *A Compleat Treatise of practical*

cal navigation demonſtrated from its firſt Principles, una cum tabulis omnibus neceſſariis *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 10, Tab. 1) edidit. Præmittit adeo ea, quæ ex Geometria, Trigonometria plana, Geographia, Aſtronomia & Chronologia perſpecta eſſe debent ei, qui artem navigandi penitus perſpicere voluerit.

§. 18. Eodem anno idiomate itidem Anglico *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 9) a GEORGIO GORDONIO publicata ſunt ex MSC. originali *Opera poſthuma* JOHANNIS WARDI. In horum parte prima, præmiſſis principiis Geometriæ & Trigonometriæ planæ, Navigatio explicatur, ubi nova quædam methodus ſimul proponitur ab Autore inventa; in parte autem ſecunda Trigonometria ſphærica traditur, ubi ſimul ſphæræ projectio, tam orthographica, quam ſtereographica explicatur. Ad demonſtrationes illius facilius percipiendas ſchemata ita conſtruxit, ut caſus ſinguli in ſolido repræſentari poſſint; quo artificio etiam uſus eſt JOANNES KEILL in *Trigonometria*, quam EUCLIDIS Elementis ex verſione COMMANDINI a ſe editis ſubjunxit.

§. 19. Apud Batavos de arte navigandi Tractatum conſcripſit WILLEBRORDUS SNELLIUS, qui ſub titulo: *Tiphys Batavus, ſive Hiſtiodromice de navium curſibus & re navali*, *Lugduni Batavorum* An. 1624, in 4. Alph. 1, plag. 7) prodiit. De Loxodromia accuratas affert demonſtrationes quæ hactenus deſiderabantur. Theoriam tradit libro primo; praxin ſecundo.

§. 20. Inter problemata vexata refertur problema de invenienda longitudine maris, quod hactenus multum exercuit ingenia Mathematicorum, irrito ſucceſſu ſolutionem ejus aggreſſorum. Nimis prolixum foret recenſere tentamina, quæ publice deſcripta proſtant. Non tamen poſſumus, quin mentionem injiciamus Autoris cujuſdam perſonati DOROTHEI ALIMARI, Mathematici (ſi credimus) Veneti, cujus *Methodus longitudinis aut terra, aut mari inveſtigandæ, adjectis demonſtrationibus & inſtrumentorum Iconiſmis*, *Londini* An. 1715, in 8. (plag. 13, Tabb. 4) prodiit. Etſi enim ea non ſatisfaciat, continentur tamen in hoc Tractatu quæ legi merentur.

§. 21. Pars nauticæ difficillima eſt manuaria nautica, quia reconditam Geometriæ ſublimioris notitiam ſupponit. Agit autem manuaria nautica de diſpoſitione velorum, gubernaculi & navis. Equidem Vir & generis nobilitate, & experientia maritima præſtans RENAU An. 1689, libellum de ea ediderat; ſed mox HUGENIUS principium ejus unum, dein ex intervallo celeberrimus BERNOULLIUS alterum impugnavit, & theoriam aliam ſubſtituit in Tentamine novæ theoriæ nauticæ, quæ idio-

idiomate Gallico sub titulo: *Essai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, una cum epistolis nonnullis de eadem materia perscriptis, *Basileæ* An. 1714, in 8. reg. (plag. 15, Tabb. 10) prodiit. Theoriam hujus artis ad praxin aptare studuit PITOTUS in libro Gallice conscripto, qui sub titulo: *Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux reduite en Pratique*, *Parisiis* in 4. An. 1731, prodiit.

§. 22. Ad Geographiæ potissimum perfectionem tendunt *Observationes Mathematicæ & Physicæ in India & China factæ a R. P.* FRANCISCO NOEL, *e Societate Jesu ab* An. 1684, usque ad An. 1708, (*Pragæ* 1710, in 4. plag. 17, Tabb. 2) & *Observationes* argumenti similis *a R. P.* FRANCISCO FEUILLE'E *jussu Regis Christianissimi in regionibus potissimum Australibus factæ*, de quibus supra (§. 9, cap. 9). Summæ harum observationum leguntur in Actis Eruditorum Lipsiensibus.

§. 23. Commemorandi hic denique sunt Autores, qui in magnitudinem & figuram Telluris inquisiverunt. Laudandus hic nobis WILLEBRORDUS SNELLIUS, cujus *Eratosthenes Batavus de Terræ ambitus vera quantitate*, *Lugduni Batavorum* An. 1617, in 4. (Alph. 1, plag. 11½) prodiit. Sed errores quosdam in metiendis angulis, tum & in calculo admisit, quos ipse agnovit: Unde observationes repetiit & in MSC. correctas reliquit. Emendationes videre licet in *Dissertatione de magnitudine Terræ* PETRI VAN MUSCHENBROEK, Mathematum Professor in Academia Ultrajectina, quæ legitur in opere *Dissertationum physicarum experimentalium & geometricarum de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine Terræ, cohærentia corporum firmorum*, *Lugduni Batavorum* An. 1729, in 4. reg. edito p. 354, & seqq.

§. 24. In Gallia feliciori successu laborem hunc exantlatus est PICARDUS, postea continuatus a CASSINO. Mensurationem PICARDI videre licet in Tractatu, quem ex sermone Gallico in Anglicum transtulit RICHARDUS WALLER & *Londini* sub titulo: *The Measure of the Earth* 1688, (plag. 6, Tabb. 4), edidit, tum in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum Parisinæ ab An. *1666*, usque ad An. *1699*, Tom. 7, *Cassinianam* vero in Commentariis An. 1718.

§. 25. Quoniam per mensurationes *Cassinianas* alia prodibat figura Telluris, quam per demonstrationes NEWTONI atque HUGENII; ideo jussu Regis Christianissimi DE MAUPERTUIS cum Sociis, summo cum studio & plusquam Herculeo labore, gradum Meridiani prope circulum polarem dimensus est aliasque observationes huic instituto inservientes instituit. Legatur Tractatus, quem *Parisiis* An. 1738, in 8. edidit (plag. 13, Tabb. 10). Observationibus hisce

exactissimis figura Telluris confirmatur *Newtoniana*, & *Hugeniana*. Constat jussu Regis Christianissimi eodem fine missos esse Mathematicos in regnum Peruvianum; qui ubi redierint, cum publico dubio procul communicabunt absque mora suas quoque observationes.

§. 26. Theoriam atque praxin Gnomonicam more veterum rigidissime, sed adeo intricate demonstravit CHRISTOPHORUS CLAVIUS (§. 24, cap. 1) ut vix credibile sit, ullum unquam ejus demonstrationes omnes perlegisse. Faciliores vero exhibent DECHALES atque OZANAM in cursibus (§. 4, 7, cap. 1).

§. 27. Demonstrationes quoque affert GUARINUS GUARINI in parte posteriore *Mathematicæ cœlestis* (*Mediol.* An. 1683, in fol. 1 Alph. 3 plag.). Pars prior, quæ una cum posteriore prodiit (7 Alph. 5 plag.) integram Astronomiam complectitur.

§. 28. Novam methodum horologia solaria magna conficiendi, lineis horariis per calculum determinatis, invenit PICARDUS, quæ in Operibus Mathematicis Academicorum Gallicorum (§. 31, cap. 1) legitur. Et Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in sua *Gnomonica*, quam patrio sermone *Parisiis* 1683, in 12. reg. publici juris fecit, methodum Geometricam exposuit, ex quibusdam punctis per observationem determinatis lineas horarias ducendi.

§. 29. Anno 1625, EBERHARDUS WELPERUS, Artium Magister, *Argentorati* propriis sumtibus typis describi curavit suum de *Gnomonica* tractatum vernaculum in 4. (plag. 8), in quo ex facili fundamento horologia in planis primariis describere docet. Idem fundamentum jam antea perspicue exposuit eodemque in describendis horologiis usus est SEBASTIANUS MUNSTERUS in *Rudimentis Mathematicis*, quorum liber prior prima elementa Geometriæ, posterior omnigenum horologiorum genus delineare docet. (*Basileæ* An. 1551, in fol. 2 Alph. 20 plag.).

§. 30. WELPERI Gnomonicam An. 1672, *Norimb.* in 4. (plag. 21, Fig. plag. $14\frac{1}{2}$) recudi curavit & integra parte secunda de horologiis inclinatis & declinatis, ac figuris Zodiacalibus, arcubusque diurnis, & horis varii generis inscribendis auxit, notisque partem primam illustravit JOH. CHRISTOPHORUS STURMIUS, Math. Prof. Altorfinus. Addidit An. 1681. (*Norimbergæ* in 4. plag. 19, Fig. plag. 9) partem tertiam de horologiis reflexis & portatilibus. Eadem Gnomonica cum insigni augmento *Sturmiano* denuo recusa *Norimbergæ* An. 1708, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 35). Accessit vero pars quarta, in qua methodi, *Picardiana & Lahiriana*, magna horologia describendi exponuntur (§. 28). In hoc adeo opere plura continentur, quam ullibi in unum volumen con-



congesta reperire licet, ita ut instar omnium esse possit, nisi quis demonstrationes exasciatas praxium desideret, theoriæ magis, quam praxi intentus. Appendicis quoque loco adjicitur Tractatus de horologiis automatis ex Anglico in Germanicum sermonem translatus, quemadmodum jam supra monuimus (§. 26, cap. 6.).

§. 31. Commendandum hic quoque est opus de horologiis majoribus delineandis, methodo universali, quod debetur J. G. DOPPELMAYERO, Matheseos Professori Norimbergensi, & sub titulo: *Neue und gründliche Anweisung*, wie *nach einer Universal-Methode grosse Sonnen-Uhren aus einem arithmetischen und geometrischen Fundament zu zeichnen*, *Norimbergæ* An. 1719, in fol. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. 20) prodiit. Quodsi idem cum novissima & auctiori Gnomonica *Welperiana* conjungas, vix est ut quicquam in praxi Gnomonica, sive utilitatem, sive curiositatem spectes, amplius desideres. Ceterum ALEXANDER in eximio de horologiis Tractatu egregiam quoque tradit methodum horologia majora solaria accurate in quovis pariete delineandi (§. 26, cap. 6.)

§. 32. Solas praxes tradunt JOHANNES PETERSON STENGEL in *Gnomonica universali*, idiomate vernaculo (*Ulmæ* An. 1706, in 8. plag. 18, Tabb. 109) edita, rerum varietate commendanda; GEORGIUS MICHAELIS in *Praxi Gnomonica* Germanice An. 1701, *Jenæ* in 8. edita (12 plag. fig. æn. plag. $1\frac{1}{2}$), qui tamen tantum communiora exponit; JOH. ULRICUS MULLER in *Indice horarum infallibili* Germanice itidem *Ulmæ* An. 1702, in 8. edito (1 Alph. plag. 9, Fig. æn. plag. 9) & HENRICUS COETSIUS in *Horologiographia plana* (*Lugd. Batav.* An. 1689, in 4. plag. 12, Tabb. 20), qui tamen inscriptiones signorum & arcuum diurnorum negligit, nec ad horologia portatilia descendit.

§. 33. Anno 1711, *Augustæ Vindelicorum* in 4. ($2\frac{1}{2}$ Alph. Tabb. æn. $21\frac{1}{4}$ plag.) prodiit JOHANNIS GAUPPENII *Gnomonica Mechanica universalis*, sermone vernaculo in eorum gratiam conscripta, qui in theoria Mathematica parum versati. Inseruit operi suo Tractatum brevem, quem HENRICUS BIERUM, Architectus militaris, An. 1676, (plag. 4) ediderat, & ejus fundamento mechanice describendi horologia utitur. Rerum varietate commendatur iis, qui variis horologiorum solarium generibus conficiendis delectantur.

§. 34. Eodem fundamento nititur JOHANNES JACOBUS SCHEUBLERUS in libro Germanico, qui sub titulo: *Neue und deutliche Anleitung zur practischen Sonnen-Uhr-Kunst*, *Norimbergæ* An. 1726, in 8. reg. (plag. 14, Tabb. 44) prodiit, & ubi inter alia ornamenta, quibus horologia solaria parietibus inscripta circumscribi possunt, delineat. Alias jam

initio seculi præteriti CASPARUS UTTENHOEFER, civis Norimbergensis, Pedem Mechanicum invenit, cujus ope horologia solaria mechanice delineari possunt. Descriptionis editio altera auctior prodiit *Norimbergæ* An. 1620, in 4. (plag. 7).

§. 35. Horologiorum solarium omnis generis, præsertim portatilium descriptionem etiam tradit NICOLAUS BION in opere Gallico *De constructione & præcipuis usibus instrumentorum mathematicorum* (*Parisiis* An. 1709, in 8. reg. 1 Alph. Tabb. 28), quod unicum fere in hoc genere a J. G. DOPPELMAYERO Prof. Math. Noribergensi ex Gallico in Germanicum sermonem verti meruit (*Noribergæ* An. 1712, in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 28).

§. 36. Commendari quoque merentur Machinæ duæ, quæ pro describendis horologiis solaribus publicavit aliquoties jam citatus IGNATIUS GASTON PARDIES (*Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. 2 plag.). In hac editione tertia subjunguntur Elementis Staticæ.

§. 37. Methodum trigonometricam describendi horologia solaria excoluit BERNARDUS GRUBER, S. Ordinis Cisterciensis in Monasterio B. V. Mariæ de Alto Vado Professus, in Collegio Archiepiscopali Pragæ A. L. L. & Philosophiæ Professor, in *Horographia trigonometrica*, seu *Methodo accuratissima arithmetice per sinus & tangentes horologia quævis solaria in plano stabili qualitercunque situato, etiam declinante & simul inclinato, facile negotio describendi, & quædam alia, quæ vialia dicuntur, expositis eorundem fundamentis & rationibus*, *Vetero-Pragæ* An. 1718, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 11) edidit. Idem institutum fuit BENEDICTI MARIÆ CASTRONII, Ordinis Prædicatorum ac Panormi Matheseos Professoris, qui *Horographiam universalem, seu Sciatericorum omnium planorum, gnomonice nova methodo describendorum, pro quovis horologio sive astronomico, sive Italico, sive Babylonico, sive Judaico doctrinam uniformem atque universalem, sola triangulorum analysi breviter expositam, cum Isagogicis nonnullis Mathematum & triplici Appendice de nautica scientia, de militari Architectura, ac de temporum Janua*, *Panormi* An. 1728, in fol. (Alph. 4, plag. 10, Tabb. 19) edidit. Temporum Januam vocat Calendarium quoddam perpetuum, Januæ formam præ se ferens, quod a se inventum. Tenendum hic est methodum trigonometricam, quæ & arithmetica dici solet, in Gnomonica præferendam esse geometricæ, cum hæc facilius errori obnoxia fiat, qui per illam evitari potest.

§. 38. Quoniam non cujusvis est per calculum trigonometricum eruere numeros, quibus in describendis horologiis solaribus opus est; ideo JOANNES LUDOVICUS QUADRI, Academiæ Instituti scientiarum Bononiensis



nienſis adſcriptus idiomate Italico *Bononiæ* An. 1733, in 4. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 6) edidit *Tabulas Gnomonicas delineationi Horologiorum ſciatericorum inſervientes*; quæ conſentiunt cum horologiis Italicis, ſonitu campanæ pulſæ horas indicantibus: ut adeo Italorum tantummodo uſui deſtinentur. Dederat jam ante iſtiuſmodi Tabulas in Italia P. ANGELUS MARIA COLOMBONUS & apud Noſtros JO. GAUPPIUS in *Gnomonica mechanica* (§. 33) & BERNARDUS GRUBER in Horographia trigonometrica modo laudata (§. 37). Edidit quoque Tabulas Gnomonicas, ſed pro horarum quovis genere, ſub titulo *Deliciarum mathematicarum*, ſermone patrio, una cum brevi deſcriptione praxeos univerſæ Geometriæ & Trigonometriæ tam ſphæricæ, quam planæ, quæſtionibuſque & problematibus aſtronomicis chronologiciſque ad Calendarium eccleſiaſticum pertinentibus, ope tabularum logarithmicarum facili modo ſolvendis, *Romæ* An. 1730, in 4. reg. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 14).

§. 39. Hic denique commemorare lubet ADRIANI METII, Med. D. & Matheſeos Profeſſoris in Academia Friſiorum, *Primum mobile aſtronomice, ſciographice, geometrice & hydrographice nova methodo explicatum.* Prodiit editio nova ab innumeris mendis vendicata & inſtrumentis mathematicis aucta a GUILIELMO BLAEU *Amſtelodami* An. 1633, in 4. (Tomus I, Alph. 2. Tom. II, Alph. 1, plag. 12. Tom. III, Alph. 1, plag. 10. Tom. IV, plag. 20). Primo exponitur doctrina Sphærica, Gnomonica & Geographica; ſecundo continetur accurata deſcriptio Aſtrolabii utriuſque & ejus uſus, una cum Trigonometria ſphærica; tertio ſolvuntur problemata primi mobilis per aſtrolabium, Trigonometriam ſphæricam & Tabulas Aſtronomicas; quarto denique problemata primi mobilis geometrice delineantur & arithmetice ſolvuntur, atque Tabulæ geographicæ & hydrographicæ deſcribuntur, & per eaſdem, tumque per Canones ex ſecantibus conflatos, Ars navigandi abſolvitur.

CAPUT XI.

De Architectura Civili.

§. 1. INtegram Architecturam civilem tradidit VITRUVIUS, qui ſub AUGUSTO floruit, cui decem *De Architectura* libros dedicavit. Optima editio Latina prodiit *Amſtelodami* An. 1649, in fol. (6 Alph.).



Accessere huic editioni novæ castigationes & observationes GUIL. PHILANDRI integræ, DANIELIS BARBARI & CLAUDII SALMASII excerptæ & passim insertæ. Præmittuntur *Elementa Architecturæ* HENRICI WOTTONI, Equitis Angli: subjiciuntur *Lexicon Vitruvianum* BERNHARDI BALDI, ejusdem *Scamilli impares Vitruviani*, *De pictura* libri tres LEONIS BAPTISTÆ DE ALBERTIS, *De sculptura* excerpta ex Dialogo POMPONII GAURICI & Commentarius *De sculptura & pictura* LUDOVICI DEMONTIOSII.

§. 2. Reprehendunt in egregio alias opere *Vitruviano*, quod nullum ordinem tenuerit; quod obscure scripserit, nempe judice LEONE BAPTISTA DE ALBERTIS (*a*) Græcis Latine & Latinis Græce; quod denique multa superflua ac aliena immiscuerit. Hinc PERRAULT, quemadmodum olim suaserat PHILIBERTUS DE L'ORME, regulas Architectonicas Vitruvianas ex opere prolixo excerpsit & in ordinem redactas sub titulo: *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* publici juris fecit (*Amstelodami* An. 1681, in 8. 16½ plag. & fig. æn. plag. 1½). Textum obscurum VITRUVII in versione Germanica, & adjecta singulis capitibus paraphrasi clariorem redidit D. GUALT. H. RIVIUS. Recusa est hæc versio *Basileæ* An. 1614, in fol. (7 Alph. 2 plag.). In paraphrasi seu Commentario, si mavis, more *Vitruviano*, multa aliena admiscuit. Magis commendanda est versio Gallica, quam primum An. 1673, typis describi, sed An. 1684, auctiorem & emendatiorem recudi curavit PERRAULT adjectis notis selectis & figuris æri nitidissime incisis (*Parisiis* in fol. reg. 4 Alph. 5 plag.). Idem PERRAULT opus præclarum de Ordinibus An. 1684, in fol. addidit sub titulo: *Ordonnance des cinq espéces de Colonnes selon la methode des anciens*, in quo præjudicia Architectorum refellit & quod instar supplementi Architecturæ VITRUVII haberi potest, qui doctrinam de Ordinibus imperfectam tradidit.

§. 3. Post VITRUVIUM libros decem *De re ædificatoria* edidit LEO BAPTISTA DE ALBERTIS aliquoties recusos & ex idiomate Latino in varias Linguas translatos. Prodiit Latine *Parisiis* An. 1512, in 4. (2 Alph.) & *Florentiæ* An. 1585. Italice lucem adspexit *Venetiis* An. 1546, in 8. (1 Alph. 9½ plag.); Gallice An. 1553. Multa habet utilia; sed VITRUVIO, quemadmodum intenderat, palmam præripere non potuit. Doctrinam de Ordinibus non satis perfectam tradidit.

§. 4. Mox secuti sunt SEBASTIANUS SERLIUS & ANDREAS PALLADIUS coætanei, quorum ille septem, hic quatuor *De Architectura* libros

(*a*) Lib. 6, cap. 1, de re ædificatoria pag. 80, & seq.

bros compoſuit. Architecturæ *Serlianæ* libri quinque Italice *Venetiis* An. 1602, in fol. Germanice, *Baſileæ* An. 1609, in fol. (4 Alph. 13 plag.) prodiere. Quinque tantum ordines cum variis ædificiorum generibus deſcribit; regulas ex VITRUVIO ſupponit, a quibus recedere religioni duxit. Vid. lib. 3, f. 46, edit. Venetæ. Liber ſextus de ædificiis privatis in publicum nondum prodiit: Septimum de ædificiis publicis JACOBUS STRADA Latine & Gallice *Francofurti* An. 1575, in fol. imprimi curavit.

§. 5. PALLADIUS hanc laudem meruit, quod ſplendorem ordinibus ac operibus ſuis conciliaverit. Libro primo regulas fundamentales Architecturæ tradidit; reliquis varia ædificiorum & operum architectonicorum genera delineavit. Commendatur Architecturæ purioris ſtudioſis. Prodiere libri omnes Italice An. 1575, in fol. recuſi anno ſuperiore An. 1714, *Venetiis* in fol. adjecto ipſius de Antiquitatibus Romanis tractatu. Libros duos priores GEORGIUS ANDREAS BOECKLER, Germanice vertit & multis annotationibus auxit (*Norimbergæ* 1689, in fol. 1 Alph. 3 plag. Tabb. 88). Idem PALLADIUS ſcripſit *de Templis Romanis*, (An. 1554, in 8).

§. 6. PHILIBERTUS DE L'ORME, Caroli IX Conſiliarius, Eleemoſinarius & Architectus An. 1567, *Pariſiis* in fol. edidit novem *De Architectura* libros idiomate vernaculo. Architecturæ peritia adeo celebris erat, ut ad excitanda palatia Principum ex Gallia in exteras regiones evocaretur.

§. 7. JACOBUS BAROZZIUS VIGNOLA An. 1631, Italice de quinque ordinibus ſcripſit, cujus liber in varias linguas translatus. Utor ego editione Gallica, quæ ſub titulo: *Régles des cinq Ordres d'Architecture de* J. B. DE VIGNOLE, *avec pluſieurs augmentations de* MICHEL ANGE BUONAROTI, cura DURÆI DE CHAMPDORE', *Lugduni Batavorum* An. 1712, in 8. prodiit (plag. $9\frac{1}{2}$). Eundem prolixis additamentis locupletavit DAVILER & idiomate Gallico Pariſiis in 4. edidit cum Lexico Architectonico. Mox recuſum eſt opus ſub titulo: *Cours d'Architecture, qui comprend les Ordres de* VIGNOLE *avec des Commentaires, les figures & deſcriptions des plus beaux bâtimens & de ceux de* MICHEL ANGE *&c. Amſtelodami* An. 1694, in 4. (3 Alph. 20 plag. Tabb. 103, magnam partem textui inſertæ). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS Germanice vertit & notis quibuſdam auctum, omiſſo Lexico, *Amſtelodami* An. 1699, in 4. (2 Alph.) edidit, figuram plagulis $3\frac{1}{2}$, adjectis ultra eas, quæ in editione Gallica habentur. Prodiit nuper nova editio Gallica *Pariſiis* in 4. auctior. Laudatur ob facilitatem & perſpicuitatem. Unde omnibus fere ſeſe probavit, qui praxi operam dant.

§. 8. VIN-



§. 8. VINCENTIUS SCAMOZZI An. 1615, Venetiis sermone patrio edidit librum primum, secundum, tertium, sextum & septimum *Ideæ Architecturæ universalis* in fol. Præstantissima editio est, quæ idiomate Gallico *Lugd. Batav.* An. 1713, in fol. reg. (3 Alph. 5 plag. Tabb. 105, quarum 84 textui insertæ) sub titulo: *Oeuvres d'Architecture de* VINCENT SCAMOZZI prodiit. Liber sextus & tertius Germanice versus sub titulo: *Klärliche Beschreibung der fünf Säulen-Ordnungen und der gantzen Bau-Kunst. Norimbergæ* An. 1697, in fol. (2 Alph. 6 plag. Tabb. 85) lucem adspexit. Laudatur, quod Symmetriam unus omnium optime excoluerit, sed intricate scribit.

§. 9. CAROLUS PHILIPPUS DIEUSSART in *Theatro Architecturæ civilis*, quod vernaculo sermone *Bambergæ* An. 1697, in fol. reg. (1 Alph. 3 plag. Tabb. 95) prodiit, non modo regulas Architectonicas explicavit, verum etiam Ordines juxta institutum PALLADII, VIGNOLÆ, SCAMOZZI, PETRI CATANEI, SEBASTIANI SERLII & BRANCÆ inter se comparavit: quod idem executus est ante ipsum ROL. FREARD DE CHAMBRAY in *Parallelismo Architectonico* Gallice *Parisiis* An. 1650, in fol. publicato. Et postea idem fecit LE BLOND in Libro sub titulo: *Parallele des V. Ordres d'Architecture*, *Parisiis* An. 1710, in 4. edito. Plurium quoque Architectorum Ordines inter se confert JOHANNES CHRISTIANUS SEYLER, in *Parallelismo Architectonico* Germanice *Lipsiæ* in fol. edito.

§. 10. FRANCISCUS BLONDEL in *Cursu Architecturæ* Gallico (*Parisiis* An. 1698, in fol. reg. 8 Alph. 14 plag. Tabb. 24, cum figuris plurimis textui insertis) parte prima Ordines VITRUVII, VIGNOLÆ, PALLADII & SCAMOZZI explicat; in ceteris quatuor ex omnium Architectorum celebrium scriptis congessit, quicquid circa ordinum usum notatu dignum occurrit. Habentur etiam in eodem alia nonnulla ad Architecturam spectantia, v. gr. de fenestris & scalis. Cursus hujus aliquid jam 1675 prodierat. Ea potissimum explicare intendit, quæ ad ornatum ædificiorum faciunt.

§. 11. NICOLAUS GOLDMANNUS, Vratislaviensis, in Tractatu *de Stylometris* (*Lugd. Batav.* An. 1661, fol. Lat. & Germ. 9 plag. Tabb. 40) ostendit, quomodo Ordines Architectonici ab ipso ad majorem perfectionis gradum deducti ope peculiarium quorundam instrumentorum facile delineari possint: quorum & constructionem, & usum docet, textui Latino ad latus adjecta versione Germanica. In opere vero Architectonico, quod LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS sub titulo: *Vollständige Anweisung zu der Civil-Bau-Kunst* (*Guelpherbyti* An. 1696, in fol. reg. 2 Alph. 4 plag.

Tabb.

Tabb. 74) publici juris fecit, præter Ordinum doctrinam, magna dexteritate tradiditquicquid in VITRUVII, & Architectorum Italorum scriptis atque VILALPANDI Commentario in Prophetam Ezechielem, ex quo se plura didicisse ait, quam ex Architectorum ceterorum omnium scriptis, boni continetur: ita ut hoc opus ceteris omnibus præferatur. Cl. Editor An. 1699, Appendicem sub titulo: *Ausübung der Civil-Bau-Kunst des Goldmanns*, in fol. (1 Alph. 14 plag. Tabb. 19) adjecit, in quibus ex aliis supplet, quæ in eo scitu necessaria desiderantur. Ordinem quoque sextum, quem Germanicum appellat, proponit; sed hactenus in usum non receptum. Fallitur autem plurimum editor, dum sibi aliisque persuadere vult, GOLDMANNUM regulas Architecturæ demonstrasse & eam in formam scientiæ redegisse. Plura ad operis hujus illustrationem posthac edidit STURMIUS, qui Architecturæ totus erat deditus. Sed de his dicemus mox apertius.

§. 12. DOMINICUS DE ROSSI in *Studio Architecturæ civilis in ornamentis portarum & fenestrarum, delineatis ex insignioribus Romæ ædificiis* An. 1702, seu potius 1712, *Romæ* in fol. reg. edito figuris æneis 143, celeberrimorum Architectorum monumenta circa ornatum portarum & fenestrarum repræsentat. *Augustæ Vindelicorum* figuris ad minorem modulum reductis recusum est hoc opus, ut facilius & minori sumtu comparari possit. Plurima tamen habet, quæ imitari non licet, nisi a puritate Architecturæ Græcorum recedere velis.

§. 13. Ad eam perspiciendam inservit opus, quod ANTONIUS DESGODETZ, qui ædificia antiqua Romæ ex ruderibus nitidissime delineavit, sub Titulo: *Edifices antiques de Rome* (*Parisiis* An. 1697, in fol. (3 Alph. 17 plag.) edidit.

§. 14. JOHANNES BALTHASAR LAUTERBACH in *Compendio Architecturæ* (*Amstelodami* An. 1699, in 8. Gall. 2 plag. Tabb. 18) ordines Architectonicos delineandi methodum facillimam proponit.

§. 15. In *Gallia* An. 1728, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 19½, Tabb. 150) prodiit opus architectonicum sub titulo: *Architecture moderne, ou l'Art de bien batir pour toutes sortes de Personnes, tant pour les Maisons des particuliers, que pour les Palais.* Explicantur satis perspicue omnia, quæ ad exstructionem ædificiorum omnis generis scitu necessaria, excepta doctrina de Ordinibus, quæ aliunde nota supponitur. Maximam operis partem complent omnis generis ædificiorum delineationes, quibus doctrina de distributione ædificiorum illustratur, vulgo vel neglecta, vel saltem nonnisi levi brachio pertractata. Commendatur etiam Tractatus de Architectura, quem LE MUET in 4. edidit, inventiones quasdam novas continens; sed nobis non visus.



§. 16. Ædificia magnifica, cura PETRI POST Architecti insignis, passim per Bataviam exstructa accurate describuntur tum quoad ichnographiam, tum quoad orthographiam cum externam, tum internam in opere splendido, quod sub titulo: *Les Oeuvres d'Architecture de* PIERRE POST, *Lugd. Batav.* An. 1715, in fol. reg. (plag. 22, Tabb. 75) prodiit. Orthographiæ externæ & ichnographiæ ædificiorum, quæ in Batavia extruxit PHILIPPUS VINGBOON, Architectus Amstelodamensis, exhibentur in alio opere, quod sub titulo: *Les nouvelles Oeuvres d'Architecture de* PHILIPPE VINGBOONS *Lugduni Batav.* An. 1715, in fol. reg. (plag. 11, Tabb. 80) lucem adspexit.

§. 17. Villas Veterum, in quibus describendis admodum parcus est VITRUVIUS, idiomate Anglico plenius descripsit ROBERTUS CASTELLUS & sub titulo: *The Villa's of the Ancients illustrated*, *Londini* suis sumtibus in fol. (Alph. 1, plag. 12, Tabb. 11) edidit. *De Amphitheatris* vero & præcipue Veronensi libros duos idiomate Italico *Veronæ* 1718, in 12, (plag. 15, Fig. æn. 15) edidit SCIPIO MAFFEIUS, in quo non minus ea, quæ ad historiam, quam architecturam eorundem pertinent, exponuntur. Formam minorem elegit autor ob commodiorem usum in ruderibus eorundem perlustrandis.

§. 18. Anno 1721, *Viennæ Austriæ* in fol. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 93) prodiit opus splendidissimum JOHANNIS BERNHARDI FISCHERI AB ERLACHEN, S. Cæsareæ Majestatis Architecti primarii, sub titulo: *Entwurff einer historischen Architectur*, hoc est, Speciminis Architecturæ historicæ, sumtibus Autoris, in quo varia exhibentur ædificia, quæ ab antiquis historicis celebrantur, vel hodienum apud exteras gentes conspiciuntur, æri nitidissime insculpta. Textui Germanico adjicitur versio Gallica, ut exterorum quoque usui inserviat.

§. 19. In *Opere architectonico* FRANCISCI BORROMINI, Patrum Congregationis Oratorii, quod Romæ est, Architecti, describuntur Oratorium Ædesque Romanæ P. P. Congregationis Oratorii S. *Philippi Neri*. Prodiit *Romæ* An. 1725, in fol. (plag. 8, Tabb. 67).

§. 20. In *Schola* vero *civili Architecturæ*, quam FERDINANDUS RUGGIERI, Architectus Italus, idiomate patrio *Florentiæ* An. 1722, in fol. reg. (Tabb. 80) edidit, præmissa præfatione & dedicatione cum indice contentorum, exhibentur ornamenta januarum & fenestrarum cum mensuris, ichnographia, orthographia & sectionibus verticalibus e potioribus Florentiæ ædificiis desumta, quæ a celeberrimis Italiæ Architectis extructa esse constat, ita ut nulla per totam Italiam occurrat urbs, quæ ædificiis se magis commendet Florentia.

§. 21. Non



§. 21. Non exiguus est numerus illorum scriptorum, quæ illustrandæ Architecturæ *Goldmanniæ* causa reliquit LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS & quæ post fata ipsius *Augustæ Vindelicorum* impensis Chalcographi Augustani JEREMIÆ WOLFII lucem adspexerunt. Eorum argumentum ex ipso titulo comparet, quos hic ex Germanico in Latinum versos exhibere lubet. *Nimirum* An. 1718, in fol. (plag. 8, Tabb. 11) lucem adspexerunt *Idea & compendium Architecturæ Civilis*, explicationem terminorum technicorum & præcipuarum regularum exhibens; An. 1717, (plag. 17, Tabb. 17) *Officina ornatus architectonici perfecta*, in qua ordines architectonici juxta GOLDMANNUM, cujus insignia in hoc genere merita, describuntur; An. 1730, (plag. 4½, Tabb. 10) *Regulæ symmetriæ*, eæque in Architectura templi Salomonæi conspicuæ & ab eodem mutuo in nostra opera transsumtæ; An. 1718, (plag. 4½, Tabb. 9) *Tractatio de arcuationibus architectonicis triumphalibusque arcubus rite designandis*; An. 1720, (plag. 3, Tabb. 17) *Institutio de interioribus ædificiorum rite ordinandis & disponendis*, ubi etiam de aperturis fenestrarum & januarum, & de caminis, scalis, cœlis conclavium, aulis subdialibus præcepta reperiuntur. Anno eodem (plag. 4½, Tabb. 5) *Institutio Goldmanniana de ornatu architectonico extraordinario*, veluti picturis, quibus ædificia exornantur, statuis & sculpturis, obeliscis, encarpis, cornibus Amaltheæ &c. An. 1715, (plag. 4, Tabb. 15) *Institutio de commoda dispositione ædium privatarum & civilium*; An. eodem (plag. 5, Tabb. 8) *De suburbanis & nobilium ædibus in agris*; An. 1718, (plag. 21, Tabb. 35) *De construendis palatiis Principum* ad Architecturæ regulas & genium seculi nostri; An. eodem (plag. 6, Tabb. 13) *De ædificiis ad conventus publicos Provinciæ rectorum, magistratuum, mercatorum &c. instituendos aptis*; An. eodem (plag. 8, Tabb. 22) *De templis varii generis bene construendis*; An. 1720, (plag. 6½, Tabb. 15) *De ædificiis publicis, quæ curæ orphanorum, liberalibus studiis erudiendorum, ob flagitia castigandorum, senum, ægrotorum, peregrinorum & vinctorum custodiæ destinantur, rite parandis*; An. eodem (plag. 2, Tabb. 5) *De monumentis defunctorum, cenotaphiis, castris doloris* &c. An. eodem (plag. 4½, Tabb. 10) *De machinis hydraulicis, aquæ ductibus, fontibus & cisternis publicis*, & tandem An. 1721, (plag. 2½, Tabb. 4) *De Navium armamentariis & stationibus, itemque partibus rite parandis.* Ceterum huc etiam pertinet Prodromus Architecturæ Goldmannianæ editioni novæ & auctiori præmissus, qui sub titulo: *Vorbereitung zu einer neuen und vermehrten Edition der vollständigen Anweisung zur Civil-Bau-Kunst, Augustæ Vindelicorum* An. 1714, in fol. reg. (plag. 10, Tabb. 29) prodiit.

diit. In eo de cognitione Architecto necessaria agit, consilium impertitur, quomodo Princeps efficere possit, ut omnis materia sufficienti copia in promtu habeatur, ædificium publicum describit, in quo materiæ cum machinis & instrumentis asserventur, & denique specimina quædam Architecturæ exhibet, veluti ideam palatii principalis, domus suburbanæ Ducis Megapolitani & turris alicujus prægrandis.

§. 22. In Anglia GUILIELMUS HALFPENNY *Londini* An. 1728, in 4. (plag. 3, Tabb. 15) edidit libellum sub titulo: *Magnum in parvo*, seu *The Marrow of Architecture*, hoc est, Medulla Architecturæ. In eo ordines architectonicos juxta PALLADIUM una cum arcubus delineare docet.

§. 23. Artem tignariam illustrant DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1) JOHANNES WILHELM in *Architectura civili* idiomate Germanico edita *Norimbergæ* in fol. (5 plag. Tabb. 74) & JOHANNES VOGEL in *Architectura moderna* Germanico itidem idiomate conscripta (*Hamburgi* An. 1707, in fol. 3 plag. Tabb. 36). In Anglia JACOBUS SMITH edidit Tractatum de Arte tignaria *Londini* An. 1733, in 8. maj. (plag. 2, Tabb. 41) sub titulo: *The Carpenters Companion*, h. e. Fabrorum lignariorum Comes. Sed non alia habet quam WILHELMUS, nisi quod appendicem de ordinibus delineandis adjecerit.

§. 24. Artem secandi lapides in usum architectonicum, quam primus dedisse creditur PHILIBERTUS DE L'ORME in Architectura (§. 6), docent DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1), qui sua ex opere, quod P. DERAN An. 1643 publicavit, præstantissimum in hoc genere, descripsit & DES ARGUES, cujus liber ex Gallico in Germanicum versus sub titulo: *Kunstrichtige und probmässige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau Kunst*, *Norimbergæ* An. 1699, in 8. (15 plag. Tabb. 154) prodiit.

§. 25. Quoniam vero Autores isti, si P. DECHALES excipias, omissis demonstrationibus, tantummodo praxin inculcant, neque etiam hic perfectam dedit Theoriam; ideo hunc defectum supplere conatus est FREZIER in *Theoria & Praxi de Sectione Lapidum*, seu *Tractatu de Stereotomia*, sermone Gallico duobus Tomis *Argentorati* 1737, & 1738, in 4. maj. edito (Tomus I, Alph. 2, plag. 14, Tabb. 27. Tom. II, Alph. 2, plag. 19½, Tabb. 69). In usum eorum, qui praxi operam navant, ex Tomo secundo excerpi poterant, quæ huc faciunt, aut opus insigne P. DERAN in Linguam Germanicam verti mereretur.

§. 26. Ad Architecturam aquarum spectant libri Italici sequentes: 1. Jo. BAPTISTÆ BARATTERI *Architettura d'Acque* (*Piacenza* An. 1656, in fol. 3 Alph. 6 plag.) 2. CORNELII MEYERI, Batavi, *L'Arte di restituire*



tuire a Roma la tralasciata navigatione del suo Tevere (*Romæ* 1675, in fol. 2 Alph. 3 plag. cum multis figuris textui insertis) & ejusdem *Nuovi ritrovamenti* (*Romæ* An. 1689, in fol. plag. 8, & 1696, in fol. plag. 12, cum figuris plurimis). 3. DOMINICI GUIELMINI *della natura de' fiumi Trattato* (*Bononiæ* An. 1697, in 4. 2 Alph. 2 plag. 15 Tabb.). Ex *Meyeri* libro insigni plagio sua omnia descripsit Anonymus Gallus in libello *Amstelodami* An. 1696, in reg. 8. edito (6 plag. Tabb. 12) sub titulo: *Traité des moyens de rendre les Rivières navigables*. Quoniam vero Theoriæ loco est, quod ab Italis præsertim de motu aquarum traditum; ideo non alienum a scopo præsente est injicere mentionem sylloges scriptorum de motu aquarum, quæ sub titulo: *Raccolta d'Autori, che trattano del moto dell' Aque*, Tomis tribus in 4. maj. *Florentiæ* An. 1723, (Alph. 9, plag. 6, Tabb. 44, cum multis figuris textui insertis) prodiit.

§. 27. Ad Architecturam aquarum referri quoque potest Tractatus de pontibus & aggeribus & dissertatio de erismatis, fornicibus, pilis & anteridibus pontium HENRICI GAUTIER, Architecti & Inspectoris viarum regiarum, pontium & aggerum in Gallia. Prodiit ille sub titulo: *Traité des ponts & chaussées*, *Parisiis* An. 1716, in 8. (plag. 14, Tabb. 26); hæc vero sub titulo: *Dissertation sur les Culées, voussoirs, piles & poussées des Ponts*. Habemus ab eodem autore Tractatum de viis muniendis sub titulo: *Traité de la Construction des Chemins*, (*Parisiis* An. 1716, in 8. (plag. 8, Tabb. 5) editum.

§. 28. De Architectura navali sermone Anglico commentatus est WILHELMUS SUTHERLAND, cujus quinque tentamina huc spectantia sub titulo: *The Shipbuilders Assistant, or Some Essays towards compleating the Art of Marine Architecture*, *Londini* An. 1711, in 4. (Alph. 1, Tabb. 13) lucem adspexerunt. Inprimis autem hanc Architecturæ partem tradidit Anonymus in Arte extruendi naves & earum constructionem perficiendi, quæ *Amstelodami* sub titulo: *L'Art de batir les Vaisseaux*, in 4. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 147, quarum 35 textui inseruntur) edita.

§. 29. Geometriam practicam ad Architecturam civilem applicatam addiscere licet ex opere Anglico, quod sub titulo: *Practical Geometry applied to the usefull Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration*, *Londini* 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. 40) edidit BATTY LANGLEY. Eodem instituto inservit *Architectura practica*, quam BULLET, Architectus Regius, An. 1691, in 8. maj. (Alph. 4, plag. 4) *Paris.* publici juris fecit.

§. 30. In Dictionario Architectonico, quod *Londini* 1734, in 8. reg. (Alph. 2, plag. 18, Tabb. 33) sub titulo: *The Builder's Dictionary* prodiit,

P 3

diit, non modo termini explicantur, verum etiam ex Architectorum celebrium scriptis excerpuntur, quæ res ipsas vocabulis denotatas concernunt. Unde non modo usui est Anglis, verum etiam exteris usui esse potest. Ceterum nullam hic mentionem facimus scientiæ Architectorum militarium de BELIDOR, in qua multa habentur ad Architecturam spectantia singularia, quæ alibi frustra quæsiveris, quia de hoc libro dicemus capite 13.

CAPUT XII.

De Pyrotechnia.

§. 1. INter nostros, qui Pyrotechniæ operam dant, maximi fiunt CASIMIRUS SIMIENOWITZ, Polonus, JOHANNES SIGISMUNDUS BUCHNERUS & ERNESTUS BRAUNIUS. Illius opus a THOMA LEONHARDO BEEREN ex Latino idiomate in Germanicum translatum & a DANIELE ELRICH integra parte secunda auctum prodiit *Francofurti ad Mœnum* An. 1676, in fol. sub titulo: *Vollkommene Büchsen-Meisterey-Kunst.* Ex eo sua plerumque descripsit DECHALES in Cursu (§. 4, cap. 1). Istius *Theoria & praxis Artilleriæ* Germanico idiomate *Norimbergæ* An. 1685, in fol. (2 Alph. 18 plag. Tabb. 53) Hujus denique *Novissimum Fundamentum & praxis Artilleriæ* eodem sermone conscriptum *Dantisci* An. 1687, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 60) lucem adspexit. Ceterum Autores isti non tantum de iis agunt, quæ in bello usui sunt, sed ignium quoque festivorum rationem exponunt.

§. 2. MICHAEL MIETH in *Artilleriæ recentiori praxi* lingua nobis vernacula conscripta (*Francof.* An. 1684, in fol. 3 Alph. 10 plag. Tabb. 60) tormentorum & mortariorum descriptionem omnium exactissimam dedit & ignium nocivorum rationem declaravit, festivis omissis. Atque hi Autores abunde satisfaciunt iis ipsis, qui Pyrotechniæ data opera incumbunt.

§. 3. Inter Gallos eminet SURIRÆUS DE S. REMIGIO, cujus Commentarii Pyrotechnici (*Mémoires d'Artillerie*) accuratam descriptionem continent omnium machinarum & instrumentorum bellicorum hodie usitatorum, una cum rebus aliis eo pertinentibus. Optima editio est *Parisiensis* An. 1707, in 4. reg. (4. Alph. 17 plag. Tabb. 196), quæ ceteris quoque longe auctior.

§. 4. Ob peritiam bellicam celeberrimus COEHORNIUS sermone Batavo de Artilleria libellum brevem, sed



ſed autore ſuo dignum, conſcripſit, qui ſuppreſſo ejus nomine in Germanicum translatus ſub titulo: *Der gründliche Unterricht von der Artillerie*, *Hamburgi* An. 1699, in 8. (10 plag. Tabb. 23) prodiit.

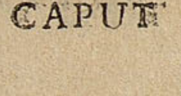
§. 5. Tyronum uſui ſervit Fabrica *Vulcani*, quam *Eques de S. Juliano* (*Chevalier* DE SAINT JULIEN) *Hagæ* An. 1706, in reg. 8. (10 plag.) edidit. Titulus libri: *La Forge de Vulcain, ou l'Appareil des Machines de Guerre.*

§. 6. An. 1713, idiomate vernaculo prodiit Compendium pyrotechnicum, Pyrotechniæ ſtudioſis commendandum, ſub titulo: *Gründlicher Unterricht von der Theoria und Praxi der heutigen Büchſenmeiſterey*, *Francofurti* An. 1713, in 8. (2 Alph. 4 plag. 29 Tabb.). Si titulo fidem habemus, lingua Gallica ipſum conſcripſit *Eques* DE S. JULIANO modo laudatus, & inde in Germanicam tranſtulit AUGUSTINUS BRAND. Sed diverſum non modo eſt a Fabrica *Vulcani* paulo ante laudata; verum etiam partem primam integram verbotenus ex MIETHII Artilleria deſcriptam reperio, quod quomodo in verſione libri a Gallo Gallice conſcripti accidere potuerit, non ſatis apparet.

§. 7. Aliud compendium, ſed minoris pretii, ante dedit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER Tom. III, & IV, *Manualis Architecturæ militaris* (*Francof.* & *Lipſ.* An. 1689, in 16, Tom. III, 4 plag. Tabb. 11, & Tom. IV, 10 plag. Tabb. 34). Cum tamen COEHORNIUS, *Eques* DE S. JULIANO & BRANDIUS tantum tradant, quæ uſui bellico inſerviunt; BOECKLERUS quoque de ignibus feſtivis tractat.

§. 8. Ceterum huc etiam referri debet BLONDELLI Tractatus de bombis jaciendis, qui ſub titulo: *L'Art de jetter les Bombes*, *Pariſiis* An. 1683, in 4. prodiit & in Germanicam linguam translatus *Sulzbaci* An. 1686, in 8. recuſus. Scriptum Mathematico dignum. Huic affine eſt ſcriptum, quod ſub titulo: *Le Bombardier François*, DE BELIDOR, *Pariſiis* editum, *Amſtelodami* recuſum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 8), in quo ſimul praxis Pyrotechniæ concinna perſpicuitate exponitur. Pertinet huc etiam F. E. Comitis DE HERBERSTEIN *Cyclodiatomia*, qua pro rei tormentariæ incremento motum ac tempus projectorum menſurat & demonſtrat. (*Pragæ* An. 1716, in 8. Alph. 1, Tabb. 20).

CAPUT



CAPUT XIII.

De Architectura Militari.

§. 1. QUi de Architectura militari commentati sunt, vel formas muniendi proprias, vel alienas exponunt.

§. 2. Primum forma muniendi Belgica admodum celebris extitit, de qua scripsit ADAMUS FREYTAG, Polonus, cujus *Architectura militaris* Germanice prodiit *Amstelodami* An. 1665, in fol. (2 Alph. 9 plag. Tabb. $1\frac{1}{2}$ Alph.). Eandem in numeris tantum immutavit GERHARDUS MELDER, cujus *Praxis fortificatoria*, *Francofurti* An. 1666, in fol. lucem adspexit (plag. 36, Tabb. 8).

§. 3. Minori autem in pretio statim haberi cœpit, cum An. 1645, Comes DE PAGAN suam muniendi formam publicaret *Parisiis* in fol. (1 Alph. 6 plag. Tabb. II) sub titulo: *Les Fortifications du Comte* DE PAGAN, postea in sermonem Germanicum translatam. Cum eo in multis convenit HENRICUS RUSIUS *Baro de* RUSENSTEIN, cujus muniendi forma cum *Melderiana* prodiit (§. 2).

§. 4. Eidem quoque agnata est, magis tamen quam *Rusiana* ab eadem diffidet, quam BLONDELLUS sub titulo: *Nouvelle maniére de fortifier les places*, *Parisiis* An. 1686, in 12. reg. (5 plag. Tabb. 12) in lucem emisit, recusam *Hagæ Comitum* (An. 1686, in 8) bonam quidem, sed sumtuosam nimis.

§. 5. Comes DE VAUBAN duas muniendi formas invenit & secundum eas celebria munimenta exstruxit; sed neutram ipsemet descripsit. Priorem optime delineavit Abbas DU FAY, qui eam sub titulo: *La véritable maniére de bien fortifier de M.* VAUBAN in lucem publicam emisit. (*Amstelod.* An. 1692, in 12. plag. 9). Posteriorem primus descripsit Autor Anonymus in libro Gallico, cujus titulus: *L'Ingénieur François* (*Paris.* An. 1691, in 8. reg. $13\frac{1}{2}$ plag. Tabb. 33). Utramque STURMIUS, aliquoties jam laudatus, in libro Gallico sub titulo: *Le Véritable* VAUBAN explanavit (*Hagæ Comitum* 1709, in reg. 8. plag. 14, Tabb. 31). Recenset idem regulas Architecturæ militaris fundamentales & principia Arithmeticæ ac Geometriæ practicæ more communi præmittit, ut adeo tyronum instituto inserviat hic liber.

§. 6. COEHORNIUS suam muniendi methodum primum sermone Batavo edidit *Leeuwardiæ* An. 1685, in fol. (45 plag. Tabb. 14). Postea in sermonem Gallicum translatus prodiit *Hagæ Comitum* An. 1706, in reg. 8. (19 plag.

(19 plag. Tabb. 14) ſub titulo: *Nouvelle Fortification, tant pour un terrain bas & humide, que ſec & élevé.*

§. 7. Singulares muniendi formas, a reliquis prorſus diſſidentes, apud Italos dedere ALEXANDER DE GROTTE & DONATUS ROSETTI. Prior prodiit Italice *Venetiis* An. 1617, (3 Alph. in fol.) anno ſequente Monachii Germanice recuſa: poſterior itidem Italice *Auguſtæ Taurinorum* An. 1678, in fol. (Alph. 2, plag. 5).

§. 8. Similiter apud noſtros inuſitatam reliquis formam dedit BERNHARDUS SCHEITER in libro Germanico, cui titulus: *Neu vermehrte und verſtärckte Veſtungs-Bau-und Kriegs-Schule* (*Brunſwigæ* An. 1672, in fol. 11 Alph. 7 plag. Tabb. 24). Eam cum anno ſequente oppugnaret CHRISTIANUS NEUBAUER eidemque aliam ſuam opponeret in libro Germanico, cui titulus: *Wohlmeinende Gedancken, oder Diſcurs über ausgegange Fortification des* Tit. *Herrn JOH. BERNHARD SCHEITERS* (*Coloniæ ad Spream* in 8.); SCHEITERUS An. 1677, *Argentorati* in fol. (1 Alph. 2 plag. Tabb. 8) *Examen fortificatorium* in lucem publicam emiſit, in quo *Neubauerianam* oppugnat, ſuam defendit, aliamque novam ſuperaddit. NEUBAUERUS autem An. 1679, ſuam in *vera praxi Architecturæ militaris* (*Stargardiæ* An. 1679, in fol. plag. 19, Tabb. 8) uberius expoſuit.

§. 9. ERNESTUS FRIDERICUS DE BORGSDORF novas muniendi methodos publicavit cum in Munimento inexpugnabili, cui titulus: *Unüberwindliche Feſtung* (*Ulmæ* An. 1682, in 8. plag. 7, Tabb. 8), tum in ſcripto altero, cui titulus: *Die befeſtigte Stütze eines Fürſtenthums, oder neu erfundene Defenſion wieder das ſonſt Welt bezwingende Canoniren, Bombardiren und Miniren.* (*Norimbergæ* An. 1687, in 8. cum aliquot figuris).

§. 10. GEORGIUS RIMPLERUS in libello Germanico, cui titulus: *Die beveſtigte Feſtung* (*Francofurti* An. 1674, in 12. plag. 16) hactenus uſitatas muniendi formas omnes rejicit, tanquam principiis ſpuriis nitentes, & axiomata prorſus nova ſubſtituit: quibus tamen convenientem muniendi formam ipſe non delineat. Nemo autem magis in ea delineanda deſudavit, quam Cl. STURMIUS in libello, cui titulus: *Entdeckung der unſtreitig allerbeſten Manier zu beveſtigen* (*Francof. ad Oderam* An. 1704, in 8. plag. 12, Tabb. 9). Alias quoque eandem operam ſumſit DANIEL SUTTINGER in ſcripto Germanico *Dreſdæ* in fol. edito (plag. 14, & 9½ plag. fig.).

§. 11. Scripta RIMPLERI admodum rara annotationibus & ſchematiſmis, quæ deſiderabantur, illuſtrata, additis nonnullis aliis, *Dreſdæ* in 4. An. 1724, (Alph. 3, plag. 9, Tabb. 10) recudi curavit LUDOVICUS ANDREAS HERLIN, qui STUR-

STURMII de RIMPLERI inventis judicium parum probat.

§. 12. RIMPLERI principia probat J. H. LANDSBERGIUS, Germanus, Statuum Belgii fœderati Architectus militaris primarius, & iisdem consonam muniendi formam delineat: cum tamen non ex asse ipsi satisfaciat, novam quandam aliam substituit, in libro Gallico, cui titulus: *Nouvelle maniere de fortifier les places* (*Hagæ Comitum*, An. 1712, in 4. plag. 11, Tabb. 8).

§. 13. Idem laudatus LANDSBERGIUS, una cum aliis Architectis militaribus peritis, valde probat *Architecturam militarem*, quam DANIEL SPECKLE, Architectus Argentoratensis, jam An. 1589, in fol. (2 Alph. 10 plag. Tabb. 36) publici juris fecit. Hinc etiam factum est, ut præclarum in hoc genere opus *Dresdæ* An. 1705, in fol. fuerit recusum (2 Alph. 12 plag. Tabb. 24).

§. 14. Sunt vero adhuc plures inter nostros, qui singulares muniendi formas dedere, attentione Architectorum militarium non indignas. Huc refero JOHANNEM FRANCISCUM GRIENDEL AB AACH, qui septem muniendi formis, utut eidem fundamento superstructis, inclaruit (*Norimbergæ* An. 1683, in fol. plag. 14, Fig. plag. 15), CHRISTOPHORUM HEER, qui in *Theoria & praxi Artis muniendi* (*Francof.* An. 1689, in 4. plag. 16, Tabb. 30) elegantes dedit sibique proprias constructiones; in *Speculo* vero *Artis muniendi* (*Lipsiæ* An. 1694, in 4. plag. 17, Tabb. 31) præterea varia munimenta celebria Europæ describit, & CHRISTOPHORUM HEIDENMANN, cujus *Architectura militaris* una prodiit *Monachii* An. 1664, in fol. (1 Alph. 22 plag. 27, & fig. plag.) altera ibidem An. 1673, in fol. (plag. 10, & Fig. plag. 14).

§. 15. Nec forte e re esset WILHELMI DILICHII *Peribologiam* (*Francofurti* An. 1640, in fol. 2 Alph. 2 plag. Tabb. 409, seu 9 Alph. 11 plag.) in scenam adducere, quoniam Architecturæ militaris periti multa ad praxin proficua in ea reperient. Immo si verum fateri fas est, in hoc autore occurrunt, quæ dudum posthac in Gallia tanquam nova inventa prodita fuerunt. Unde melius de eo judicium ferendum, quam tulit DECHALES in Tractatu de illustribus Mathematicis Tomo I, Mundi Mathematici (§. 4, cap. 1). Idem quoque edidit *Scholam militarem* (*Francof. ad Mœn.* An. 1689, in fol. 10 Alph. 13 plag. cum ingenti numero figurarum partim æri, partim ligno incisarum), in qua omnia ad bellum tam veterum, quam nostris moribus necessaria describuntur & illustrantur.

§. 16. In eadem scena mimi vices adimplebit WENDELINUS SCHILDKNECHT, qui muniendi formam Batavam stylo histrionico describit (*Stetini* An. 1652, in fol. plag. 129, & fig. plag. $20\frac{1}{2}$).

§. 17.



§. 17. Eclecticam quandam muniendi formam ex ANTONII DE VILLE, *Comitum* DE PAGAN & VAUBAN methodis deductam proposuit Autor Anonymus in libro, cui titulus: *Nouvelle maniére de fortifier les places, tirée des méthodes du Chevalier* DE VILLE *&c.* (*Amstelodami* An. 1689, in reg. 12 plag. 10 Tabb. 15), qui regulas Architecturæ militaris bene explicat, simulque ideam exhibet, quomodo diversorum Architectorum muniendi formas una ad praxin transferre liceat. ANTONII DE VILLE *Ars muniendi* prodiit *Amstelodami* An. 1675, recusa juxta editionem *Parisinam* An. 1672, in 8. (1 Alph. 3 plag. cum figuris multis partim textui insertis, partim seorsim excusis). Multa hic distincte exponuntur, quæ alibi vel omittuntur, vel strictim proponuntur.

§. 18. MATTHIAS DOEGEN in *Architectura militari moderna*, quæ An. 1647, in fol. (Alph. 5, plag. 13, Tabb. 78), Latina lingua prodiit, formam equidem muniendi Batavam nonnisi describit, quæ illo tempore usitatissima erat; multa tamen lectu digna habet iis præsertim, qui in extructione munimentorum scitu necessaria nosse desiderant. Regulas, quas tradit, exemplis veris celebrium tunc temporis per Europam munimentorum illustrat, calculos, ubi iis opus est, perspicue explicat, de figurarum irregularium fortificatione experientia confirmata tradit, modumque munimenta oppugnandi & defendendi declarat. Singula variis historiis tam veteribus, quam novis confirmat. Partem Architecturæ militaris, quæ de locis muniendis agit, *Hercotectonicen*; alteram vero, quæ de munimentis oppugnandis & defendendis tractat, *Areotectonicen* vocat. Et hujus partem oppugnatoriam *Poliorceticen*; repugnatoriam vero *Antipoliorceticen* appellat.

§. 19. BONAJUTUS LORINUS, Nobilis Florentinus, cujus *De Architectura militari* Libri quinque a DAVIDE WORMBSER ex Italico in Germanicum versi *Francofurti ad Mœnum* An. 1607, in fol. prodierunt, multa habet, quæ etiam in Architectura civili usui sunt, & libro quinto Mechanicam practicam tradit, variaque instrumenta & machinas varias describit.

§. 20. DONATUM ROSETTI singularem quandam muniendi methodum invenisse, quæ a ceteris prorsus diffidet, eandemque sub titulo: *Fortificazione à rovescio* sermone patrio edidisse, supra jam meminimus (§. 7). Ejus ideo mentionem injicere lubet, quia peritis viam ad ulteriora sternit. Unde eidem multum tribuit ALEXANDER CHRISTIANUS LE MAITRE in *Troja vetere & nova* An. 1684, in 8. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 14), ob principia utilia lectu dignissimus.

§. 21. Nec minus singularis ea est, quam pro inexpugnabili venditat

tat JACOBUS DE LA VERGNE, Architectus militaris Cæsareus primarius, cujus *Nouvelle Fortification imprenable par force d'Armes*, lucem adspexit *Viennæ Austriæ* An. 1700, in 4. (plag. 17, Tab. 1). Ostendit idem, quomodo munimenta ordinaria ad novam istam formam reduci queant. Edidit idem ibidem An. 1698, duos Tractatus alios in 4. quorum unus inscribitur. *De l'utilité d'avoir un bon Ingénieur ou Directeur général des Fortifications dans un Etat &c.* alter vero: *Nouveau exercice du Gabion & de la Fascine.* Constat ille plag. 11, hic itidem plag. 11, & Tabb. 3. Quemadmodum vero illi jungit Tractatum de officiis Architectorum militarium, qui subsunt Directori generali; ita in altero quoque agit de modo oppugnandi munimenti satis perspicue.

§. 22. Hactenus recensitas muniendi formas omnes, sola Landsbergiana excepta, una cum aliis a nobis brevitatis studio prætermissis atque propriis, breviter describit & ad examen revocat, vir in hoc studiorum genere probe versatus sæpiusque jam nobis laudatus STURMIUS in *Architectura militari hypothetica & eclectica* (*Norimbergæ* An. 1702, in 8. plag. 10, & fig. plag. 6), ex quo adeo libro brevi temporis spatio cognoscere licet, quæ alias ex vastis voluminibus cum multo sumtuum & temporis dispendio forent conquirenda. In prima editione desideratur orthographia munimentorum. Hic vero defectus suppletur in altera, quæ multo auctior *Norimbergæ* An. 1719, in 4. (Alph. 1, Tabb. 41) prodiit.

§. 23. Novam quoque muniendi methodum dedit ROZARD, Architectus militaris Electoris Bavariæ, quam in libro sub titulo: *Nouvelle Fortification Françoise*, *Norimbergæ* in 4. reg. An. 1731, Alph. 1, Tabb. 42) editio describit. In parte altera desiderio aliorum satisfacturus adjecit explicationem trium systematum Comitis DE VAUBAN, qualem ex ipsis munimentis ab eodem extructis hausit, una cum omni praxi offensiva & defensiva, ubi etiam præliorum rationem habet, addens ubivis observationes, quas experientia domestica suggerebat.

§. 24. Restat ut de iis Autoribus dicamus, qui in gratiam Architecturæ militaris studiosorum libros ediderunt. Commendandi hic nobis sunt *Don* SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO in Architectura militari, quæ sub titulo *Ingénieur pratique*, *Bruxellis* An. 1696, in 8. (1 Alph. Tabb. 35) lucem adspexit; Cl. OZANAM, cujus Tractatus de Architectura militari (*Traité de Fortification*) *Parisiis* An. 1694, in 8. reg. (17 plag. Tabb. 44) prodiit; *Eques de S.* JULIANO supra laudatus, cujus *Architectura militaris* publicata est sermone Gallico, *Hagæ Comitum* An. 1705, in 8. (plag. 11, Tabb. 25). In eundem censum venit Ano-

Anonymi Architectus militaris Gallicus supra laudatus (§. 5).

§. 25. In vernacula nostra notissimi sunt libri sequentes: 1 GEORGE CONRAD MARTII *Europäischer Ingenieur* (*Norimbergæ* An. 1696, in 8. 2 Alph. 16 plag. Tabb. 60), qui præter Architecturam militarem etiam Arithmeticam & Geometriam practicam prolixe tradit: 2. JOH. HEINRICI BEHRS *aufs neu verschantzter Turenne oder gründlich-alt und neue Kriegs-Bau-Kunst* (*Francofurti* An. 1690, in 8. 1 Alph. 16 plag. Tabb. 32): 3. JOHANN SEBASTIAN GRUBERS *Friedens- und Krieges-Schule* (*Norimbergæ* An. 1697, in 8. 2 Alph. 11½ plag.): 4. Ejusdem *Examen Fortificatorium* (*Lipsiæ* An. 1703, in 8. 1 Alph. 22 plag. Tabb. 19): 5. ejusdem *neuer und gründlicher Unterricht von der heutigen Fortification und Artillerie* (*Norimb.* 1700, in 8. 1 Alph. 17 plag. 16 Tabb.) aliique.

§. 26. Anno 1722, *Bruxellis* prodiere Principia Architecturæ militaris modernæ (*Les Principes de la Fortification moderne*) Directoris Academiæ militaris Cæsareæ, quæ Bruxellis est, HARTMANNI in reg. (plag. 19, Tabb. 9). Explicat principia *Comitis de* VAUBAN & COEHORNII, ac multus inprimis est in uberius explicanda munimentorum oppugnatione & defensione, quam ab aliis factum: ut hinc addiscere liceat, quomodo munimentorum forma ad examen revocanda, ubi quidem rectum de iis judicium ferre velis.

§. 27. Inprimis autem commendari meretur Anonymi * Institutio Architecturæ militaris, quam sub titulo: *Le parfait Ingénieur François*, *Amstelodami* An. 1734, in 4. (Alph. 1, plag. 22, Tabb. 42) edidit. Omnem enim artem muniendi secundum triplicem non modo methodum Comitis DE VAUBAN, verum etiam ERRARDI, SARDII, Equitis DE VILLE, Equitis DE S. JULIANO, MAROLOISII, BOMBELLI, BLONDELLI, Comitis DE PAGAN, COEHORNII, SCHEITERI, STURMII aliorumque anonymorum explicat, artem muniendi irregularem reformat, & praxin offensivam ac defensivam consummatam tradit. De STURMII cogitatis parum honorifice sentit, quantuscunque sibi visus fuerit Apollo.

§. 28. Antea celebrabatur liber Gallicus, quem secunda vice multo auctiorem sub titulo: *Les Travaux de Mars ou l'Art de la Guerre*, seu Artis militaris, *Parisiis* An. 1685, in 8. reg. ediderat ALLAIN MANESSON MALLET tribus tomis. Tomus I, constat Alph. 1, plag. 2, Tabb. 152; Tomus II, plag. 22. Tabb. 111; Tomus III, Alph. 1, plag. 3. Figuræ ipsi textui insertæ sunt & ornatus gratia multa adjiciuntur, quæ ad rem non faciunt, quemadmodum fecit in Geometria practica supra laudata (§. 30, cap. 3). Etsi

* Abbatis DEIDIER.

autem ab eo tempore Architectura militaris multum ſubierit mutationis; in primo tamen præſertim ac tertio tomo habentur, quæ non ſine fructu leguntur. Editionis primæ verſionem Germanicam dedit An. 1672, *Amſtelodami* in 8. reg. excuſam ſub titulo: MANESSON MALLET *Kriegs-Arbeit*, qui puritatem linguæ Germanicæ ridicule affectabat PHILIPPUS A ZESEN, ſed ob inſuetum dicendi genus nullius momenti.

§. 29. Regulas fundamentales Architecturæ militaris qui cognoſcere avent, iis abunde ſatisfaciet JOHAN. JACOBUS WERTMULLER in Theatro regularum fundamentalium Architecturæ militaris tam veterum, quam recentiorum, *Schauplatz der alten und neuen Fortifications-Maximen*, *Francof. ad Mœn.* An. 1691, in 8. 1 Alph. 20 plag. Tabb. 12) & in Lapide Lydio Architectorum militarium, *Probier-Stein der Ingenieur* An. 1685, in 8. 16 plag. Tabb. 4), tum etiam in *Apologia fortificatoria*, in qua Belgicam muniendi formam defendit, quamvis eam aliqua emendatione indigere fateatur (*Francof.* An. 1691, in fol. 1 Alph. 15 plag. & Fig. plag. 16).

§. 30. Quæ in excitatione munimentorum obſervari merentur, docent JOHANNES FAULHABER in *Schola Architectorum militarium* (*Norimbergæ* An. 1637; in 4.) & HEER in *Praxi Artis muniendi* (§. 14) præter alios, quos antea laudavimus.

Inprimis hic commemorari meretur LAMBERTUS LAMBION in Praxi Architectonica (*der Bau-Practica*) (*Viennæ* An. 1696, in 8. plag. 16, & Fig. plag. $1\frac{1}{2}$), ubi multa ſingularia occurrunt præſertim de cuniculis ſubterraneis, niſi quod linguæ Germanicæ non ſatis peritus male ſcripſerit, ut adeo libellus Germanice ſcriptus in idioma Germanicum verti meretur.

§. 31. De praxi militari tam offenſiva, quam defenſiva data opera ſcripſit GOULON in libello Gallico, cui titulus: *Mémoires pour l'attaque & pour la défenſe d'une Place* (*Hagæ Comitum* An. 1706, in 8. plag. 13, Tabb. 4) & qui eodem adhuc anno recuſus *Weſelii* in 8. reg. (plag. 5, Tabb. 4) poſtea in Germanicum idioma translatus (*Norimb.* An. 1709, in 8. plag. $5\frac{1}{2}$, Tabb. 4).

§. 32. Etſi autem multa utilia dederit, quæ domeſtica experientia ipſum docuit, non tamen dedit, quæ ſufficiunt. Anno autem ſuperiori 1737, *Hagæ Comitum* in 4. reg. (Alph. 1, plag. $5\frac{1}{2}$, Tabb. 33) prodiit *Comitis* DE VAUBAN de praxi offenſiva & defenſiva opus poſthumum, ſub titulo: *De l'attaque & de la défenſe des places*, quod obſervationibus ultra dimidium ſeculum a ſe continuatis ſuperſtruitur. Compoſuerat idem in uſum Ducis Burgundiæ, cui MSC. dederat, non ea intentione, ut publici juris fieret; ſed ut arcani inſtar aſſervaretur. Neque adeo facile

facile erat MSC. iſtud deſcribi, propter Tabulas majores, in quibus Schemata nitidiſſime delineata erant. Cum in eo candide de ſingulis mentem ſuam aperuerit; nullum ſupereſſe poteſt dubium, quin inſigni cum fructu legatur ab iis, qui caſtra ſequuntur, vel de praxi offenſiva & defenſiva judicium ſibi ſumunt.

§. 33. JOHANNES TEYLER in *Architectura militari* (*Rot.* 1697, in 4. plag. 8, Tabb. 41) ad Architecturam militarem Algebram applicare cœpit, quoad calculum inprimis probabilium, ſpem feriendi planum ſclopeto vel tormento ad menſuram revocaturus. Aliud vero Specimen Algebræ ad Artem Fortificatoriam applicatæ, diverſum prorſus a *Teyleriano*, etiam dedit JOH. MATTHIAS HASIUS, nunc Mathematum Profeſſor Wittebergenſis, *Lipſiæ* An. 1707, in 4. (plag. 3½, Tab. 1).

§. 34. Tandem hic commemorandum eſt opus, quod in uſum Architectorum militarium conſcripſit BELIDOR, Commiſſarius ordinarius Artilleriæ, Profeſſor Mathematum Regius in Scholis eidem deſtinatis, editum *Pariſiis*, mox vero *Hagæ Comitum* recuſum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. maj. 53) ſub titulo: *La Science des Ingénieurs dans la conduite des Travaux de Fortification & d'Architecture civile.* In eo Autor, qui omni ſtudio id agit, ut ad ſolidam ſcientiam Architectos militares perducat, eoque fine in eorum gratiam Curſum mathematicum jam ante edidit, recuſum *Pariſiis* An. 1725, in 4. reg. cum 24 Tabulis figuras nitidiſſime æri inciſas exhibentibus, in quo ea inprimis docentur, quæ iiſdem ſcitu neceſſaria ſunt ad finem iſtum conſequendum, non modo ea tradit, quæ ex Architectura militari, verum etiam quæ ex civili iiſdem perſpecta eſſe debent. Traditur hic theoria multorum, quæ hactenus in utraque Architectura nudæ experientiæ fuere ſuperſtructa. Videre hoc eſt ex libro primo atque ſecundo, quorum iſto quæ ad muros, hoc autem quæ ad fornices pertinent, ex principiis geometricis & mechanicis demonſtrat, uſus hinc inde demonſtrationibus algebraicis. Uſui eſſe poteſt hoc opus iis, qui ad formam ſcientiæ vere mathematicæ utramque Architecturam reducere voluerint ea demonſtraturi, quæ hactenus experientiæ fide ſumuntur nondum ſatis limata. Opus hoc etiam in cenſum ſcriptorum de Architectura civili referendum, inter quæ eminet, quatenus viam ad ulteriora ſternit.

§. 35. Non ſilentio prætereundus eſt libellus Germanicus, quem JOHANNES CHRISTOPHORUS GLASERUS *Halæ Saxonum* An. 1728, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 6) ſub titulo: *Vernünfftige Gedancken von der Kriegs-Bau-Kunſt erſte Probe* edidit, in quo oſtendit in omnibus muniendi formis, quæ hactenus proſtant, deficere defenſionem foſſæ ſufficientem, novamque

vamque proponit, qua huic defectui succurritur. Addit adhuc aliam per Algebram erutam. Plura dare constituerat specimina Architecturæ militaris perficiendæ: sed nescio qui factum, ut a proposito suo destiterit.

§. 36. Artem militarem universam describit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER in Schola militari moderna: *Neu vermehrte Kriegs-Schule*, quæ *Francofurti ad Mœnum* An. 1635, in 8. (Alph. 2, plag. 8, cum figuris multis æri incisis) prodiit. Tradit autor ea omnia, quæ in bello usui esse possunt, ita ut etiam jus militare Cæsareum, Suecicum & Batavum libro suo inseruerit, & sub finem in Appendice varia arcana doceat, quæ militibus scitu necessaria.

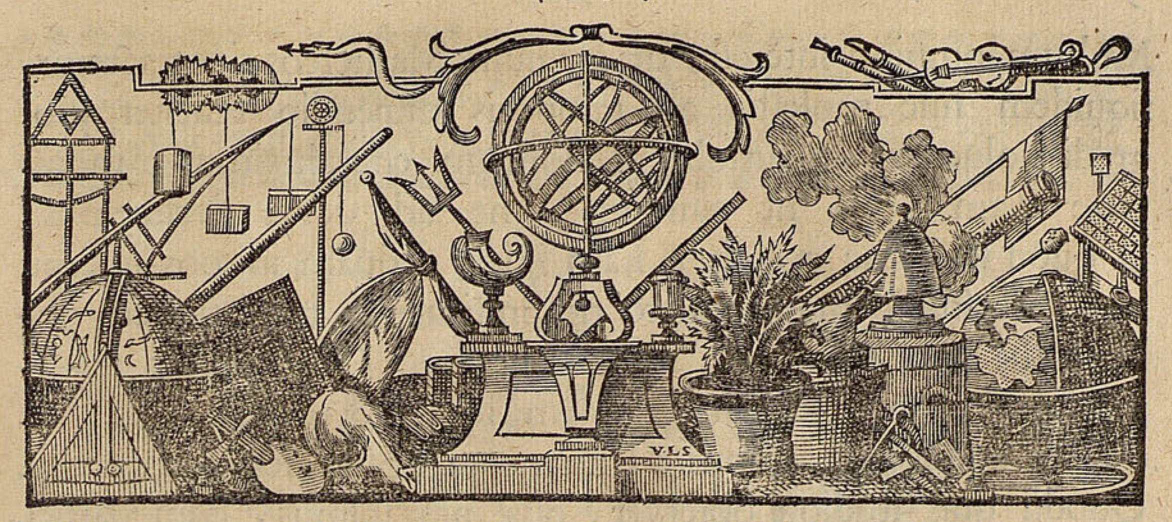
§. 37. Huc etiam pertinet JOANNIS FRIDERICI A FLEMMING, Regis Poloniarum & Electoris Saxoniæ Tribuni militum pedestrium, Miles Germanus perfectus, *der vollkommene Deutsche Soldat*, qui *Lipsiæ* An. 1726, in fol. (Alph. 9, plag. 8, Tabb. 64) prodiit, in quo autor omnem scientiam militarem, inprimis quæ ad militem pedestrem spectant, dilucide exponit. In eundem quoque censum referri potest liber Gallice conscriptus, quem sub titulo: *Les Fonctions du Capitaine de Cavalerie & les principales de ses Officiers subalternes*, multo auctiorem *Parisiis* edidit DE BIRAC, recusum *Hagæ* An. 1693, in 8. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 14). Optandum vero foret, ut quis rei militaris peritus, in Mathesi versatus & methodi gnarus Artem militarem in eam formam redigeret, qua nos Pyrotechniam, Architecturam militarem & civilem repræsentavimus, iis simul perlustratis, quæ Autores modo laudati tradiderunt, & ex Autoribus superioribus aliisque peti possunt.

FINIS

Commentationis de præcipuis scriptis mathematicis.

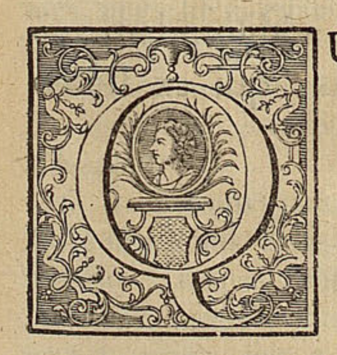


PRÆFATIO



COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESEOS
RECTE INSTITUENDO.

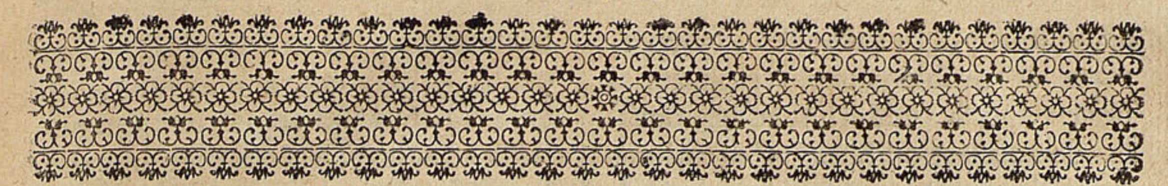
PRÆFATIO.



UI Matheſi addiſcendæ operam navant, non eundem ſibi ſcopum præfigunt. Elementa noſtra Matheſeos univerſæ ita conſcripſimus, ut pro multiplici diſcentium ſcopo ſatisfaciant omnibus. Quoniam vero non omnes eadem induſtria eidem incumbere tenentur, nec omnia addiſcenda omnibus; igitur nobis propoſitum eſt docere, quid unicuique conveniat.

Multum omnino intereſt, ut ſtudium Matheſeos rite tractetur, ſiquidem ſine moleſtia ac temporis diſpendio feliciter progredi volueris. Quamobrem noſtrum eſſe duximus, monſtrare viam, qua ſit eundum, ne ad devia declinemus: id quod facillime accidit. Eam igitur, quam in nos ſuſcepimus, de ſtudio mathematico rite inſtituendo tractationem utilitate ſua non deſtitutum iri confidimus. Quamobrem ſuademus, ut omni attentione eandem legat & relegat, qui Matheſeos addiſcendæ animo ad Elementa noſtra legenda accedit. Quodſi quis ſtudioſe obſervet, quæ præcipimus, eum participem futurum fructus, quem eidem pollicemur, nulli dubitamus. Inſignem vero percipiet voluptatem, ubi ſenſerit voto reſpondere eventum: quem ubi prævidet, eo ipſo accendetur ardor majore induſtria Matheſeos ſtudium continuandi, quam qua idem inchoavit. Noſtrum inprimis eſt amplificare Matheſeos ſtudium, nunquam ſatis commendandum, nunquam pro dignitate deprædicandum. Nihil igitur omittendum, quod huc quomodocunque facit. Alienam felicitatem qui noſtram exiſtimamus, id unice intendimus, ut dicamus, ut ſcribamus, quæ proſunt aliis. Quamobrem nec quicquam magis in votis habemus, quam ut omnes, qui ad Matheſin addiſcendam animum appellunt, participes fiant ejus fructus, qui ex ſtudio mathematico percipi poteſt.

COM-



COMMENTATIO DE STUDIO MATHESEOS RECTE INSTITUENDO.

CAPUT PRIMUM.

De diversis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur.

§. 1. TRes dantur gradus cognitionis humanæ in omni veritatis genere, quos recto facultatum cognoscendi usu acquirere licet. Aut enim in eo acquiescimus, quod veritatem ab aliis propositam intelligamus; aut ulterius progressi id agimus, ut ejusdem etiam convincamur; aut denique operam damus, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio marte eruere valeamus.

§. 2. Primus gradus acquisitu omnium facillimus & a ceteris præsupponitur: neque enim veritatis, nisi intellectæ, convincitur animus; sive eum a priori, sive a posteriori convincere volueris; multo minus autem ex iis, quæ cognovisti, alia incognita deducere potueris, nisi ea, quæ cognovisti, satis intellexeris. Gradus secundus difficilius comparatur primo, cum multo ampliorem requirat facultatum usum; nec ad tertium adspirandum, nisi ubi ad secundum ascenderis. Tertium denique omnium difficillime consequi licet, cum amplissimum omnium exigat facultatum usum. Qui in Logica & Psychologia satis fuerint versati veritatem dictorum abunde perspicient: ceteris satisfaciet experientia domestica, ubi diversis hisce gradibus acquirendis non sine successu operam dederint. Elucescet quoque quodammodo veritas ex iis, quæ mox de illis uberius dicentur.

§. 3. Cognitionem gradus primi

acquisiturus, definitiones, theoremata & problematum resolutiones sibi perspecta reddere tenetur, omissis demonstrationibus. Cognitionis secundi gradus compos futurus addere debet demonstrationes. Ad cognitionem tandem tertii gradus perventurus, in rem præsentem veniat necesse est, & ex iis, quæ ipsi cognita & perspecta sunt, acquisito cum secundo gradu facultatum usu, eruere studeat opus est sibi nondum nota: quod quomodo fiat, posthac indigitabimus, quantum præsentis instituti ratio permittit. Neque enim nobis jam propositum est explicare Artem inveniendi, quæ legitimum facultatum usum in eliciendis incognitis ex cognitis distincte docet.

§. 4. Theoremata & problemata eorumque resolutiones non intelliguntur nisi per definitiones terminorum, qui in iisdem occurrunt. Incipiendum igitur est a definitionibus, quæ ideo propositionibus præmittuntur; vel omnes simul, quemadmodum in Arithmetica & Geometria fecimus; vel eo saltem loco, ubi occurrunt propositiones, quæ per eas intelligendæ, quemadmodum in reliquis Matheseos partibus non sine ratione factum esse apparet.

§. 5. Ad definitiones intelligendas afferenda est attentio, sub initium præsertim molesta, adeoque omni modo excitanda & fovenda. Conducit huc, si definitiones exemplis, veluti in Arithmetica numeris, illustrentur, &, in Geometria, ad figuram oculis præsentem applicentur. Ita enim facilius intelliguntur; ut molestia vanescat, quæ attentionis conservandæ difficultatem parit. Ita definitio similitudinis illustratur exemplis duorum horologiorum, & duorum ædificiorum, quæ in scholio definitioni adjecto in medium attulimus (§. 27. *Arith.*). Definitionem partis aliquotæ illustramus exemplo lineæ in quatuor partes æquales divisæ, cum enim pars una quater sumta lineam integram adæquet, erit ea pars aliquota (§. 30. *Arithm.*). Ita, in ipsa Arithmetica, definitionem numeri quadrati & radicis quadratæ numeris adjectis illustravimus, ut tali exemplo non sit opus. Cum definitiones in Geometria retulerimus ad figuras; me tacente apparet, quomodo ad eas applicari possint, veluti dicendo in definitione trianguli æquilateri (§. 88. *Geom.*), quod sit AB=BC=CA (*Tab. I. Fig.* 16); perinde ac si ratiocinio ostendi deberet, figuram, quæ oculis subjicitur, esse triangulum æquicrurum. Sensus nimirum, aut imaginatio, quæ sensu antea percepta denuo præsentia sistit, attentionem in objectum trahit, cujus idea exhibet, quæ in definitione continentur; quo ipso & attentio excitatur & conservatur: cumque definitionem a nobis intelligi nobis jam conscii simus, molestia evanescit, quam termini non satis intellecti primum nobis objiciebant, immo in voluptatem abit, quæ

ardorem



ardorem dicendi accendit & inflammat, prout casus tulerit.

§. *6.* Definitiones eo ordine collocantur, ut termini in anterioribus jam fuerint definiti, qui datam ingrediuntur. Ex. gr. Commensurabilia definiuntur, quod partem aliquotam communem habent, vel eorum unum sit pars aliquota alterius (§. 31. *Arithm.*). Pars vero aliquota jam fuit definita (§. 30. *Arithm.*), immo pars in genere (§. *9. Arithm.*). Similiter Quadratum definitur per figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam (§. *98 Geom.*). Sed figura jam ante (§. 34. *Geom.*), figura quadrilatera (§. *97. Geom.*), figura æquilatera (§. 88. *Geom.*), figura rectangula (§. *97. Geom.*) fuit definita. Unde consequitur, definitiones legendas esse eo ordine, quo in singulis disciplinis numerantur, & definitiones terminorum esse repetendas, qui datam ingrediuntur. Ita nimirum obtinetur, ut quælibet earum penitus intelligatur, & animo ingenerentur notiones adæquatæ, in quibus nihil latet obscuri, ut intellectus plena luce perfruatur. Ex. gr. ubi definitionem commensurabilium expendere volueris, illustranda primum est exemplis (§. 5), utrumque ejus casum repræsentando in numeris atque lineis. Ad exempla tam arithmetica, quam geometrica applicanda est definitio; ita ut primum contentus sis notionibus confusis, quas conspectus numerorum & figurarum suggerit. Deinde applicandæ ad eadem exempla sunt definitiones partis & partis aliquotæ; ita enim futurum, ut definitionem commensurabilium in utroque quantitatum genere penitus intelligas, nec quicquam relinquatur obscuri, ubi eadem industria in definitionibus anterioribus fueris versatus. Sint ex. gr. duo numeri 3 & 12. Quoniam 3, sive ternarius, quater sumtus, numerum 12, sive duodenarium adæquat, erit ille hujus pars aliquota (§. 30. *Arithm.*); adeoque numerus unus est pars aliquota alterius. Numeri igitur hi 3 & 12 commensurabiles sunt. Et quoniam 3, 3, 3 & 3 simul conficiunt unum numerum, nempe 12 sive duodenarium, adeoque idem sunt cum duodenario; 12 est totum, 3, 3, 3 & 3 sunt ejus partes, consequenter 3 pars una (§. *9. Arithm.*). Similiter sint duo numeri alii *6* & 8, quorum primus componitur ex 2, 2, & 2, seu binario ter sumto, alter ex 2, 2, 2 & 2, seu binario quater sumto. Habent igitur partem aliquotam communem 2 (§. 30. *Arithm.*), adeoque commensurabiles sunt. Et quia 2, 2 & 2 simul sumti idem sunt cum *6*, & 2, 2, 2 & 2 simul sumti idem cum 8; in genere etiam patet, esse 2 sive binarium partem ipsorum *6* & 8 (§. *9. Arithm.*), adeoque communem. Idem etiam in lineis repræsentatur, si linea AB ter transferatur in CD, ita ut sit CE=EF=FD=AB. Erit enim AB pars aliquota ipsius CD Tab. I. *Fig.* 1.

 (§. 30.

(§. 30 *Arithm.*). Unde lineæ AB & CD commensurabiles sunt, & CE = AB intelligitur pars ipsius CD (§. 9. *Arithm.*). Eodem modo patet casus alter, si recta AB concipitur divisa in tres partes æquales, ut sit AC = CD = DB, & EF in quatuor partes æquales EG, GH, HI & IF, ut sit EG = GH = HI = IF ac præterea EG = AC. Erit enim AC pars aliquota communis (§. 30 *Arithm.*), & eadem AC pars utriusque lineæ AB & EF intelligitur, quia AC + CD + DB & recta AB, itemque EG + GH + HI + IF & recta EF sunt una eademque linea (§. 9. *Arithm.*). Unde lineas AB & EF commensurabiles esse liquet.

Tab. I. *Fig.* 2.

§. 7. Ne evidentiæ quid desit, probe observandum est, intellectum lucem fœnerari debere a sensu, quatenus huic obvia sunt, quæ ille concipere debet; ut, dum sensus suo munere fungitur, intellectus sua veluti sponte fungatur itidem suo, atque ad cooperandum leniter trahatur; quatenus fieri nequit, ut operationes intellectus cessent, dum sensus facit quod suum est, &, attentione in hunc conversa, illarum ne quidem conscius esse videaris, operationibus intellectus cum sensuum actionibus perceptione confusa in unum confusis. Eo ipso obtinetur, ut ad rectum intellectus seu facultatis cognoscendi superioris usum adducaris; dum sensu tantummodo, concurrentibus ceteris sua veluti sponte facultatibus cognoscendi inferioribus, imaginatione scilicet atque memoria, tibi uti videris: id quod mirifice conducit tyronibus, ut usui intellectus recto absque ulla molestia adsuefiant. Tyrones enim non adsueti sunt nisi sensuum, imaginationis atque memoriæ usui, quatenus is hasce indivulsas comites habet. Eum vero, qui requiritur, intellectus usum hactenus non fecerunt. Quamobrem molestum accidit, si a sensu ad operationes intellectus per saltum adducantur.

§. 8. Quamvis adeo levia ac puerilia videantur, quæ de definitionibus rite expendendis inculcavimus (§. 6), ut eædem penitus intelligantur & notiones adæquatæ ab omni obscuritate liberatæ animo insinuentur; principiorum tamen psychologicorum gnarus, quæ in Psychologia præsertim empirica explicavimus, ex indubia experientia derivata, profunditatem in obviis, non sine voluptate, deprehendet. Et ubi attenta mente perlegerit, quæ de usu facultatum, in parte altera Philosophiæ practicæ universalis, ad recte vivendum requisito demonstravimus, fructum inde sperandum facile prævidebit: qui quod quantivis pretii sit, in dubium minime revocabit. Qui vero Logicam nostram perlustravit & inprimis sibi cognitum atque perspectum reddidit, quod de praxi ejus docetur; is abunde intelliget quam necessarius sit hic intellectus usus, de quo in præsenti nobis sermo est. Quodsi ergo in Philosophia veriori hospites contem-

contemnant, quæ nos maximi facimus, & ambages inutiles pronuncient, per quas incedere volumus animum ad Mathemata discenda appellentes; ii haud ægre ferant contradictionem, cum nos æquo animo, non indignabundo, feramus contemtum.

§. 9. Quamobrem non piget exemplo etiam geometrico docere, quomodo in perpendendis definitionibus sit procedendum. Sumamus v. gr. definitionem rhombi, quem definimus (§. 99 *Geom.*), quod sit figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.
Tab. I. Fig. 3. Ut cum idea rhombi notio distincta animo insinuetur, nec quicquam in ea relinquatur obscuri; oculos convertamus necesse est in figuram L M N O. Numerentur latera LM, MN, NO & LO, quæ numero quatuor deprehenduntur; unde liquet figuram hanc esse quadrilateram (§. 97 *Geom.*). Circino capiatur intervallum LM, idemque successive transferatur ex M in N, ex N in O atque ex O in L; quo ipso patet, latera omnia esse inter se æqualia; atque hinc colligitur, figuram hanc esse æquilateram (§. 88 *Geom.*). Contemplemur jam angulos L, M, N & O, quos obliquos esse patet (§. 66 *Geom.*); unde infertur, figuram eandem esse obliquangulam (§. 97 *Geom.*). Sola attentio ad ea, quæ oculis usurpamus, omnem ex idea rhombi arcet obscuritatem, nec quicquam in notione distincta relinquit obscuri, quo minus penitus intelligatur. Quod si definitiones anteriores, in quas definitio rhombi resolvitur, rite applices; iis suppositis familiaribus, notio evadit adæquata.

§. 10. Non ignoro in figuris non requiri veritatem, sed sufficere ea sumi, quæ per definitionem inesse debent, ut definitio intelligatur: neque enim demonstrandum esse, quod, in nostro exemplo, figura LMNO sit rhombus; sed docendum potius, qualis esse debeat, ut rhombus dici possit, ubi non intenditur, nisi ut definitio intelligatur. Ita, in casu nostro, sufficit dicere, si figura esse debeat rhombus, requiri ut latera LM, MN, NO & LO, quibus terminatur, sint numero quatuor; ut sit LM=MN=NO=LO, seu ut latera hæc singula sint inter se æqualia; ut denique anguli L, M, N & O sint obliqui. Hoc pacto enim constat, quænam figuræ cuidam datæ inesse debeant, ut rhombi nomen eidem tribui possit: id quod sufficit ad definitionem intelligendam. Et ubi hæc noveris atque memoriæ mandaveris, verendum non est, ne rhombum appelles figuram tibi obviam, quæ hoc nomen non meretur: quo sane fine definitio præmittitur. Immo patet, quænam de rhombo sumenda sint, aut sumere liceat, ubi alia de eodem demonstranda, quando ex definitione rhombi deducere volueris, quæ eidem conveniunt: quem alterum esse definitionum finem, non minus ex Logica, quam Geometrarum

rum & recta methodo philosophantium praxi constat. Ipsa etiam definitionum nominalium natura aliud non requirere videtur, quam ut intelligatur, quænam in ea sumantur de definito; cum nondum quæratur, utrum definitio sit possibilis, nec ne, seu utrum detur istiusmodi ens, cui ea insint, quæ in definitione sumuntur; sed de eo tantum quæstio sit, qualia requiramus, ut insint, siquidem id nominis convenire debeat, seu quidnam hoc nomine insignire velimus. Enimvero cum in Mathesi non proponantur definitiones, nisi quæ veræ sunt; ubi, sensuum ope, operationes intellectus elicere &, eorundem beneficio, eidem lucem affundere, atque ad rectam definitionum applicationem tyronem manuducere volueris, nil obstat, quo minus tacite supponas, quod deinceps demonstrandum, definitionibus inesse veritatem, hoc est, dari istiusmodi entia, quibus insunt, quæ in definitione nominali sumuntur. Absit itaque, ut tibi persuadeas, nos eorum, quæ in Logica docemus & in philosophando, non tantummodo in universa Mathesi, sancte observamus, oblitos tradere, quæ iisdem contraria sunt. Ecquis vero adeo vesanus erit, qui reprehendat, quod utilitatis insignis gratia, absque ullo præjudicio veritatis, tacite sumatur quod verum est, immo quod sumi necesse est, ubi in primo gradu cognitionis humanæ pedem sistere, nec ulterius progredi volueris (§. 1).

§. 11. Etsi itaque præcepta verioris Logicæ, quæ nos tradidisse certi sumus, inviolabilia existimemus, & methodi adeo simus tenaces, ut ab iis recedere nefas reputemus; tanta tamen religio minime obstat, quo minus in favorem ejus faciamus, quod eidem promovendæ conducit. Quamobrem, ut finem tam præclarum ex asse consequamur, quem intendimus (§. 7), & sensus omnes ferant suppetias intellectui, quæ ab eodem expectari possunt; id adhuc monendum esse duximus, in exemplis Arithmeticis non arbitrarium esse, quocunque modo numeri scribantur, quibus definitionem illustrare volueris, sed eos potius ita scribendos esse, ut sensui subjiciantur, quæ intellectus concipere tenetur, ut omnis arceatur obscuritas, & notio evadat tam adæquata, quantum per anteriores definitiones permittitur. Dedimus in superioribus exempla, quibus definitionem commensurabilium illustravimus (§. 6). Duo sunt commensurabilium casus. Aut enim numerus minor est pars aliquota majoris, aut uterque numerus partem aliquotam communem habet (§. 31 *Arithm.*). Exemplum casus primi præbent numeri 3 & 12, quorum prior quater sumtus posteriori fit æqualis. Repræsentandus igitur est ternarius tanquam pars duodenarii, definitioni partis convenienter (§. 9 *Arithm.*); & tanquam pars aliquota ejusdem, defi-

definitioni partis aliquotæ conformiter (§. 30 *Arithm.*). Quamobrem non sufficit, duodenarium, sive 12, resolvere in 3, 3, & 3, sed ipsis etiam oculis quasi spectandum exhiberi debet, quod ternarius sit pars duodenarii, & hic consideretur tanquam pars aliquota ejusdem, quatenus ea oculis usurpare licet, quæ definitiones partis, atque partis aliquotæ, tamquam notas continent. Exhibetur autem 3 tanquam pars ternarii, si scribatur $3+3+3+3=12$: etenim signum + ostendit quatuor istos ternarios simul sumtos constituere duodenarium, seu numerum, qui idem est cum duodenario. Unde unus intelligitur pars duodenarii (§. 9 *Arithm.*). Et dum apparet, eundem numerum 3 aliquoties, nimirum quater repetitum, numerum 12 adæquare; illum hujus partem aliquotam esse perspicitur (§. 30 *Arith.*). Nimirum, hoc modo, ipsis oculis exhibetur, quod plura, scilicet 3, 3, 3 & 3 sint idem cum uno, scilicet 12, & pars una 3 aliquoties, scilicet hic quater sumta, adæquet totum; quemadmodum volunt definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ. Sola igitur hac scriptione in conspectum adducuntur, quæ in oculos per se minime incurrunt, & definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ, instar rei visibilis exhibentur. Dum vero ternarius, sive 3, etiam solitarie scribitur, juxta duodenarium in partes suas aliquotas resolutum, quemadmodum hic factum esse apparet,

$$3 \qquad 3+3+3+3=12,$$

tum ipsis oculis exhibentur 3 & 12 tanquam duo numeri, qui ad se invicem referuntur, & primus 3 repræsentatur tanquam pars aliquota alterius 12; ut nihil insit in definitione commensurabilium, quoad casum primum, quod non pateat conspectui. Immo, hac ipsa scriptione, non minus manifestum est, quomodo, dato quocunque numero, prodeat alius ipsi commensurabilis; nimirum, si numerus quidam, semel positus, deinceps ponatur aliquoties, quoties nempe visum fuerit, & iterato positi sumantur simul tanquam unum: id quod clarius perspicitur, si duo vel tria exempla sibi invicem subscribantur, quemadmodum hic factum vides.

$$3 \qquad 3+3=6$$
$$3 \qquad 3+3+3=9$$
$$3 \qquad 3+3+3+3=12$$

&c. &c. in infinitum.

Ad illustrandum casum alterum, qui in definitione commensurabilium continetur, adduximus exemplum numerorum 6 & 8, qui partem aliquotam communem 2 habent. Quodsi ergo singula ut ante repræsentare volueris, numeri ita scribendi sunt

$$2+2+2=6 \qquad 2+2+2+2=8$$
$$2+2+2+2+2=10 \qquad 2+2+2+2+2+2+2=14$$

&c. &c.
in infinitum in infinitum.

Ita nimirum etiam conspicitur, quomodo

do numeri commenſurabiles in altero caſu procreentur, nimirum, ſi idem quicunque numerus, veluti hic 2, ponitur toties, quoties libuerit, veluti hic ter, quinquies &c. & deinceps adhuc pluries, veluti hic quater, ſepties &c. ac iterato poſiti ſumantur ſimul tanquam unum. Hoc pacto, definitio commenſurabilium nominalis reducitur ad geneticam, adeoque realem: id quod multiplicem habet uſum. Quodſi numeris ſubjiciantur lineæ in tot partes æquales diviſæ, quoties idem numerus repetitur ad conſtituendum numerum eundem; in continuo jam magis claret, quænam ſit vis ſigni +, quo indigitatur plura coaleſcere in unum, ut unum ſit idem cum multis, quemadmodum vult definitio partium, atque totius. (§. 9 *Arith.*)

§. 12. Quoniam in definitionibus partis, atque totius, relativis, quarum una abſque altera intelligi nequit, diverſa utique ſunt pluralitas eorum quæ ad totum conſtituendum concurrunt, plurium concretio qua fit unum ſeu totum conſtituitur, & inde reſultans identitas plurium cum uno; adeoque ubi definitionem penitus intelligere volueris, notionem diſtinctam formaturus, opus habes totidem actibus intellectus, quibus pars & totum concipitur, quot definitioni diverſa inſunt, tanquam totidem notæ. Siquidem ſenſus ſuppetias ferre debet intellectui; ſingulis intellectus operationibus reſpondere debent ſinguli actus externi, qui in ſenſus incurrunt & illas individuas comites habent: id quod in dato caſu obtinetur, ſi numeri, quibus ſimul ſumtis efficitur totum, primum ſcribantur juxta ſe invicem abſque ullo ſigno interpoſito, deinde autem ſignum + interponatur, tandemque iiſdem, hoc ſigno inter ſe connexis, adjiciatur ſignum æqualitatis =, cum nota numerica, qua indigitatur numerus ex iiſdem coaleſcens, veluti in exemplo primo 12, qui ex 3, 3, 3 & 3 in unum coaleſcentibus reſultat. Hac enim ſucceſſiva ſcriptione, eo, quem diximus, ordine facta; actu ſcriptionis primo determinatur intellectus ad concipiendam pluralitatem ad totum conſtituendum concurrentium; actu ſecundo exhibetur concretio in unum, quam cogitare tenemur; & tertio denique repræſentatur plurium cum uno identitas, in quam aciem mentis intendi neceſſe eſt. Hoc pacto efficitur, ut nihil ſit in intellectu, quod non etiam ſit in ſenſu, & ſenſus intellectum blande trahit ad cooperandum, dum operationes intellectus per actus in ſenſum incurrentes determinantur, adeoque, cum actibus ſenſus, una ponuntur; modo animo præſens ſis, attentione allata ad ſingula quæ fiunt. Quodſi ergo in illuſtrandis definitionibus eam, quam monſtramus, viam ingredi volueris; ſenſus ſuppetias omnes ferent intellectui, quas ab eo expectare licet.

§. 13. Si-

§. 13. Simile quid obtinet in exemplis geometricis; si singulas determinationes, quæ definitionem ingrediuntur, ita scribere volueris, ut ad figuram oculis subjectam referantur signa, quibus repræsentatur. Dedimus in superioribus exemplum rhombi, qui per definitionem est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Quamobrem si scribas, quemadmodum hic factum esse vides,

Tab. I. Fig. 3.

$$LM + MN + NO + LO = 4$$
$$LM = MN = NO = LO$$
$$\left.\begin{matrix} L \\ M \\ N \\ O \end{matrix}\right\} \text{angulus obliquus}$$

LMNO rhombus;

ipsi sensui obvium est, quomodo ex determinationibus definitionem ingredientibus, seu notis in eadem contentis, colligatur figuram datam esse rhombum. Etenim LM+MN+NO+LO=4 indigitat, figuram datam LMNO quatuor habere latera; adeoque æquilateram esse: LM=MN=NO=LO significat, latera omnia esse inter se æqualia; consequenter figuram datam LMNO esse æquilateram: denique

$$\left.\begin{matrix} L \\ M \\ N \\ O \end{matrix}\right\} \text{angulus obliquus,}$$

indigitat singulos figuræ datæ LMNO angulos esse obliquos; consequenter figuram ipsam obliquangulam. Linea his subducta signum est quo indigitatur, id quod eidem subscribitur, inde inferri, seu per supra scripta determinari; nimirum quod figura oculis subjecta LMNO sit rhombus. Evidens adeo est, ad quænam successive promovenda sit attentio, ubi rhombum agnoscere, atque ab aliis figuris distinguere volueris. Hoc pacto sensus distinguit, quæ intellectus distinguere tenetur, dum distincte rhombum concipit.

§. 14. Repræsentatio definitionum symbolica, qua oculis conspicienda exhibentur, quæ ab intellectu concipiuntur, eo quidem ordine, quo operationes intellectus eliciuntur, convenit regulis Artis characteristicæ; cujus theoria, hactenus desiderata, partem quandam Artis inveniendi absolvit, propterea quod in inveniendo usum multiplicem habet, quemadmodum suo tempore ostendemus, ubi, philosophia ad umbilicum perducta, Artem inveniendi ad eam formam redigemus, qua Logicam exhibuimus. Major enim est Artis characteristicæ usus, quam vulgo creditur; ut adeo consultum sit, quasi aliud agendo mature eidem adsuescere. Non loquimur nisi experta, & quæ ex ipsa animæ humanæ natura a priori demonstrare valemus; etsi a præsenti loco alienum sit ipsas demonstrationes afferri, ex principiis nostris psychologicis haud difficulter contexendas, sed Arti inveniendi reservandas.

§. 15. Unicum est, quod hic monuisse sufficiat, silentio minime prætereundum; scilicet, quod ista definitionum symbolica repræsentatio mirifice conducat ad facilitandam repetitionem, qua eædem memoriæ, absque ulla molestia & mora, infiguntur, & memoria retinentur. Distincte nimirum oculis exhibentur, quæ intellectus distinguere tenetur in definito sibi repræsentando, & eo ordine, quo actus intellectus sese invicem excipere debent. Cognitio non modo symbolica ad intuitivam reducitur, sed ipsa etiam symbolica intuitivæ assimilatur. Nemo autem est qui nesciat, sensu percepta facilius & tenacius memoria retineri, quam quæ sola vi intellectus concipiuntur. Et convenit omnino omnem facere facultatum usum, qui natura nobis concessus est; ac mature adsuefieri juvat, ut eundem ubivis constanter faciamus. Quamobrem & nos per studium mathematicum plura intendimus, quam ut Mathesis sibi sola discatur; quemadmodum faciunt illi, qui contenti sunt ea, quæ docentur in Mathesi, cognita atque perspecta sibi habere.

§. 16. Erit forsan acutior, qui reprehendet, quod, in illustrandis definitionibus, in methodi leges injurii simus, quod in illustrandis definitionibus anterioribus præsupponamus, quæ demum per sequentes patent. Objiciet v. gr. nos, in symbolica partis aliquotæ repræsentatione (veluti quod 3+3+3+3=12), supponere, quod perspectæ sint notæ numericæ, quod notum sit signum additionis, quod ipsam additionis notionem habeamus, cum tamen definitio partis aliquotæ præcedat (§. 30 *Arithm.*), definitio additionis demum sequatur (§. *61 Arithm.*) & notæ numericæ in sequentibus demum (§. *49 Arith.*), cum signo additionis (§. *63 Arithm.*) explicentur. Immo forsan arguet ipsam additionem præsupponi, quæ demum docetur multo post (§. *96 Arithm.*). Enimvero quicquid est hujus difficultatis, id protinus omne evanescit, modo attentionem nostram desiderari non patiamur. Etenim nemo ad studium Matheseos, præsertim ad legenda Arithmeticæ nostra Elementa Latina, accedit adeo rudis, ut notæ numericæ nondum ipsi sint perspectæ, & numerare nesciat. Neque lex numerandi & notæ numericæ explicantur eo fine, ut numerare discamus & notas numericas cognoscamus; sed ut appareat, cur ea numerandi lex sanciatur, & cur notis istis utamur, tum etiam quia hypothesibus istis opus habemus, tanquam principiis ad demonstrandum ea, quæ sequuntur. Signum additionis quodnam sit, anticipando doceri potest, ubi ejus usus requiritur. Neque hic opus est, ut notio additionis una explicetur: sufficit enim moneri, hoc signo indigitari, numeros simul sumi debere, ut constituatur per eos unus. Multo minus

nus autem præsupponenda est additio, cum nemo numerandi peritus nesciat, quomodo numeros exiguos, sive digitos in unitates, siquidem opus est, resolutos connumerare debeat. Accedit, quod nemo facile ad Matheseos studium, præsertim ad Elementa nostra Latina legenda sese conferat, qui Algorithmum numerorum integrorum, saltem additionem & subtractionem, non didicerit. Abunde igitur patet, non præsupponi quæ nondum cognita sunt, sed ex inferius traditis demum haurienda, in definitionibus illustrandis.

§. 17. Propositiones, sive theoremata fuerint, sive problemata, primum exponuntur, dum in Arithmetica ad numeros, in Geometria ad figuras delineatas applicantur: id quod ἔκθεσιν, sive expositionem, appellarunt veteres, quam propositionibus subjecerunt. Sit ex. gr. Theorema 21 Arithmeticæ (§. 181) exponendum, quod ita sese habet. *Si quantitates quascunque per eandem tertiam dividas, quoti sunt inter se ut quantitates, quæ dividuntur.* Theorematis hujus expositio hæc est: Sint duo numeri 24 & 12, qui dividuntur per eundem tertium 3; erunt quoti 8, & 4. Dico esse 8 ad 4, ut 24 ad 12. Continet enim 8 bis 4, & 24 itidem bis 12, adeoque numeri proportionales sunt (§. 155 *Arithm.*). Similiter sit pars prima theorematis 37, in Geometria (§. 233) exponenda, quæ ita se habet: *Si duas lineas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni æquales.* Expositio talis est: Sint AB & CD duæ lineæ rectæ, sitque AB parallela ipsi CD; erunt anguli *y* & *u* alterni (§. 68 *Geom.*). Dico angulum *y* esse æqualem angulo *u*. Eodem modo exponuntur problemata. Sit ex gr. problema 20 Geometriæ (§. 258) cujus hic est tenor: *Per datum punctum parallelam rectæ datæ ducere.* Expositio hæc erit: Sit data linea recta RS; sitque datum punctum V ubicunque extra eandem lineam. Ducenda est recta quædam alia, quæ transit per punctum V, sitque rectæ alteri RS parallela.

Tab. I. *Fig.* 4.

Tab. I. *Fig.* 5.

§. 18. Nos, brevitatis gratia, in Arithmetica theoremata ita enunciavimus, ut expositionem una contineant; dum quantitates designavimus literis majoribus, tanquam numeros indeterminatos (§. 13 *Arith.*), in quorum locum facile surrogantur numeri determinati notis numericis expressi, quales etiam hinc inde exhibemus ad latus demonstrationis. Ita theorema 21, de quo modo diximus (§. 17), hoc modo proponitur (§. 181 *Arith.*). *Si quantitates quascunque* A *&* B *per eandem tertiam* C *dividas; quoti* F *&* G *sunt inter se ut* A *&* B. Constat ex paragrapho præcedente theorema hoc pure sic enunciari: *Si duas quantitates quascunque per eandem tertiam dividas, quoti per divisionem prodeuntes erunt inter se, ut quantitates, quæ dividuntur.* Atque adeo liquet, literas majores

A, B, C, F, G nonnisi expositionis gratia esse adjectas, quæ ita sese habet: *Sint duæ quantitates quæcunque*, A *&* B; *dividatur quantitas* A *per quantitatem* C, *&* *prodeat quotus* F. *Dividatur etiam quantitas* B *per eandem quantitatem* C, *&* *prodeat quotus* G. *Dico esse quotum* F *ad quotum* G, *ut quantitatem* A *ad quantitatem* B. Quodsi jam pro literis substituantur numeri; nimirum 24 pro A, 12 pro B, 3 pro C, 8 pro F, & denique 4 pro G; habebis expositionem in numeris, quam ante dedimus (§. 17).

§. 19. Similiter in Geometria propositiones retulimus ad figuras æri incisas, ut expositionem una contineant. Ita theorematis 37 pars prima, quam exempli loco adduximus (§. 17), hoc modo proponitur in Geometria (§. 233). *Si duas pa-*
Tab. I. Fig. 1. *rallelas* AB *&* CD *secet transversa* EF, *in* G *&* H, *erunt anguli alterni* y *&* u *æquales*. Quodsi literas omittas, habebis theorema pure enunciatum. Ubi vero oculos in figuram iisdem subjectam convertens, idem ad eandem applices, adhibitis literis, quibus lineæ & anguli in schemate designantur, quemadmodum paulo ante factum est (§. 17); habebis expositionem. Similiter problema 20 (§. 258 *Geom.*) ita enunciatur: *Per datum punctum* V *parallelam rectæ* RS *ducere*. Omissis literis V & RS prodit propositio pure enunciata; quæ ad schema applicata, ut ante fecimus (§. 17), dat expositionem.

§. 20. Veteres Geometræ propositionem ab expositione, tanquam duo diversa, a se invicem distinxerunt; atque adeo illam pure enunciarunt, hanc eidem subjecerunt. Hunc morem secutus est CLAVIUS in Elementis EUCLIDIS. Nos expositionem cum propositione conjunximus, non tam quod in unum confundi velimus, quæ diversa sunt; quam ut, brevitatis gratia, quemadmodum jam monuimus (§. 18, 19), una exhiberemus, quæ a lectore separanda sunt; ne in nimiam molem excresceret opus, ac præter necessitatem evaderet sumtuosius.

§. 21. Necesse autem est propositionem pure enunciari, remotis iis, quæ ad expositionem spectant; cum pure enunciata in usum futurum memoriæ sit mandanda; expositio autem adhibenda, ut claritas affundatur notioni complexæ, quæ propositioni respondet, sine qua intelligi nequit, aut saltem non satis intelligitur; quemadmodum nil videmus absque lumine, aut absque lumine sufficiente non satis clare videmus visibile. Non tamen opus est expositionem una memoriæ mandari, cum in applicatione, ratiocinando facta, ejus nullam habeamus rationem; sed sufficiat propositioni per expositionem satis intellectæ adhærere, per naturam animæ, sensum claritatis, quatenus fieri potest, ut expositionem addamus, quando exigitur, vel e re esse videtur; qua actu affunditur claritas, cujus, dum nunc obscu-

obscure percipitur, antea clare perceptæ memoriam habemus.

§. 22. Resolutiones problematum arithmeticæ ad exempla, geometricæ ad figurarum constructiones statim sunt transferendæ. Singula, quæ fieri præcipiuntur, suis numeris distinximus. Numerantur autem eo ordine singula, quo fieri debent. Quamobrem, cum quælibet resolutio tot contineat regulas, quot sunt numeri; lecta prima statim faciendum, quod eadem præcipitur, & progressus ordine fieri debet ad sequentes. Ita nimirum absque ullo negotio facies, quod fuerat faciendum; & dum hoc facis, regulis affundetur claritas, quæ ad totam resolutionem intelligendam sufficit. Quoniam vero in resolutionibus problematum sequentium præcipiuntur, quæ quomodo fieri debeant, docetur in anterioribus; igitur necesse est, ut eo ordine problematum resolutiones tibi familiares reddas, quo numerantur; ne facturus ea, quæ præcipiuntur, incidas in talia, quæ quomodo fieri debeant nondum nosti, nec unquam antea fecisti. Non est, quod excipias, citari in resolutionibus ea, quæ ex anterioribus præsupponuntur; veluti in resolutione problematis, de linea alteri parallela per datum punctum ducenda prima, quod paulo ante exempli loco adduximus (§. 19), problema 17 (§. 216 *Geom.*), de linea perpendiculari ex dato puncto in eam demittenda, & problema 16 (§. 212 *Geom.*), de linea perpendiculari ex dato in linea data puncto ad eandem erigenda: ita enim labor multiplicatus difficilis redditur, & molestiam parit; quæ, sublata difficultate, prorsus nulla est, ubi jam noveris, quomodo ex puncto dato ad lineam datam perpendicularis sit demittenda, & ex puncto in eadem dato perpendicularis excitanda, ac utrumque facere valeas.

§. 23. Quoniam vero non sufficit problematum resolutiones intelligere, verum etiam habitus comparandus est ea faciendi, quæ fieri debent; habitus autem omnis, nonnisi exercitio, adeoque idem iterato agendo, comparatur; a problemate uno non progrediendum ad alterum, nisi ubi ea, quæ in resolutione præcipiuntur, prompte facere potueris. Hoc enim pacto, nullam senties in difficilioribus difficultatem; nec verendum est, ne molestia fastidium creet; nec progressus destituetur voluptate individua comite, quæ ardorem continuo progrediendi ulterius accendit, alit, & auget. Merentur ea, quæ hic dicuntur, attentionem; hoc enim modo acquiruntur singulares animi dotes, ad præclara nitenti mirifice profuturæ. Sed de his dicemus nonnulla in sequentibus.

§. 24. Enimvero, si quis omnem usum Matheseos facere velit, quem potest, eumque magis præclarum, quam qui in cognitione veritatum mathematicarum consistit; in iis persistere non debet, quæ hactenus

nus docuimus. Superſunt alia adhuc obſervanda, de quibus ut dicamus, inſtituti noſtri ratio poſtulat. Nimirum primum, in ſymbolica repræſentatione theorematis, ſicuti in repræſentatione definitionum (§. 11), non perinde eſt, quocunque modo id fiat; ſed id omnino agendum eſt, ut ſenſui tanquam diverſa exhibeantur, quæ intellectus a ſe invicem diſtinguere tenetur, & ut ſingula ipſa ſcriptione a ſe invicem diſtinguantur, quæ in notione propoſitioni reſpondente diſtinguenda veniunt. Omne theorema in duas reſolvitur partes, hypotheſin atque theſin; quarum iſta exhibentur, quæ de ſubjecto ſumuntur, hac vero exhibetur prædicatum quod, vi illorum quæ ſumuntur, de eodem enunciandum, ſeu, propter ea quæ ſumuntur, ponendum. In ſymbolica igitur repræſentatione theorematis, hypotheſis ſcribenda eſt a ſiniſtra, theſis vero a dextra. Quodſi hypotheſis plura continet; ſingula quæ ſumuntur, ſigillatim ſcribi, & eo, quo ſequuntur, ordine ſibi invicem ſubſcribi debent; ita ut ipſa ſcriptione exprimantur eorum ad ſe invicem relationes, quæ ſupponuntur. Et idem obſervandum eſt in theſi, ſiquidem plura continet. Exemplis manifeſtum reddetur, quod obſcurius dictum videri poterat, deficiente idea, a qua claritatem ſuam haurit notio. Sit exempli loco theorema, ad quod ante provocavimus (§. 18). *Si duæ quantitates quæcunque per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates diviſæ.* Hypotheſis theorematis eſt, quod duæ dentur quantitates; quod eædem dividantur per eandem tertiam; quo facto prodeunt duo quoti: theſis vero, quod hi ipſi quoti eam inter ſe habeant rationem, quam habent quantitates diviſæ. Quodſi (quemadmodum ſupra fecimus) quantitates dividendæ exponantur per A & B, dividens per C, quoti vero per F & G, theorema ita repræſentabitur.

Hypotheſis	*Theſis*
A & B quantitates dividendæ C dividens communis. F & G quoti ex diviſione prodeuntes	F : G = A : B.

Idem obſervandum eſt in numeris, per quos theorema exponitur.

24 & 12 Numeri dividendi 3 Diviſor commun. 8 & 4 Quoti ex diviſ. prodeuntes.	8 : 4 = 24 : 12

Immo, ſi ab expreſſione generali obſcuritatem arcere volueris, quæ per naturam ſuam eidem inhæret, non tollendam niſi claritate, quam affundunt ſingularia; numeros literis, quibus quantitates, numeri indeterminati (*§. 13 Arithm.*), deſignantur, ſubſcribi oportet, eo, quo hic factum eſſe vides, modo.

A &

A & B Quantitat.		F : G = A : B
24 12 dividendæ.		8 : 4 = 24 : 12
C Dividens		
3 communis.		
F & G Quoti ex		
8 4 divis. prod.		

Quodsi meris signis repræsentatio symbolica theorematis constare debeat; hoc modo quod intendis assequeris.

A (F	24 (8	F : G = A : B
C	3	
B (G	12 (4	8 : 4 = 24 : 12
C	3	

Idem fiet hoc modo:

$\frac{A}{c} = F$, $\frac{24}{3} = 8$ F : G = A : B

$\frac{B}{c} = G$, $\frac{12}{3} = 4$ 8 : 4 = 24 : 12

§. 25. Demus etiam exemplum unum alterumve geometricum. Theorema 37 (§. 233 *Geom.*) hoc est: *Si duas parallelas secet transversa, qui prodeunt* 1°. *anguli alterni æquales sunt,* 2°. *angulus externus æquatur interno opposito,* 3°. *duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis.* Hypothesis hæc est, quod duæ lineæ sint parallelæ, & quod eædem secentur linea alia transversa: Thesis autem, quod anguli alterni sint æquales; quod angulus oppositus externus æquetur interno opposito; quod denique duo oppositi interni sint æquales duobus rectis. Illa adeo duas habet partes, quæ junctim sumtæ eandem constituunt; hæc autem tria membra, quæ singula ex eadem hypothesi sequuntur; ita ut propositio sit composita ex tribus, eandem hypothesin habentibus, & ad tres hasce categoricas revocetur: 1o. Anguli alterni intra lineas parallelas sunt æquales; 2o. Angulus externus, ex lineis parallelis per transversam sectis ortus, æqualis est opposito interno; 3°. Duo anguli intra lineas parallelas transversa sectas orti sunt æquales duobus rectis. Quodsi hoc theorema eo, quem supra diximus (§. 19), modo explices; symbolice distincte ita repræsentatur:

Tab. I. Fig. 4.

Hypothesis.	*Thesis.*
AB parall. CD	1. $y = u$
EF secat AB & CD	2. $x = u$
in G & H	3. $o + u = 2$ R.

Theorema 18 (§. 179) pure ita enunciatur: *Si in duobus triangulis fuerit angulus unus unius æqualis angulo uni alterius, & duo latera comprehendentia angulum in uno triangulo fuerint sigillatim æqualia duobus lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, & duo ad idem anguli reliqui in uno erunt sigillatim æquales duobus ad idem angulis reliquis in altero triangulo, & tota triangula æqualia & similia erunt.* Hypothesis Tab. I. Fig. 6. hæc est, accedente expositione, quod in duobus triangulis A C B & *a c b*, angulus unus unius A sit æqualis angulo uni alterius *a*, quod duo latera A C & A B comprehendentia angulum A in uno triangulo, sint sigil-

ſigillatim æqualia duobus lateribus *ac* & *ab* comprehendentibus angulum *a* in altero triangulo: theſis vero, quod 1°. latus tertium BC unius ſit æquale lateri tertio *b c* alterius, 2°. quod angulus C in uno ſit æqualis angulo *c* in altero, 3°. quod angulus B in uno ſit æqualis angulo *b* in altero, 4°. quod triangulum ACB ſit æquale & ſimile triangulo *a c b*. Propoſitio adeo denuo compoſita eſt, in qua eidem ſubjecto ſub eadem conditione tribuitur multiplex prædicatum. Quodſi theorema hoc ſymbolice repræſentare volueris, ita diſtincte exhibetur ſcriptum:

Hypotheſis.	*Theſis.*
ang. A = *a*	1. BC = *bc*
AB = *ab*	2. ang. A = *c*
AC = *ac*	3. B = *b*
	4. △ACB ≌ △*acb*

Hoc nimirum pacto diſtincte exhibentur ſingula, quæ in hypotheſi ſumuntur, ut ſenſus præſto ſit in formanda notione diſtincta intellectui, quæ eidem reſpondet, nec minus diſtincte in ſenſum incurrunt ſingula, quæ iſtis poſitis una ponuntur: id quod egregium habet uſum, ſive in primo gradu cognitionis ſubſiſtere, ſive ad ſecundum progredi volueris, quemadmodum ex deinceps dicendis plenius conſtabit. Quodſi Ars characteriſtica foret ſatis exculta; ab omnibus vocabulis in ſymbolica repræſentatione theorematum abſtinere poteramus. Quoniam tamen ſignorum numerus multiplicaretur, quorum uſus tyronibus moleſtior; conſultius eſt ut paucis ſimus contenti, & ſubinde vocabulis nonnullis abbreviata ſcriptione locum concedamus.

§. 26. In problematis quædam dantur; quædam fieri, vel inveniri jubentur. Ita in problemate 20 (§. 258 *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 19), datur recta RS, & punctum extra eam V; jubemur autem per punctum V ducere lineam rectam, quæ ſit ipſi RS parallela. Quodſi ergo problema diſtincte concipere volueris; quæ dantur, ab eo quod quæritur, hoc eſt, quod vel fieri, vel inveniri jubetur, diſtinguenda, conſequenter ubi problema ſenſui diſtincte repræſentare volueris, verſus ſiniſtram ſcribenda ſunt data, eo modo quo ſingulæ determinationes in hypotheſi theorematis exprimuntur; verſus dextram vero quæſitum, quemadmodum hic factum eſſe apparet: Tab. I. Fig. 1.

Data	*Quæſitum*
Recta AB,	Recta tranſiens
punctum V extra	per V
eam	&
	paral. ipſi AB.

Ita nimirum non modo quæſitum a datis ſeparatur; verum etiam data ſingula diſtincte exhibentur, non minus quam ſingulæ determinationes quæſiti; conſequenter ſi hæc figuræ ſubſcribantur, idea ſingula a ſe invicem ſeparata exhibet, quæ in notione problemati reſpondente totidem operationibus

tionibus intellectus discernenda sunt, ut notio evadat distincta.

§. 27. Simile quid imitari licet in ipsa resolutione: id quod inprimis usui est, ubi ad gradum secundum cognitionis progredi, nec in primo acquiescere volueris. Exempli loco sit resolutio prima problematis 20 Geometriæ, cum quo nobis jam negotium est (§. 26). Ea nimirum ita repræsentatur:

VK perpendicularis ad RS.
T punctum pro arbitrio assumtum.
TA perpendicularis ad RS.
TA = VK
MN per V & A transiens.

MN parallela RS.

Notandum vero, in denominandis rectis, præponi literam quæ designat terminum a quo, unde ducenda est recta, quam ducere jubet resolutio; & singula fieri debere eo ordine, quo sibi invicem subscribuntur. Ita VK indigitat, perpendicularem VK ad RS duci ex puncto V, consequenter ad rectam RS ex puncto V demitti; TA vero indicat, perpendicularem TA ad RS ducendam esse ex puncto T tanquam termino a quo: TA=VK significat, perpendicularem TA æqualem fieri debere antea ductæ VK: Denique MN per VA indicat, rectam MN ducendam esse per puncta V & A, quibus datis determinatur situs rectæ MN per superius in Geometria ostensa. Linea recta separat ea, quæ fieri præcipiuntur, ab iis determinationibus, quas quæsitum habere debet, & quæ infra lineam exhibentur; scilicet quod hic linea MN sit datæ RS parallela. Quod enim transeat per punctum V, per se manifestum est, aut si mavis per ea, quæ vi resolutionis facta sunt, attenta mente considerata. Ubi nimirum ad secundum cognitionis gradum progredi libuerit, ea, quæ ex resolutione problematis per se manifesta sunt quoad quæsitum, probe distinguenda ab iis, quæ esse dicuntur.

§. 28. Non nego, si quis idem facere velit in aliis problematis, quod hic præstitimus in uno eorum, eoque haud difficili, ut facilius intelligeretur; eidem plura notanda esse, quam quæ hic docemus: sed instituti nostri ratio non fert, ut simus prolixiores. Sufficit generalem quandam ideam eorum, quæ facienda sunt, insinuasse animo lectoris. Quodsi enim hæc probe perpenderit, quæ hic inculcantur; plura suo marte assequetur, quæ hinc inde præterea requiruntur. Et sic ubi subinde cespitat; in progressu, ipsemet errores a se admissos, & quæ melius fieri poterant, animadvertet. Quamobrem diutius hisce non immoramur.

§. 29. In resolutionibus numericis problematum, typus calculi ad figuram relatus exhibendus est, qui problema cum resolutione distincte repræsentat, & ideam operatricem animo insinuat, quæ firmior ei-

dem inhæret, quam resolutio memoriæ mandata, ita ut hæc non tam facile te fallat. Immo si hæc eidem nondum fuerit infixa; ubi ad librum recurrendum, quando resolutione ista in praxi opus habes, in typum solum exempli oculos convertere sufficit, quod vi ideæ operatricis, quam repræsentat, totam operationem docet ac dirigit. Quoniam in ipsis Elementis nostris exempla hoc modo exhibuimus, non opus est, nisi ut unum lucis affundendæ gratia huc transscribamus. Sistimus adeo illud, quod ad illustrandum problema 13 Trigonometriæ planæ (§. 36 *Trigon.*) in medium adduximus. Problema hoc est: *Datis duobus angulis una cum latere uni eorum opposito invenire latus alteri oppositum.* Typus vero exempli problema cum resolutione repræsentans talis est:

Tab. I. Fig. 6.

Data	*Quæsitum.*
C = 48° 35′	BC
A = 57° 28′	
AB = 74′	

Calculus.

Log. Sin. C	9. 8750142
Log. AB	1. 8692317
Log. Sin. A	9. 9258681
Log. AB + Log. sin. A	11. 7950998
Log. BC	1. 9200856

= Log. AB + Log. Sin. A − Log. Sin. C.

Quodsi enim oculos in exemplum hoc modo repræsentatum convertas; statim liquet dari duos angulos A & C, una cum latere AB uni eorum C opposito; & quæri latus BC, quod opponitur alteri A. Typus calculi ostendit, ex tabulis excerpendos esse logarithmos sinus anguli C, lateris AB & sinus anguli A. Logarithmos lateris AB & sinus anguli A addendos, & a summa subtrahendum esse logarithmum sinus anguli C, ut relinquatur logarithmus lateris quæsiti BC, in Canone Logarithmorum evolvendus, ut pateat numerus lateri quæsito respondens.

§. 30. Abunde hactenus docuimus, quomodo ad gradum primum cognitionis perveniatur, ut nihil supersit in notionibus obscuri, sed omnia penitus intelligantur. Agedum itaque! progrediamur ad secundum, cui acquirendo inserviunt demonstrationes. Quoniam ad demonstrationem accedere non licet, nisi propositione rite intellecta; gradus secundus primum supponit; consequenter, quæ in antecedentibus præcepimus, ea ante fieri debent, quam ad demonstrationem distincte percipiendam animum appellas. Quamobrem, qui utrumque gradum una eademque opera acquirere studet; & ea observare tenetur, quæ de primo inculcavimus, & facere ea, quæ de secundo jam addemus.

§. 31. De-

§. 31. Demonſtrationes ex ratiociniis contextæ ſunt eo modo inter ſe concatenatis, quem in Logica (§. 551 & ſeqq.) ſatis perſpicue explicavimus, & mox uberius dicenda reddent manifeſtum. Ratiocinatio, tertia mentis ſeu intellectus operatio, involvit duas priores, primam atque ſecundam, notionem ſcilicet atque judicium, una cum uſu facultatum inferiorum, ſenſus ſcilicet, imaginationis atque memoriæ, & iis animæ actibus, per quos fit tranſitus ab uſu facultatum inferiorum ad uſum ſuperiorum, attentione nimirum atque reflexione: quæ denuo parumper attentis ad ſequentia manifeſta evadent, modo facultatum animæ notiones ex Pſychologia habuerint perſpectas. Quodſi ergo a primo cognitionis gradu ad ſecundum per ſaltum aſcendere nolueris; demonſtrationibus ante utendum eſt mechanicis, quam ad eas progrediaris, quæ vi intellectus concipiuntur, ſeu ejus operationibus abſolvuntur.

§. 32. Quid ſit demonſtratio mechanica, in Lexico Mathematico docuimus. Nimirum, juxta hypotheſin theorematis conſtruuntur figuræ; quo facto, ea una determinantur, quæ in theſi continentur, ſeu vi illorum, quæ in hypotheſi ſumuntur de ſubjecto, eidem attribuuntur. Quamobrem, num ea, quæ una determinantur, talia ſint, ope inſtrumentorum examinanda. Sit exempli loco theorema 18 Geometriæ (§. 179 *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 25), ſcilicet, *Si angulus unus trianguli unius ſit æqualis angulo uni trianguli alterius, & latera comprehendentia angulum iſtum in uno triangulo ſint ſigillatim æqualia lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; quod etiam latus tertium unius trianguli ſit æquale lateri tertio alterius, quod duo anguli reliqui unius ſint ſigillatim æquales duobus angulis alterius, quod tota triangula æqualia & denique ſimilia ſint.* Conſtrue triangulum ABC, Tab. I. Fig. 6. prout viſum fuerit; deinde ducatur recta *a b*, & ex *a* in *b* transferatur intervallum AB; in *a* excitetur angulus ipſi A æqualis; & in crus *a c* transferatur intervallum AC. Quodſi jam puncta *c* & *b* connectantur recta *b c*, prodit triangulum alterum *a b c*. Jam ubi circino capis intervallum BC, & circini crus unum colloces in *b*, crus alterum attinget punctum *c*. Vides itaque latus trianguli *a b c* tertium *b c* eſſe æquale lateri tertio BC alterius trianguli ABC. Ex punctis C, B, *c* & *b*, arbitraria circini apertura, ſed eadem, deſcribantur arcus, angulorum iſtorum menſuræ (§. 57 *Geom.*). Quodſi ope circini examines arcus ex centris C & *c*, itemque ex centris B & *b* deſcriptos; bini ſinguli deprehenduntur æquales (289 *Geom.*), atque hinc angulorum C & *c*, itemque B & *b* æqualitas colligitur (§. 141 *Geom.*). Exſcindantur ex charta, in qua delineata

 ſunt,

ſunt, triangula ACB & *a c b*; & triangulum *a c b* ponatur ſuper altero ACB, ea quidem lege, ut punctum *a* in A, & recta *a b* ſuper AB cadat; videbis triangulum *a c b* coincidere cum triangulo ACB, ſeu illud huic congruere (§. 3 *Geom.*). Atque, ex congruentia, triangula ACB & *a c b* æqualia eſſe intelliguntur (§. 161 *Geom.*), vi notionis etiam communis: communiter enim ex congruentia æqualitatem æſtimant omnes. Immo quia non minus laterum *b c* & BC, itemque angulorum *b* & B, *c* & C congruentia oculis obvia eſt; vi notionis etiam communis, colligitur eorundem æqualitas, nempe quod ſit *b c*=BC, *b*=B & *c*=C; ita ut examinibus anterioribus ope circini factis non ſit opus. Denique ubi ad animum revocas, eſſe *a*=A, *a b*=AB & *a c*=AC per hypotheſin, aſt *b*=B, c=C & *b c*=BC per examen, quod inſtituiſti; cum præter angulos & latera nihil reperias in triangulis iſtis, per quæ a ſe invicem diſcerni poſſint; eadem quoque triangula *a c b* & ACB ſimilia deprehendis (§. 24 *Arithm.*). Similiter ubi theorema 37 (§. 233 *Geom.*) demonſtrare volueris: *Si duas parallelas ſecet transverſa, erunt anguli alterni æquales, angulus externus æquatur interno oppoſito & duo interni oppoſiti ſunt æquales duobus rectis*; ducenda eſt 1°. linea CD; deinde 2°. altera AB eidem parallela, ad quamcunque diſtantiam, cum ea non determinetur in hypotheſi; & 3°. pro arbitrio recta EF, quæ oblique ſecat parallelam utramque in G & H. 4°. Ex puncto interſectionis G ducatur arcus intra crura ipſius anguli *y*, & eodem radio ex puncto interſectionis altero arcus intra crura anguli *u*; quo facto, ut ante, ex æqualitate menſurarum colligis æqualitatem angulorum. Quodſi 5°. ex centro G eodem radio ducas arcum intra crura anguli *x*; ex æqualitate menſurarum anguli *x* & *u* colligis æqualitatem horum angulorum. Denique 6°. duc etiam ex centro G eodem adhuc radio anguli *o* menſuram; videbisque menſuras angulorum *o* & *u*, quarum hæc eadem deprehenditur cum menſura anguli *x*, ſemicirculum complere: unde colligis eos eſſe duobus rectis æquales.

Tab. I. Fig. 8.

§. 33. Abſit autem, ut tibi perſuadeas, demonſtrationes haſce mechanicas in locum ceterarum ſurrogari poſſe, quas ſcientificas appellare libet in oppoſitione ad mechanicas. Etenim quod per mechanicas patet, nonniſi verum eſſe intelligitur de figura, quam deſcripſiſti & præ manibus habes; adeoque theorematis veritas perſpicitur nonniſi in caſu ſingulari. Enimvero demonſtratio, ex hypotheſi theorematis ratiocinando, veritatem theorematis manifeſtat univerſaliter. Demonſtratio tamen mechanica univerſalitatem loquitur, quatenus patet, ea, quæ ex aſſumtis inferuntur in theoremate,

te, per constructionem semper talia determinari debere. Nolo tamen de his dicere disertius, propterea quod vix conveniunt illorum captui, quibus demonstrationes mechanicæ satisfaciunt. Consultum etiam est, ut demonstrationes mechanicæ ad formam scientificarum reducantur, quantum datur, ut ad hasce quasi manuducant. Sed talia relinquenda sunt circumspectioni illorum, qui erudiendis aliis præficiuntur. Ceterum exemplum præbet demonstratio theorematis geometrici mechanica de congruentia triangulorum, quam modo dedimus (§. 31), ubi ex congruentia laterum *b c* & BC, angulorum *b* & B, itemque *c* & C, atque triangulorum *a c b* & ACB colligitur eorundem æqualitas, quemadmodum in demonstratione scientifica.

§. 34. Demonstrationes mechanicæ æquipollent exemplis numericis, quæ veritatem theorematum & problematum in casu singulari perspiciendam præbent. Atque adeo facile patet, quid fieri debeat, si simile quid circa theoremata arithmetica tentes. Quod vero etiam hic formæ demonstrationis scientificæ ratio haberi possit, manifestis speciminibus docuimus in Arithmetica de genesi numerorum quadratorum (§. 262 *Arithm.*), de genesi numerorum cubicorum (§. 277, 280 *Arithm.*), de numeris æquidifferentibus (§. 327, 329 *Arithm.*). Quoniam vero hisce speciminibus profundiora insunt, quæ ad tertium cognitionis gradum viam sternunt; de iis plura nobis dicenda sunt in sequentibus. Diximus istiusmodi demonstrationes in Arithmetica oculares; quia oculis conspicienda sistunt, quæ in scientifica intellectus concipere debet. Et loquuntur universalitatem ex eadem ratione, quam modo dedimus de mechanicis theorematum geometricorum demonstrationibus (§. 32). Vix tamen ratio satis manifesta erit iis, qui, in Ontologia nondum versati, non capiunt quomodo, positis determinantibus, ponatur determinatum. Sane memini, Mathematicos primi ordinis hæsitasse in talibus, quæ principio isti superstruuntur. Nec mirum: ignoratis enim, vel saltem non distincte expensis principiis, a quibus principiata pendent, horum veritas non perspicitur.

§. 35. Exempla, quibus veritas propositionis perspicitur in numeris, qualia sunt, quæ in Arithmetica subinde adduximus, & quibus propositiones illustrari debere supra præcepimus (§. 17), si coacerventur, pluribus in medium allatis, parere inductionem, quam dicunt Logici (§. 478 *Logarith.*), nemo est qui nesciat. Quoniam figuræ in charta delineatæ non minus singularia repræsentant, quam notæ numericæ; quilibet concedere tenetur, si demonstratio mechanica in pluribus figuris instituatur, similiter prodire inductionem. In utroque igitur casu certitudo major non est,

quam

quam quæ ab inductione expectari poteſt. Non eſt quod excipias, hoc pacto, etiam in demonſtrationibus ſcientificis, a ſingulari ad univerſale argumentari, cum eædem ad figuras in charta delineatas referantur. Etenim quod demonſtratur, non de figura in charta delineata demonſtratur; ſed ex aſſumtis, univerſaliter ratiocinando, colligitur quod erat demonſtrandum: demonſtratio autem refertur ad figuram in charta delineatam, ut notionibus affundatur claritas, ne in demonſtratione intelligenda hæſitemus. Inde eſt, quod ſchematiſmorum in Geometria non requiratur veritas, quæ in uſum demonſtrationum delineantur: ſufficit enim talia ſupponi, qualia in hypotheſi ſumuntur, neque enim ex iis, quæ figuræ delineatæ revera inſunt, ſed potius ex illis, quæ in hypotheſi ſumuntur & figuræ ineſſe ſupponuntur, procedit ratiocinatio.

§. 36. Demonſtrationes iſtæ mechanicæ ſatisfaciunt iis, qui in primo cognitionis gradu acquieſcunt. Faciunt enim ad perſpiciendum veritatem in ſingulari. Eo autem contenti ſunt, qui ulterius progredi nolunt; utpote nullum habentes ſenſum ejus convictionis, qui per demonſtrationes genuinas, quas ſcientificas dicere libuit, demum producitur. Non tamen nullius prorſus uſus ſunt ceteris. Quoniam enim veritatem in ſingulari perſpiciendam præbent; ad nexum prædicati cum ſubjecto, ſeu ejus, quod ex aſſumptis in hypotheſi colligendum, cum iiſdem, pervidendum conducunt; ut clarius intelligatur, quid demonſtrari debeat, ſeu quomodo theſis ab hypotheſi pendeat. Immo cum veritas, quamprimum perſpicitur, delectet; voluptate quadam perfunditur animus tyronis, ubi videt, poſita hypotheſi, poni theſin, ſeu per aſſumta determinari, quæ de ſubjecto prædicanda ſunt. Hac voluptate non modo tollitur tædium, ex prævisa difficultate percipiendæ demonſtrationis, ſive vera, ſive imaginaria oriundum; verum etiam ardor accenditur demonſtrationis percipiendæ, & ad eam percipiendam animus redditur attentus. Novi equidem exercitatioribus moleſtum accidere, ubi animum ante ad demonſtrationem mechanicam advertere jubentur, quam ad ſcientificam accedant, & hac moleſtia effici impatientes, quod per inutiles ambages incedere debeant: id quod inprimis accidit iis, qui animum ſciendi cupidum poſſident. Enimvero, quæ initio ſtudii mathematici commendantur, ea in progreſſu prætermittuntur, quando iiſdem non amplius opus habemus. A ſyllabizatione incipimus, quando legere diſcimus: ab ea abſtinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet ſyllabizationem, quod exercitatiores eadem in legendo non habent opus? Quamobrem velim ut de iis, quæ hic inculcantur,

non

non feratur judicium, nisi singulis rite expensis. Notandum quoque non omnia ingenia esse velocia; sed dari etiam tarda; & tarda effici studii utilissimi desertores, nisi molestiæ, qua deterrentur, tempestive afferatur medela. Sunt vero subinde tarda ingenia optima, quando nimirum naturali quodam veritatis intime perspiciendæ impetu feruntur, ut alia taceamus.

§. 37. Demonstrationes continua ratiocinatione absolvuntur, & ex assumtis procedunt. Assumta continentur in hypothesi, quæ singula demonstrationem ingredi debent. Ab his igitur exordiendum; redigendo in propositiones assumta, & ex anterioribus sumendo principia, quæ vel in definitionum, vel axiomatum, & postulatorum, vel propositionum jam demonstratarum numero sunt, terminum communem cum istis habentia, qui ipse principium istud veluti sponte sua in memoriam revocat, ubi anteriora eidem firmiter infixa tenueris. Quæ prodeunt conclusiones sumuntur deinceps eodem modo, quo ea, quæ hypothesis continebat; eodemque modo ratiocinando progrediendum, donec inferantur ea, quæ thesis sistit. Unde facile apparet, apprime opus esse, ut conclusiones per singula ratiocinia elicitæ probe notentur, & ad tollendam omnem molestiam oculis subjiciantur: id quod ope symbolicæ repræsentationis fieri posse dudum docuimus, non minus in Ratione Prælectionum Sect. 1, c. 2, §. 38, 50, quam in Logica tam minori c. §. quam majori (*not.* §. 551 *& seqq.*). Consultum vero est, ut hic exemplo uno alteroque illustrentur, quæ modo diximus, cum amplissimum habeant usum, deinceps disertius exponendum. Hic tantum modo observamus, quod neglecta hac demonstrationum resolutione, & symbolica earundem repræsentatione, studium mathematicum reddatur difficile, & plurimis idem deferendi causa detur.

§. 38. Exemplum facillimum præbet theorema sextum Geometriæ (§. 156 *Geom.*), cujus hic est tenor: *Si recta quædam secet rectam aliam, anguli verticales ad punctum intersectionis æquales sunt.* Theorema symbolice ita repræsentatur:

Hypothesis.	*Thesis.*
CD recta data,	$o = x$
AB recta eam secans,	
E punctum intersectionis, adeoque	
o & *x* anguli verticales (§. 67 *Geom.*).	

Tab. I. *Fig.* 9.

Patet itaque æqualitatem angulorum verticalium *o* & *x* demonstrandam esse ex eo, quod oriantur intersectione rectarum CD & AB ad punctum intersectionis E. Quodsi ergo omnia minutissime persequi volueris, convenienter definitionibus, quæ in Elementis nostris præmisimus, ut in tota demonstratione nihil

admittatur, quod confuse saltem percipitur, ratiocinatio ita instituenda. In hypothesin ad figuram oculis præsentem relatam, qualem exhibet symbolica ejus repræsentatio eidem subjicienda, non minus oculos conjiciens, quam animum advertens, vides CD esse rectam, quam in E secat recta alia AB, adeoque angulos *o* & *y* habere crus unum AE commune, & crus alterum CE anguli *o* in directum situm esse cruri alteri ED anguli *y*; adeoque definitio nominalis angulorum deinceps positorum, quam ex reali, instar corollarii, deduximus (§. 63 *Geom.*), tibi suggerit hoc principium: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum duo crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Unde infertur: Angulos *o* & *y* esse deinceps positos. Quodsi primam hanc conclusionem sumas tanquam præmissam syllogismi, & tam subjectum, quam prædicatum perpendis, memoriam subit theorema Geometriæ quintum (§. 147 *Geom.*): Duo anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis; quod præbet majorem novi syllogismi. Ex his præmissis colligis conclusionem: Ergo anguli *o* & *y* sunt æquales duobus rectis, quæ probe notanda in usum sequentem. Quodsi jam porro oculos in hypothesin ad figuram oculis præsentem conjicis, & animum ad eandem advertis; denuo vides, AB esse rectam, quæ secat alteram CD, adeoque angulos *y* & *x* habere crus commune ED, & crura reliqua AE & EB in directum sita esse; atque hoc formas judicium intuitivum: Anguli *y* & *x* habent crus commune & eorum crura reliqua in directum jacent. Ad hoc si animum attendis, memoria suggerit denuo definitionem nominalem angulorum deinceps positorum, quam, corollarii instar, ex reali deduximus (§. 63 *Geom.*) & hoc suppeditat principium, quod ad conclusionem modo elicitam, tanquam præmissam novi syllogismi assumtum, vicem alterius præmissæ tuetur: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Ex his igitur præmissis infers conclusionem: Anguli *y* & *x* sunt anguli deinceps positi. Quodsi porro hanc conclusionem sumas præmissam syllogismi novi, animum ad eam advertenti succurrit theorema (§. 147 *Geom.*): Anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis. Ex his itaque præmissis infers conclusionem: Ergo anguli *y* & *x* sunt æquales duobus rectis. Quodsi jam in duas conclusiones, *o* & *y* sunt æquales duobus rectis, *x* & *y* sunt æquales duobus rectis, oculos conjicis, & super iisdem reflectis; attendenti manifestum est: angulos *y* & *x* atque angulos *o* & *y* esse duo æqualia eidem tertio, quod hic sunt duo recti. Quamobrem si judi-

judicium hoc quasi intuitivum sumas, instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit principium, quod antea didicisti (§. 87 *Arithm.*): *Æqualia eidem tertio sunt æqualia inter se.* Ex his adeo præmissis infers: *Anguli* o & y *simul sumti sunt æquales angulis* y & x *simul sumtis.* Enimvero thesis, ubi in eam oculos conjicis, attendenti loquitur demonstrandum esse, quod angulus o sit æqualis angulo x. Quamobrem vides angulum y utrinque esse auferendum, ut anguli o & x relinquantur: quod dum fieri supponitur, patet, quod idem ab æqualibus auferatur. Hoc igitur si sumis, succurrit denuo principium, quod in Arithmetica didicisti (§. 91 *Arithm.*): *Si æqualia ab æqualibus auferas, vel idem ab æqualibus, quæ relinquuntur æqualia sunt.* Unde porro concludis: *Anguli* o & x, *qui hic relinquuntur, æquales sunt.* Atque sic patet, demonstratum esse, quod demonstrandum fuisse thesis insinuat.

§. 39. Distinctissime adeo docuimus, quomodo concipienda sit demonstratio, ut omnem consequatur evidentiam, quam habere potest. Quodsi jam eandem symbolice repræsentare volueris, ut omnem quoque consequatur claritatem, quam habere potest, omnisque in ea concipienda tollatur difficultas; hoc modo ipsum fieri debet:

I.

AE crus commune ang. o & y.
CE in directum situm ipsi ED

---

o & y anguli deinceps positi

---

1. $o+y=2$ R.

II.

ED crus commune ang. y & x
AE in directum situm ipsi EB

---

y & x anguli deinceps positi

---

2. $y+x=2$ R.

III.

$o+y=2$ R. *vi num.* 1.
$y+x=2$ R. *vi num.* 2.

$y+o=y+x$

$o=x$ *Q. E. D.*

Notandum hic, lineam a se invicem separare, quæ sumuntur, & quod ex iis concluditur. Illa supra lineam collocantur, hoc infra eandem constituitur. Quod intra duas lineas deprehenditur, duplici modo considerari, nimirum 1°. tanquam conclusionem, quæ ex assumtis colligitur, & 2°. tanquam assumtum, unde ulterius infertur, quod infra lineam alteram scribitur. Vides autem porro, primo loco *num. I*, & *num. II*, assumta ex hypothesi peti, ac inde duplici ratiocinio elici conclusionem *num.* 1, & alteram *num.* 2. Exhausta sic

sic hypothesi, *num. III* sumuntur conclusiones *num.* 1 *&* 2 ex hypothesi elicitæ; ac inde inde porro duplici ratiocinio tandem elicitur, quod in thesi continetur, esse $o=x$, seu angulos verticales esse æquales. Repræsentatio hæc demonstrationis symbolica tantummodo propositionem minorem & conclusionem uniuscujusque syllogismi exhibet, qui demonstrationem ingreditur; adeoque syllogismos ad enthymemata reducit; omissis principiis, quæ unicuique syllogismo majorem præbent, ac facile supplentur ex regulis logicis; immo sua veluti sponte memoriam subeunt, ubi ea familiaria experiris; vel per citationem in contextu positam reperiri possunt, ubi memoriæ nondum fuerint infixa. Atque adeo abunde patet, nihil hic desiderari, quod ad demonstrationem distincte concipiendam requiritur, & non minus ad evidentiam quoad illationem demonstrationi conciliandam, quam ad claritatem omnem eidem affundendam, ne quicquam obscuri supersit; sed ut penitus intelligatur, desideratur.

§. 40. Demus adhuc exemplum aliud. Sit demonstrandum theorema 18 Geometriæ, de quo diximus superius (§. 25). *Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem, & latera eundem comprehendentia sigillatim æqualia; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, duo anguli reliqui erunt sigillatim æquales, & tota triangula æqualia atque similia.* Quoniam ex hypothesi ratiocinatio nondum procedit, quemadmodum in casu anteriore (§. 38, 39); præterea in usum demonstrationis quædam adhuc alia sumuntur, quæ sumi posse patet. Ubi vero hoc fieri solet, tum quæ ulterius supponuntur, præparationem constituere dicuntur. Est itaque hoc in casu, ubi æqualitatem & similitudinem ex principio congruentiæ demonstraturi sumus, præparatio hæc (§. 3 *Geom.*). Triangulum unum ponatur super altero, ita ut vertex angulorum æqualium unius ponatur super vertice alterius & crus illius unum cadat super crure uno alterius. Quæ in præparatione sumuntur, ea tanquam ad hypothesin spectantia considerantur, nullo inter hypothesin & præparationem, quoad usum assumtorum in demonstrando, facto discrimine. Dico quoad usum assumtorum in demonstrando: alias enim manifestum est discrimen inter ea, quæ in hypothesi, & ea, quæ in præparatione sumuntur. Etenim per ea sola, quæ in hypothesi sumuntur, determinantur ea, quæ subjecto tribuenda & de eodem adeo demonstranda veniunt: quæ vero in præparatione sumuntur, non alium habent usum, quam ut ex sumtis in hypothesi procedat ratiocinatio. Nimirum quæ in præparatione sumuntur, per ea quæ sumuntur in hypothesi non determinantur; alias enim ratio-

ratiocinando ex iisdem colligi poterant, nec ulla foret ratio, cur sumerentur. Sumi autem possunt non invito principio contradictionis, quatenus hypothesi non repugnant, sed cum iis, quæ in eadem continentur, una consistunt. Absoluta itaque præparatione demonstratio ordine naturali, qualem requirit usus facultatum animæ, ita procedit.

Tab. I. Fig. 6. §. 41. Vertex anguli *a* cadit in verticem anguli A, & crus illius *a b* in crus alterius AB, per præparationem, estque angulus *a* æqualis ipsi *A*, per hypothesin. Hæc ubi perpendis, succurrit theorema 12 (§. 166 *Geom.*). Si fuerint duo anguli æquales, & vertex unius ponatur super verticem alterius, ac præterea crus unum illius super crure uno hujus; etiam crus alterum illius super crus alterum hujus cadit. Unde infertur: 1°. crus *a c* anguli *a* super crure AC anguli A cadit. Jam porro *a* cadit in A & *a b* super AB, per præparationem, & *a b* = AB, per hypothesin. Ad hæc animum advertenti succurrit: Si recta quædam alteri æqualis ita applicetur, ut terminus ejus unus cadat super terminum unum alterius, ac ipsa cadat in alteram; etiam alter ejus terminus in terminum alterum alterius cadit (§. 169 *Geom.*). Unde infertur 2°. rectæ *a b* punctum *b* cadere in punctum B rectæ alterius AB. Similiter punctum *a* cadit in A, per præparationem, & *a c* super A C per demonstrata *num.* 1, estque *a c* = AC, per hypothesin. Succurrit igitur denuo principium modo commemoratum, indeque infertur: 3°. punctum *c* cadere in C. Atque hæc sunt, quæ ex hypothesi, accedente præparatione, ratiocinando colliguntur. Enimvero quoniam in hisce conclusionibus nondum continentur, quæ demonstranda loquitur thesis; hæc ex illis continuata ratiocinatione colligenda. Ad conclusiones modo elicitas perspicienti manifestum est, quod punctum *c* in C per demonstrata *num.* 3, & punctum *b* in B per demonstrata *num.* 2 cadere; unde formatur hoc judicium quasi intuitivum: Rectæ *b c* & BC intra eosdem terminos continentur (§. 11 *Geom.*). Vi definitionis congruentiæ (§. 3 *Geom.*), memoria suggerit hoc principium. Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt. Hinc infertur conclusio: Recta *b c* congruit rectæ BC. Hanc conclusionem si sumas instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit hoc principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea sunt æqualia. Unde infertur: I. recta *b c* æqualis est rectæ BC; quod erat primum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Porro *b* cadit in B, per demonstrata *num.* 2, *b a* in BA, per præparationem, & *b c* in BC, per demonstrata *num.* 2 & *n.* 3, atque §. 170. *Geom.* Habemus adeo duos angulos *b* & B, quorum vertices *b* & B

atque crura *b c* & BC, itemque *b a* & BA coincidunt. Enimvero si vertex & crura angulorum duorum coincidunt, anguli æquales sunt (§. 167 *Geom.*). Ergo II, angulus *b* æqualis est ipsi B; quod erat secundum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Similiter punctum *c* in C cadit per demonstrata *num.* 3, & *c a* in CA per demonstrata *num.* 1, item *c b* in CB per demonstrata *num.* 2 & *num.* 3, atque §. 170 *Geom.* Habemus igitur denuo duos angulos *c* & C, quorum vertices & crura coincidunt. Denuo ad hoc animum advertenti succurrit principium: Si duorum angulorum vertices & crura coincidunt, anguli æquales sunt. Unde infertur conclusio III, anguli *c* & C æquales sunt; quod erat tertium. Denique *a* cadit in A, per præparationem, *b* in B, per demonstrata *num.* 2, & *c* in C per demonstrata *num.* 3, adeoque patet triangula *a c b* & ACB intra eosdem terminos contineri (§. 11, 170 *Geom.*). Hoc ipsum perpendenti succurrit; Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt (§. 3 *Geom.*). Unde colligitur: Triangula *a c b* & ACB sibi mutuo congruunt. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, memoriam subit principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt. Unde infertur IV, triangula *a c b* & ACB æqualia & similia sunt; quod erat quartum. Integram adeo demonstrationem absolvimus, cum vi theseos nihil amplius demonstrandum restet.

§. 42. Quodsi symbolicam demonstrationis hujus repræsentationem desideres, qua singula veluti oculis conspicienda exhibentur; ea ita sese habet:

Hypothesis	*Thesis.*
ang. *a* = A	I. *b c* = BC
ab=AB	II. ang.*b*=B
ac=AC	III. *c* = C
	IV. △*acb*≅△ACB

Tab. I. Fig. 6.

Præparatio.

a cadit in A

ab cadit in AB

Demonstratio.

I.

a cadit in A, *per præparat.*
ab cadit in AB, *per eandem.*
a = A, *per hypoth.*

1°. *a c* cadit in AC

II.

a b = AB, *per hypoth.*
a cadit in A, *per præparat.*
a b cadit in AB, *per eandem.*

2°. *b* cadit in B

III.

a cadit in A, *per præparat.*
a c cadit in AC, *per demonstr. num.* 1.
a c = AC, *per hypoth.*

3°. *c* cadit in C

IV.

c cadit in C, *per demonstr. num.* 3.
b cadit in B, *per demonstr. num.* 2.

adeo-

adeoque
bc & BC intra eosdem terminos continentur.

Recta *bc* congruit ipsi BC

I. *bc*=BC
V.
b cadit in B, *per demonstr. num.* 2.
ba cadit in BA, *per præparat.*
bc cadit in BC, *per demonstr. num.* 2.
& *num.* 3 & §. 170 *Geom.*

II angulus *b*=B
VI.
c cadit in C, *per demonstr. num.* 3.
ca cadit in CA, *per demonstr. num.* 1.
cb cadit in CB, *per demonstr. num.* 2.
& *num.* 3. & §. 170 *Geom.*

III. angulus *c*=C
VII.
a cadit in A, *per præparat.*
b cadit in B, *per demonstr. num.* 2.
c cadit in C, *per demonstr. num.* 3.
adeoque
△△ *acb* & ACB intra eosdem terminos continentur (§. 11, 170 *Geom.*)

△ *acb* congruit △ ACB

IV. △ *acb* ≌ △ ACB

§. 43. Atque ita totam demonstrationem in sua prima principia resolvimus, ex quibus facultatum nostrarum usu deducitur, non admissis notionibus confusis, quæ obscuritatem quandam relinquere poterant, & ratiociniis distincte atque naturali ordine expressis, ac inter se concatenatis, ut nihil desit evidentiæ (§. 41). Singula hæc ipsis oculis spectanda exhibet repræsentatio demonstrationis resolutæ symbolica (§. 42). Etenim conspicitur, quomodo demonstratio ex hypothesi & præparatione, tanquam ex assumtis procedat; quemnam utriusque usum faciamus in demonstrando; & cur præparatione opus sit; nec non quomodo sese habeant ea, quæ præparatio superaddit, ad ea quæ in hypothesi continentur. Videmus porro, quomodo omnes determinationes in hypothesi contentæ invehantur in demonstrationem; ut tandem, ex omnibus simul sumtis, concludatur unumquodque eorum, quod in thesi continetur, tanquam determinatum ex determinantibus. Videmus quoque, quomodo ratiocinia concatenentur, introductis conclusionibus præcedentium in sequentia. Videmus denique, quomodo ratiocinia ultima terminentur in iis, quæ demonstranda loquitur thesis, ut manifestum sit demonstrationem esse absolutam.

§. 44. Habet autem repræsentatio demonstrationis symbolica hunc usum, ut eandem facilitet & omnem difficultatem arceat. Oritur difficultas ex ratiociniorum continuandorum longa serie, & conclusiones, quæ in præcedentibus ratiociniis fuerant elicitæ, memoria retinendæ, ut eas intro-

introducere liceat in ſequentes per modum præmiſſarum, ubi non ſtatim, quando illatæ fuerunt, in locum præmiſſæ aſſumuntur in ſyllogiſmo proxime ſequente, quemadmodum in exemplo primo factum eſſe apparet *num.* I, & II, (§. 39) & in præſenti *num.* IV, & VII. Enimvero, ſi demonſtratio ſymbolice repræſentetur, gradum ſiſtere licet in ſingulis, quæ ſigillatim expreſſa exhibentur, & quacunque mora interpoſita redeunti progredi datur, ac ſi nulla interpoſita fuiſſet. Quantacunque igitur fuerit ratiociniorum eo uſque continuandorum ſeries, donec perveniatur ad ea, quæ demonſtranda fuerant; non tamen defatigabitur animus ratiocinationi in longa ſerie continuandæ minus adſuetus. Nec diſtrahitur animus, quocunque, durante illa quam interponere viſum eſt mora, cogitationes tuas convertas. Non interrumpitur eadem attentio, quæ ad demonſtrationem afferenda, ne deſit ſenſus evidentiæ ad convictionem plenariam requiſitus. Immo dum omnia, ad quæ animus advertendus, oculis ſpectanda ſubjicit, attentionem mirifice juvat, ſive ea excitanda, ſive conſervanda fuerit. Neque defatigatur imaginatio, atque memoria; quatenus concluſiones ſyllogiſmorum anteriorum retinendæ, ut earum prompte meminerimus, dum in ſyllogiſmos ſequentes introducendæ; cum oculis in ea, quæ diſtincte ſcripta cernuntur, converſis, ſua ſeſe ſponte ſiſtant, quamprimum earundem meminiſſe debemus. Neque etiam hæſitas in eo, quomodo progrediendum ſit in demonſtratione, donec abſolvatur. Etenim clariſſime vides, primum formari propoſitiones ex iis, quæ in hypotheſi &, ubi ea non ſufficit ſola, in præparatione ſumuntur, ut, adſcitis principiis, ex anterioribus inferantur concluſiones, donec hypotheſis & præparatio fuerit exhauſta. In locum hypotheſeos & præparationis, deinde ſuccedunt concluſiones hoc pacto elicitæ, & quomodo introducendæ ſint in novos ſyllogiſmos, tum theſis, quæ demonſtranda oculis objicit, tum memoria principiorum, quæ conſpectus concluſionum & in theſi contentorum offert, oſtendit. Quodſi adeo principia anteriora familiaria experiris, in diſtincte concipienda demonſtratione nihil prorſus difficultatis percipitur. Redduntur autem familiaria, ſi eo, quem præſcripſimus, modo expendantur, & ſymbolicæ repræſentationes, quas explicavimus, aliquoties animo recolantur.

§. 45. Qui principia, quibus opus habet, nondum adeo familiaria experitur, ut ſponte ſua memoriam ſubeant, quoties iiſdem opus eſt; ei inſerviunt citationes demonſtrationibus in contextu inſertæ. Hæ enim oſtendunt paragraphum, in quo principium continetur, quod ad propoſitionem, vel ex hypotheſi ac præparatione formatam, vel ex concluſionibus

nibus jam elicitis assumtam aut derivatam, applicatum conclusioni eliciendæ inservit. Patebit hoc, demonstrationis symbolicam repræsentationem cum contextu conferenti, ut adeo opus non sit plura in hanc rem afferri.

§. 46. Notandum nimirum, in contextu demonstrationem concisius proponi; quantum sufficit, ut singula suggerantur, quæ animum subire debent, ubi illam distincte concipere volueris. Quodsi tamen contextum cum resolutione, qualem hic præcepimus, & repræsentatione symbolica, qualem exhibuimus, conferre volueris; facile observabis, demonstrationem in contextu positam esse utriusque directorium, ne hæsites in eo, quid fieri debeat. Facile adeo animadvertes, demonstrationes ita a nobis fuisse expressas, ut huic instituto maxime conveniant. Disces etiam, resolvendo demonstrationes eo, quem præcepimus, modo, & symbolice repræsentando, easdem minime effici prolixiores: cum supplendo ea, quæ conspectus schematismi suggerit & quæ citationes insinuant, eodem prorsus ordine prodeant singula ratiocinia, quo eadem posuimus. Immo, si sufficiente attentione uti volueris, in te ipso experieris, deesse adhuc aliquid sensui evidentiæ, quamdiu singula ratiocinia non formaveris; præsertim ubi uno vel altero exemplo eundem acquisiveris, ut ne ignores differentiam, quæ inter distinctam & confusam perceptionem intercedit. Absit itaque ut tibi persuadeas, hic a nobis præcipi, quæ a contextu abhorrent, ac per inutiles ambages ad scopum tendi.

§. 47. Enimvero non inconsultum esse videtur, ut exemplum quoque demonstrationis theorematis arithmetici in medium afferamus. Sumamus itaque theorema 21 (§. 181 *Arithm.*), quo superius usi sumus (§. 24) & quod ita habet: *Si duas quascunque quantitates per eandem tertiam dividas; quoti sunt inter se ut quantitates divisæ.* Theorema hoc symbolice ita repræsentatur:

Hypothesis.	*Thesis.*
A & B quantitates dividendæ,	F : G = A : B.
C dividens communis,	
F & G quoti ex divisione prodeuntes	

Patet itaque demonstrandum esse, quotos F & G esse quantitatibus A & B proportionales, ex eo, quod prodeant ex divisione quantitatum A & B per eandem tertiam C. Quodsi ergo ex hypothesi sumis: Quotus F prodit ex divisione quantitatis A per quantitatem C; ex anterioribus (§. 174 *Arithm.*) succurrit principium: In divisione unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum. Unde infertur: 1, sive unitas, est ad C ut F ad A. Quodsi porro ex hypothesi sumis: Quotus G prodit ex divisione quantitatis B per quantitatem

titatem C; vi ejusdem principii infertur: unitas, sive 1, est ad C ut G ad B. Exhausta hypothesi, ut inde nihil amplius concludi possit, ubi conclusiones modo elicitas inter se confers, patebit rationes F ad A, & G ad B, esse duas rationes eidem tertiæ 1 ad C æquales. Succurrit itaque theorema (§. 167 *Arithm.*): Rationes æquales eidem tertiæ sunt æquales inter se. Atque hinc infertur: Rationes F ad A & G ad B esse æquales, seu esse F : A = G : B. Enimvero thesis ostendit, quæri quomodo sese habeat A ad B. Huc si animum advertas, succurrit theorema 18 (§. 173 *Arithm.*): Quantitates proportionales etiam alternando proportionales sunt. Atque adeo tandem infertur, esse F : G = A : B, quod erat demonstrandum.

§. 48. Symbolica demonstrationis hujus repræsentatio hæc est:

Hypothesis.

$\frac{A}{C} = F$

$\frac{B}{C} = G$

Thesis.

F : G = A : B

Demonstratio.

I.

$\frac{A}{C} = F$, *per hypothesin.*

1°. 1 : C = F : A

II.

$\frac{B}{C} = G$, *per hypothesin.*

2°. 1 : C = G : B

III.

1 : C = F : A, *per demonstrata n.* 1.

1 : C = G : B, *per demonstrata n* 2.

F : A = G : B

F : G = A : B *Q. E. D.*

Nulla hic opus est præparatione, cum sola hypothesis ea contineat, unde vi principiorum anteriorum tandem infertur conclusio, quæ vi theseos inde elicienda. Quodsi majoris perspicuitatis gratia in numeris demonstrationem repræsentare volueris, non alia re opus est, quam ut literis substituantur numeri; eo modo, quo hic factum esse vides:

Hypothesis.

$\frac{24}{3} = 8$

$\frac{12}{3} = 4$

Thesis.

8 : 4 = 24 : 12

Demonstratio.

I.

$\frac{24}{3} = 8$, *per hypothesin.*

1°. 1 : 3 = 8 : 24

II.

$\frac{12}{3} = 4$, *per hypothesin.*

2°. $1 : 3 = 4 : 12$

III.

$1 : 3 = 8 : 24$, *per demonstrata n.* 1.
$1 : 3 = 4 : 12$, *per demonstrata n.* 2.

$8 : 24 = 4 : 12$

$8 : 4 = 24 : 12$ *Q. E. D.*

Possunt etiam numeri quantitatibus per literas designatis subscribi, vel ad latus adjici, prout supra factum esse apparet (§. 24), ut claritate sua dispellant obscuritatem, quæ signis istis universalibus adhærere videtur, quamdiu iisdem nondum satis fueris adsuetus. Ceterum si demonstrationem in numeris exhibere volueris, eadem demonstratione ad plura exempla applicata, absque ulla molestia fit repetitio, quod idem agendo semper aliud agere tibi videris, quatenus numerorum diversitas varietatem quandam inducit.

§. 49. Cum repræsentatio demonstrationis in numeris non sit nisi ipsa demonstratio scientifica, seu generalis, ad exemplum aliquod, majoris perspicuitatis gratia, applicata; quemadmodum in Geometria demonstratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quæ singulare exemplum præbet; ideo in eadem acquiescere licet, nec opus est, ut iisdem signa universalia substituas; modo tibi caveas, ne in ratiocinia tacite invehas determinationes nonnullas, quæ insunt numeris assumtis, non vero hypothesi. Etenim tum demonstratio non succedit, nisi in eo casu, ubi istæ determinationes adsunt; consequenter tantummodo casum quendam particularem attingit, nec universaliter demonstratur, quod erat demonstrandum. Atque adeo contingere potest, ut, dum conclusio in casu particulari elicita habetur pro universali, in errorem incidas. Enimvero error hic præcavetur, modo probe consideres, num quod assumis, conclusionis inferendæ gratia, totum in hypothesi contineatur, aut per præparationem superaccedat, si præterea aliud quid sumitur, nulla habita ratione eorum, quæ numeris qua talibus insunt. Ita enim certum est, in omni exemplo alio ratiocinationem eodem modo procedere, nec argumentationem fieri ab eo, quod huic exemplo inest singulare, sed ab eo, quod cum omnibus aliis sub hypothesi contentis commune habet. Ex. gr. in exemplo nostro (§. 48), quoti 8 & 4, *num. I & II*, sunt numeri integri rationales. Ast principium, quo mediante hinc inferimus conclusiones, scilicet quod in omni divisione sit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad dividendum, satis ostendit, conclusionem inferri ex eo, quod 8 & 4 sint quoti

per divisionem duorum numerorum 24 & 12, per eundem tertium 3 prodeuntes, nec supponi quotum esse numerum integrum rationalem; consequenter nihil hypothesi superaddi, dum demonstratio ad exemplum aliquod singulare applicatur. Ceterum, quæ hic dicuntur probe notanda sunt, cum usum habeant etiam extra Mathesin, atque in partibus Matheseos mixtis, & in cognitione Naturæ mathematica, ubi majore circumspectione opus est, quam in Arithmetica: præsertim si theoria accurata nondum prostat, unde haurienda sunt principia demonstrandi; nec distinctis ratiociniis in demonstrando fueris adsuetus; qualia requirit nostra demonstrationum resolutio, earundemque symbolica repræsentatio, secundum leges animæ, naturali ordine ex hypothesi &c, quæ subinde eidem superaccedere debet, præparatione, tanquam ex fonte suo, profluentia, quemadmodum ex principiis Psychologiæ empiricæ demonstrari potest nullo negotio, modo ea habueris perspecta.

§. 50. Quoniam demonstrationis universalitati nil quicquam decedit, dum ad exemplum aliquod applicatur (§. 49); ab ejus repræsentatione in numeris facile abstrahitur demonstratio, qualem libro inseri convenit; si quæ assumuntur, & conclusiones quæ hinc inferuntur, verbis enuncientur, & conclusionibus adjiciantur citationes principiorum, quorum vi hæ inferuntur. Ita in casu dato (§. 48) talis prodit demonstratio: Quoniam quoti ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultant, per hypothesin; quilibet eorum est ad quantitatem divisam ut unitas ad tertiam, quæ utramque dividit (§. 174 *Arithm.*); consequenter quoti ad quantitates divisas eandem habent rationem (§. 167 *Arithm.*). Sunt igitur inter se ut quantitates divisæ (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

§. 51. Quodsi problema aliquod demonstrandum est; notandum idem converti in theorema, sumta resolutione cum datis tanquam hypothesi, & eo, quod fieri debet, tanquam thesi. Ex. gr. Problema de ducenda linea alteri parallela, per punctum extra ipsam datum, adhibita resolutione prima, quam superius exempli loco produximus (§. 27), in hoc theorema convertitur: Si ex puncto, extra lineam dato, demittatur ad lineam datam perpendicularis; & ex puncto alio intra eandem pro arbitrio assumto, erigatur perpendicularis altera eidem æqualis: recta per punctum datum & extremum perpendicularis alterius transiens est lineæ datæ parallela.

§. 52. Ubi problema in theorema fuerit conversum, resolutio demonstrationis eodem modo absolvitur, quo in demonstrationibus theorematum resolvendis usi sumus (§. 38, 41 & 47). Sit ex. gr. resolvenda demonstratio problematis, quod modo ad theorema revoca-

revocavimus (§. 51); demonstratio ita procedit. Recta VK, ex puncto V extra lineam RS dato, ducta est ad eandem perpendicularis; recta TA, ex puncto T intra rectam RS pro arbitrio assumta, est itidem ad eandem perpendicularis, alterique perpendiculari VK aequalis, per constructionem seu resolutionem; adeoque perpendicula, inter rectam datam RS & rectam per punctum V & A ductam intercepta, VK & TA aequalia sunt. Enimvero si perpendicula inter duas lineas intercepta aequalia sunt, lineae istae sunt parallelae (§. 226 *Geom.*). Linea igitur, ducta per punctum datum V & extremum A alterius perpendicularis TA, est parallela lineae datae RS. *Q. e. d.* Videmus adeo ex iis, quae constructio, juxta resolutionem problematis facta, suggerit, unico syllogismo inferri, quod demonstrandum erat: quae ratio est, cur nullam in contextu demonstrationem adjecerimus, sed tantummodo citationem principii, vi cujus ex constructione infertur, quod erat demonstrandum, nempe parallelismus linearum RS & MN.

Tab. I. Fig. 5.

§. 53. Symbolica demonstrationis hujus repraesentatio nihil prorsus difficultatis habet. Etenim non alia re opus est, quam ut repraesentationi symbolicae resolutionis supra datae (§. 27) adscribas data ex repraesentatione problematis symbolica, & ad summum adjicias propositionem ex iisdem formatam; prouti hic factum esse vides:

Hypothesis.	*Thesis.*
Recta RS data,	MN paral. RS.
Punctum V extra eam datum,	
VK perpendicularis ad RS,	
T punctum pro arbitrio assumtum,	
TA=VK,	
MN transiens per V & A.	

Demonstratio.

VK & TA perpendicula inter MN & RS,
atque VK=TA.

MN parallela ipsi RS. *Q. e. d.*

§. 54. Quoniam demonstratio problematis, quod exempli loco in medium protulimus (*§.* 51 & seqq.), perbrevis est, utpote quae nonnisi unico syllogismo constat; non inconsultum videtur addere exemplum adhuc aliud. Sumamus itaque problema 33 Geometriae de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Sunt itaque data rectae duae AB & BE; Tab. I. quaesitum est recta BD media pro- Fig. 10. portionalis inter AB & BE. Resolutio jubet rectas AB & BE jungi in directum, ut prodeat recta AE; super AE describi semicirculum ADE: & ex B erigi perpendicularem BD semicirculo in D occurrentem; quae esse dicitur media proportionalis inter AB & BE. Quodsi ergo problema demonstrare volueris, resolutione in hypothesin versa & propositione pro thesi sumta; sequens prodit theorema. Si super recta AE describatur

 semi-

ſemicirculus, & ex puncto quocunque diametri B erigatur perpendicularis BD ſemicirculo in D occurrens; erit ea inter ſegmenta diametri AB & BE media proportionalis.

§. 55. Quodſi jam hoc theorema demonſtrare volueris, præparatio accedere debet. Ducantur itaque rectæ AD & DE, chordæ arcus ſemicirculi cognomines ſubtendentes, ut prodeant triangula ADB, BDE & ADE. Quo facto demonſtratio ita reſolvitur. Sumimus ex conſtructione: Recta BD perpendicularis eſt ad AE. Hoc ubi perpendis, definitio perpendicularis lineæ ſuggerit hoc principium (§. 78 *Geom.*): Si linea recta fuerit ad alteram perpendicularis, anguli, quos cum ea efficit, recti ſunt & æquales (§. 79 *Geom.*). Unde infertur angulos *m* & *n* eſſe rectos & æquales. Porro rectæ AD & DE ſemicirculum ſubtendunt, vi præparationis & AE diameter circuli eſt, per conſtructionem. Unde patet, quod ADE ſit angulus in ſemicirculo. Huc ſi animum advertis ſuccurrit theorema (§. 317 *Geom.*): Angulus in ſemicirculo rectus eſt. Unde infertur: angulus ADE ſeu $o+x$ rectus eſt. Eſt vero etiam angulus *m* rectus, per demonſtrata. Quamobrem, ſi angulum *m* ad angulum $o+x$ referas, ſuccurrit principium (§. 145 *Geom.*): omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt. Unde infertur: angulus *m* trianguli ADB eſt æqualis angulo $o+x$ trianguli ADE. Enimvero angulus *y* utrique triangulo ADB & ADE communis eſt, atque adeo duo in hiſce triangulis anguli æquales ſunt. Memoria ſuggerit, ſiquidem anteriora eidem mandaveris, quemadmodum fieri debet, adeoque hic ſupponitur: Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius (§. 246 *Geom.*). Hinc itaque colligitur angulum *o* in triangulo ADB eſſe æqualem angulo *z* in triangulo ADE. Quodſi jam angulos in triangulis ADB & DBE inter ſe confers, tum patet duos angulos *m* & *o* trianguli ADB eſſe ſigillatim æquales duobus angulis *n* & *z* alterius trianguli DBE. Succurrit itaque, ex anterioribus memoriæ probe infixis, principium: ſi duo anguli unius trianguli fuerint ſigillatim æquales duobus angulis alterius, triangula latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia habent (§. 267 *Geom.*). Hinc infertur, latera AB & BD in triangulo ABD eſſe proportionalia lateribus BD & BE in triangulo DBE, quorum ſcilicet illa opponuntur angulis *o* & *y*, hi vero angulis *z* & *x*, angulo *o* exiſtente æquali angulo *z* & angulo *y* æquali angulo *x*, per demonſtrata. Habemus adeo $AB : BD = BD : BE$. *Q. e. d.* Ita demonſtrationem reſolvimus, ut ſingula diſtincte enuncientur, quæ in notionibus continentur, quæ eandem abſolvunt, & præſentes animo

ejus

ejus esse debent, qui eadem convincitur.

Tab. I. Fig. 9. §. 56. Demonstratio problematis hujus symbolice ita repræsentatur.

Hypothesis.	*Thesis.*
AB recta data	BD recta quæsita.
BE recta data	AB:BD=BD:BE
AE diameter semicirculi	
ADE semicirculus	
AB, BE } Segmenta diametri	

Præparatio.

AD & DE chordæ semicirculum subtendentes.

Demonstratio.

I.

BD perpendicularis ad AE, *per constr.*

1°. m & n anguli recti & $m=n$

II.

AD & DE semicirc. subtendunt, *per præparat.*

AE diameter circuli, *per construct.* adeoque

ADE angulus in semicirculo.

2°. angulus $o+x$ rectus.

III.

ang. $o+x$ rectus, *per demonstr. num.* 2.

m rectus, *per demonstr. num.* 1.

3°. $o+x=m$

IV.

in △△ ADE & ABD

$o+x=m$, *per demonstr. num.* 3.

$y=y$

---

4. $z=o$.

V.

in △△ ADB & DBE

$m=n$, *per demonstrat. num.* 1.

$o=z$, *per demonstrat. num.* 4.

5°. $y=x$ &

AB : BD=BD : BE. *Q. e. d.*

§. 57. Atque adeo patet, inter demonstrationem theorematis & problematis nullam intercedere differentiam, modo problema in theorema convertatur, quemadmodum id fieri debere præcepimus (§. 51, 54). Et hoc pacto docuimus omnia, quæ observanda sunt ei, qui ad secundum cognitionis humanæ gradum adspirat. Unicum adhuc moneri consultum ducimus; scilicet quod ex resolutione demonstrationum pateat, cur propositiones pure enunciare debeamus, quas brevitatis gratia in contextu statim ad figuras retulimus, expositione cum propositione in unum confusa. Etenim ubi distincte ratiocinari volueris, quemadmodum exigit resolutio demonstrationis; necesse est ut propositiones singulæ pure enuncientur. Quamobrem etiam pure enunciatæ memoriæ mandandæ; cum alias applicatio, in casu dato, ob literarum figuris adscripta-

ſcriptarum diverſitatem, confundat, ut difficilis ac moleſta evadat. In addiſcenda igitur Matheſi morem veterum ſequi tenemur, ut primum propoſitionem unamquamque pure enunciemus, ac deinde eandem exponamus, ſeparata expoſitione a propoſitione, quando eidem immixta.

§. 58. Quodſi objicias, nos nihil dixiſſe de corollariis, quorum tamen bene multa in Elementis noſtris occurrunt: facilis eſt reſponſio. Corollaria enim ſunt propoſitiones, quarum veritas perſpicitur per definitionem, vel propoſitionem, cui ſubjiciuntur. Quoniam pleraque eorum demonſtratione indigent, quam per modum principii ingreditur definitio, vel propoſitio, cui ſubjiciuntur; quæ de reſolutione & ſymbolica repræſentatione propoſitionum diximus, ea quoque de corollariis tenenda. Nimirum propoſitio pure enuncianda, deinde exponenda, expoſita in hypotheſin & theſin reſolvenda, quarum utraque conſueto more ſymbolice repræſentata. Demonſtratio deinde, eodem modo reſolvenda, quo eandem in anterioribus reſolvimus, eodem etiam modo ſymbolice repræſentanda, quo eandem in anterioribus repræſentavimus. Nullis igitur peculiaribus præceptis hic opus.

§. 59. Ne quicquam in dictis ſuperſit obſcuri, exemplum aliquod ſuperaddere lubet. Sumamus itaque corollarium quartum theorematis 34 (§. 228 *Geom.*), quod revera eſt corollarium præcedentis tertii; cum non theorema ipſum, ſed ejus corollarium tertium ingrediatur demonſtrationem tanquam principium. Propoſitio in eodem contenta hæc eſt: *Si in triangulo rectangulo cathetus unus ſumatur pro baſi, erit alter altitudo.* Hæc propoſitio ita exponitur. Sit MKL triangulum, MK & KL catheti ejus. Dico ſi KL ſumatur pro baſi, Tab. I. fore MK altitudinem ejus. Hypo- Fig. 11. theſis adeo eſt quod triangulum MKL ſit rectangulum, MK & KL ſint catheti, & KL ſumatur pro baſi; theſis autem, quod cathetus MK ſit altitudo trianguli. Demonſtratio ita reſolvitur, ſi nihil perceptioni confuſæ tribuere, ſed ſingula ad notionem diſtinctam reducere volueris Figura MKL triangulum rectangulum eſt, per hypotheſin. Succurrit definitio 52 (§. 91 *Geom.*): In triangulo rectangulo angulus unus rectus eſt. Unde concluditur: In figura MKL angulus unus rectus eſt: Porro latera MK & KL ſunt catheti, per hypotheſin. Succurrit definitio 57 (*§. 96 Geom.*). Catheti trianguli rectanguli angulum rectum intercipiunt. Unde infertur. Angulus K rectus eſt. Studio utor ſyllogiſmo cryptico, quem a crypſi facile liberabit in Logica verſatus, tum quia ſyllogiſmi cryptici frequentiſſime ſua veluti ſponte ſeſe offerunt in demonſtrationibus, manifeſti autem

tem ſtudio quærendi; tum ut cryptſcos in ratiocinando idea animo ſeſe inſinuet profutura in Logica, ubi theoria ſyllogiſmorum crypticorum traditur. Ceterum hanc concluſionem, quam modo intulimus, unica etiam ratiocinatione colligere licet hoc modo: Angulum K in triangulo rectangulo MKL catheti intercipiunt, per hypotheſin. Angulus in triangulo rectangulo, quem catheti intercipiunt, rectus eſt. Ergo angulus K rectus eſt. Ex eo, quod angulus K rectus ſit, per immediatam conſequentiam infertur: Cathetum MK cum altero KL efficere rectum. Quodſi hanc concluſionem ſumas tanquam præmiſſam novi ſyllogiſmi, vi definitionis lineæ perpendicularis (§. 78 *Geom.*) ſuccurrit principium: Linea recta cum altera efficiens angulum rectum ad eandem perpendicularis eſt. Unde colligitur: Cathetus MK ad alterum KL perpendicularis eſt. Quodſi perpendas ex puncto M ad rectam KL ductam eſſe perpendicularem MK, ſuccurrit vi definitionis 47 (§. 85 *Geom.*) principium: punctum, ex quo perpendicularis ad rectam duci poteſt, eidem rectæ opponitur; quod ſcilicet ex definitione, animo obverſante per conſequentiam immediatam elicitur. Unde infertur: Punctum M catheto trianguli KL opponitur. Jam rectæ KM & LM in puncto M concurrunt ad formandum angulum KML, ut adeo M ſit vertex hujus anguli, quod per definitionem 26 (§. 54 *Geom.*) patet, nec demum per ratiocinia diſtincta elicere lubet. Hoc ubi perpendis, ac præterea ex hypotheſi ſumis quod KL ſit baſis trianguli, ſuccurrit definitio 74 (§. 114 *Geom.*): Vertex figuræ eſt vertex anguli baſi oppoſitus. Unde infertur: Punctum M eſt vertex figuræ ſeu trianguli MKL. Recordatus quod MK ſit ad KL perpendicularis, per demonſtrationem, hoc formas judicium: Cathetus MK eſt perpendiculum ex vertice trianguli M in baſin KL demiſſum. Quodſi denique huc animum advertis, ſuccurrit principium (§. 227 *Geom.*): Perpendiculum ex vertice figuræ in baſin ejus demiſſum eſt altitudo figuræ. Atque hinc tandem concludis: Cathetum MK eſſe altitudinem trianguli rectanguli MKL.

§. 60. Quodſi hanc demonſtrationem ſymbolice repræſentare volueris, hoc modo id fieri debere, ex anterioribus abunde liquet.

Hypotheſis.	*Theſis.*
MKL △ rectangulum,	MK altitudo,
MK & KL catheti,	
KL baſis,	

Demonſtratio.

I.

MKL △ rectangulum, *per hypotheſin.*

1°. In △ MKL angulus unus rectus

II.
MK & KL catheti △ rectanguli MKL, *per hypoth.*

---

2. Angulus K rectus.

III.
MK cum KL efficit rectum, *per demonstr. num.* 2.

---

3. MK ad KL perpendicularis.

IV.
MK ad KL perpendicularis, *per demonstr. num.* 3.

---

4. M opponitur ipsi KL.

V.
M vertex anguli KML, *quod patet intuitive.*

---

5. M vertex △ MKL

VI.
M vertex △ MKL, *per demonstr. num.* 5.
MK perpendicularis ad KL, *per demonstr. num.* 3.
KL basis, *per hypothesin.*
adeoque
MK perpendiculum ex vertice M in basin KL demissum.

MK altitudo △ rectang. MKL.

§. 61. Insunt resolutioni demonstrationis præcedentis, quæ attentionem merentur. Nimirum quando per notiones confusas clare perspicimus, quæ distincte cognoscenda ratiociniis inferenda, saltum in ratiocinando committimus: qui quando admitti possit citra lapsus periculum, ex resolutione confuse perceptorum in ratiocinia patet. Quodsi integram Arithmeticam & Geometriam eo modo pertractare libuerit, quem præscripsimus & exemplis illustravimus, vix quicquam in theoria Logicæ occurret, cui non lux affundatur. Ipsa quoque resolutio demonstrationis corollarii, quam modo in medium attulimus, clarissime docet, cur in definiendo fuerimus prolixiores, quam vulgo fieri solet, & cur multa demonstraverimus principia, quorum nullus in Elementis Geometriæ locus esse solet. Etenim, omissis istis definitionibus atque principiis, in demonstrationibus saltus in demonstrando committuntur, nec distinctam hujus notionem consequi datur, ubi nunquam, quæ per notiones confusas clara putantur, distinctis ratiociniis inferuntur. Equidem non nego tyronibus initio studii mathematici molestum esse hunc rigorem, immo superfluum videri, propterea quod demonstratione non indigere existimant ea, quæ absque demonstratione vera intelliguntur; non tamen hinc sequitur, rigorem istum sua carere utilitate. Quamvis adeo, initio studii mathematici, in gratiam tyronum, ab eo tantisper sit recedendum, in progressu tamen non negligendus. Ea de causa in Elementis Germanicis multa non definivimus, quæ in Latinis definiuntur.

niuntur; multa sine demonstratione sumimus in illis, quæ in hisce demonstrantur. Nec hoc fecimus sine prægnantibus rationibus, quæ manifestæ evadent per ea, quæ capite sequente dicentur. Non defuere, qui tantum definitionum & principiorum demonstratorum apparatum improbarunt; immo autores nobis fuere, ut in nova editione resecaremus, quæ ipsis superflua videbantur, propterea quod evidentes sint demonstrationes, absque illis definitionibus & absque principiorum istorum demonstrationibus. Enimvero si nostram demonstrationum resolutionem viderint & ex sequentibus consilium intellexerint, quo id fecimus; non dubitamus fore, ut aliud sit ipsorum judicium.

§. *62*. Probe autem notandum est, tum demum demonstrationes esse naturales, seu ordinatas, & completas, adeoque consummatas, quales in Logica requirimus (§. *799*, 854, 855 *Log.*), si eo modo resolvantur, quem præscripsimus, ut plenaria oriatur convictio, nec quicquam quoad evidentiam desiderari possit. Et qui in Psychologia empirica satis fuerit versatus, ex principiis ibidem traditis, demonstrabit, tum demum facultatum animæ in cognoscendo rectum fieri usum, ubi demonstrationes eo modo expenduntur, quo easdem resolvere docuimus. Nec minus patebit, in demonstrando tum cum fieri facultatum cognoscendi usum, quem in communi cogitationum sese mutuo excipientium serie observamus.

§. *63*. Nos in Elementis nostris demonstrationes eo ordine digessimus, ut in ratiocinia ex hypothesi & superaccedente præparatione, si quando opus est, deducta & inter se concatenata facile resolvi possint. Etenim conclusiones eo ordine sese invicem excipiunt, quæ in repræsentatione symbolica exhibentur, & iis adjiciuntur citationes, quibus insinuantur principia, quæ in resolutione commemorantur. Sumuntur etiam, ex hypothesi &, in demonstrationibus problematum, ex constructione unde infertur conclusio, immo etiam ex demonstratis, conclusiones; nisi immediate ingrediantur ratiocinium proxime sequens, ut eandem bis poni inconsultum foret. Saltus si quos admittimus, quemadmodum in corollario, quod exempli loco modo adduximus, tales sunt, ut, nisi acutior fueris in demonstrando, eos non animadvertas, quod oculis in schema conversis per se clara videntur; veluti quod M sit vertex trianguli, quod MK & KL intercipiant rectum K. Nullum vero in demonstrationibus nostris deprehendes hiatum, ut omitterentur quædam, quæ ad formanda ratiocinia sunt necessaria, & sine quibus singula, quæ ad demonstrationem requiruntur, formari nequeunt: qui ipse hiatus demonstrationem reddit incom-

pletam (§. 854 *Log.*). Enimvero exactam hanc formam logicam naturæ animæ convenientem, quemadmodum ex Psychologia constat, demonstrationibus vulgo non tribuunt autores: unde eadem facilitate non resolvuntur in ratiocinia, ex quibus constant, nec symbolice eo modo absque difficultate repræsentantur, quo nos easdem exhibere docuimus. Quamobrem, ex nostris quoque Elementis, Mathesis minore studio atque minore temporis intervallo addisci potest, quam ex aliorum scriptis; & si qua sphalmata, vel typographi incuria, vel festinante scribentis calamo, irrepsere, ea attentione adhibita haud difficulter corriguntur.

§. 64. Vulgo demonstrationes non eo modo expenduntur, quo nos eas resolvere docuimus. Immo ipse, cum Mathesi addiscendæ operam darem, aliam viam ingressus sum, donec tandem studium philosophicum cum mathematico conjungens & in rationem evidentiæ anxius inquirens, in veram inciderem. Nimirum vulgo animum primo convertimus in conclusionem quam contextus suggerit, & deinde inquiritur in rationem, cur ea tanquam vera sit admittenda, quæ vel ex hypothesi, vel ex definitione, aut propositione quadam anteriore petita, & cum schemate oculis subjecto collata, attento vim consequentiæ confuse percipiendam exhibet, nullo ratiocinio distincte formato. Ex. gr. Si quis demonstrationem theorematis 6 (§. 156 *Geom.*) expendere voluerit, is conclusiones $x+y$ & $y+o=180$ confert cum figura, ut intelligat, quid affirmetur. Tab. I. Fig. 9. Quærit deinde, cur hæc propositio sit vera; & §. 148, qui citatur, evolvens, ubi legit angulos deinceps positos junctim sumtos conficere 180 grad., recurrit ad figuram, ex qua ubi confuse percipit, angulos y & x, itemque o & y esse deinceps positos, duas istas conclusiones admittit tanquam veras. Deinde recordatur, quod demonstrandum sit, angulos o & x esse æquales, hanc conclusionem cum illis confert, oculis in figuram conjectis. Et ubi videt, eos relinqui, si angulus communis y auferatur, theorematis veritatem admittit; cur hoc faciat quæsitus, respondens, quia ab æqualibus idem aufertur, seu particulariter, quia angulus communis y aufertur; axioma istud, quod eodem ab æqualibus ablato æqualia relinquantur, nonnisi confuse sibi repræsentans. Unde audias alios respondentes, hoc per se patere. Solenne enim est hominibus, ut per se liquere dicant id, quod per confusas perceptiones verum apparet, cur vero verum sit rationem reddere nequeunt. Admittuntur hinc saltus & hiatus in demonstrando, quæ, initio studii mathematici, subinde haud parum obstant evidentiæ ad plenariam convictionem requisitæ, antequam con-

fuſis iſtis ratiocinationibus adſueſcas, ut familiaritas ſuppleat defectum evidentiæ.

§. *65*. Quid interſit diſcriminis inter noſtram demonſtrationum reſolutionem, & communem eas expendendi morem; in ſeipſo experietur, qui initio ſtudii mathematici utramque viam ingreditur. Magis autem idem animadvertet, ubi in philoſophia noſtra verſatus, utrumque modum expendendi demonſtrationes inter ſe confert. Quam diverſi autem ſint fructus, quos hinc percipere datur, ex capite ſequente eluceſcet. Dicta igitur de ſecundo cognitionis gradu acquirendo ſufficiant.

§. 66. Reſtat ut dicamus de tertio cognitionis gradu, quomodo ad eum perveniatur, quantum hic datur. Tertius cognitionis gradus in eo conſiſtit, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio marte eruere valeamus (§. 1). Si quis demonſtrationes noſtra methodo reſolvit; is modum colligendi ex aſſumtis quæſitum, continuo ratiociniorum nexu, inde perſpicit (§. 38, 41, 47, 52, 54, 59). Quodſi ergo habitum reſolvendi demonſtrationes præſcripto modo ſibi comparaverit; habitu ratiocinandi pollet, quo in veritatibus ſibi adhuc incognitis eruendis opus habet. Quamobrem iſta demonſtrationum reſolutio maximopere quoque commendanda eſt, in uſum tertii cognitionis gradus; ita ut ad tertium appropinquemus, dum ſecundo acquirendo ſtudemus. Et qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat, is multus eſſe debet in demonſtrationibus reſolvendis; cum omnis habitus non modo acquiratur, verum etiam perficiatur, augeatur, & conſervetur continuo exercitio (§. 430, 431 *Pſych. empir.*). Quamobrem cui tertius cognitionis gradus curæ cordique eſt, is acquieſcere non debet in Elementis Arithmeticæ & Geometriæ, ſed ad alias quoque Matheſeos partes progredi tenetur.

§. *67*. Si ex aſſumtis ratiocinando, colligendum eſt quod in theſi continetur; ipſa reſolutio demonſtrationis, præſcripto modo facta, loquitur, non opus eſſe ut hoc tanquam cognitum præſupponatur. Quamobrem, ſub generali tantummodo determinatione ſupponi poteſt tanquam quærendum. Unde theoremata convertere licet in problemata, quæ, ſub data in hypotheſi conditione, inveſtigari jubent, quod theſis continet. Ita theorema de æqualitate angulorum verticalium (§. 38) in hoc convertitur problema: Invenire rationem angulorum verticalium ex interſectione duarum linearum rectarum prodeuntium. Similiter theorema de congruentia triangulorum angulum æqualem cruribus æqualibus comprehenſum habentium (§. 40) in ſequens abit problema: Invenire rationem triangulorum

rum angulum unum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentium; & rationem, quam habent anguli duo reliqui unius ad duos reliquos alterius sigillatim; necnon latus tertium unius ad latus tertium alterius. Theorema arithmeticum, de quotis, ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultantibus, quantitatibus divisis proportionalibus (§. 47) in hoc problema transmutatur: Invenire rationem quotorum, qui prodeunt, si duæ quantitates per eandem tertiam dividuntur. Denique corollarium, quod, catheto uno trianguli rectanguli sumto pro basi, cathetus alter sit altitudo (§. 59) ad problema redigitur hoc modo: sumto catheto uno trianguli rectanguli pro basi; invenire, aut determinare altitudinem ipsius. Discere hinc licet, quomodo quod jam inventum est spectetur ut adhuc inveniendum, & instar problematis proponatur ad exercendam artem inveniendi. Sane omnia theoremata, non modo in Arithmetica atque Geometria, verum etiam in omni Mathesi reliqua, hoc modo ad problemata rediguntur, quæ tanquam inveniendum proponunt, quod jam cognitum est, dum exercitii gratia tanquam adhuc incognitum supponitur.

§. 68. Quodsi theoremata ad formam problematum fuerint reducta, quibus aliquid inveniendum proponitur; data a quæsitis sunt distinguenda. Quoniam in hac conversione aut, si mavis, reductione; quæ in hypothesi continentur, sumuntur tanquam data; quod vero in thesi continetur, sub determinatione quadam generali, exhibet quæsitum; data & quæsita eodem prorsus modo a se invicem distinguuntur, quo superius thesin ab hypothesi separavimus. Ita, in exemplo primo angulorum verticalium, dari supponimus duas lineas sese mutuo intersecantes, ex quarum intersectione necessario oriuntur anguli verticales; quæritur autem, quænam sit horum angulorum ratio ad se invicem. In thesi theorematis, determinatur ratio, quæ inter eos intercedit, nimirum quod sit ratio æqualitatis. Ast hic qualis ea sit, ignotum supponitur & investigari jubetur. In exemplo secundo de congruentia triangulorum, datur in duobus triangulis ratio, quam habet angulus unus unius a ad unum alterius A, ratio crurum $a\ b$ ad AB & $a\ c$ ad AC, nempe quod ubivis sit ratio æqualitatis, seu $a = A$, $ab = AB$ & $ac = AC$: quæritur autem ratio lateris tertii $a\ b$ ad AB, anguli b ad B, anguli c ad C & totius trianguli $a\ c\ b$ ad totum ACB. Immo quæri etiam potest, utrum triangulum $a\ c\ b$ sit simile, an dissimile triangulo ACB. In thesi theorematis, denuo determinatur ratio horum omnium ad se invicem, qualis sit; scilicet quod sit ratio æqualitatis, seu $b\ c = BC$, $b = B$, $c = C$ & $\triangle\ a\ c\ b = \triangle\ ACB$. Hic vero

Tab. I. Fig. 6.

vero eadem tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. In exemplo tertio, quod arithmeticum est, dantur duæ quantitates, datur quantitas tertia, per quam istæ dividendæ, ut duo prodeant quoti; quæritur ratio, quam habent quoti hi ad se invicem. In thesi theorematis eadem determinatur, nimirum quod eadem sit cum ratione quantitatum divisarum; sed hic tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. Denique in exemplo quarto, datur species trianguli MKL, nimirum quod sit rectangulum, datur etiam basis, scilicet quod ea sit cathetus KL; determinari jubetur altitudo. In theoremate seu corollario, quod in problema conversum fuit, altitudo determinatur, nimirum quod ea sit cathetus alter MK: hic vero demum quæritur. Videmus adeo, quomodo data a quæsitis distinguantur.

§. *69*. Enimvero non sine ratione data a quæsitis discernuntur. Cum enim id, quod quæritur, per ea quæ dantur, determinetur; ex datis ratiocinando colligendum est quæsitum. Facimus hoc, dum demonstrationem nostro more resolvimus; neque enim in omni ratiocinatione supponitur tanquam cognitum, quod inde tandem colligitur, quando ratiocinatio finitur. Quamobrem patet, ad inveniendum quod quæritur, non aliud requiri, quam ut modo præscripto ratiocinemur. Nostræ igitur resolutiones demonstrationum totæ analyticæ sunt; ostendentes modum, quo ex datis colligitur quæsitum, seu ratiocinando pervenitur ad id, quod investigandum erat. Eædem adeo non minus ad tertium cognitionis gradum ducunt, quam ad secundum: id quod non obtinet, ubi communi more demonstrationes expenduntur (§. *64*). Insigne hic patet discrimen, quod inter nostras demonstrationum resolutiones, & communem eas expendendi modum intercedit; tanti æstimandum, quanto præstantior est gradus cognitionis tertius, quam secundus. Velim huc animum advertant illi, quibus nostræ demonstrationum resolutiones superfluæ, aut prorsus pueriles videntur. Quodsi exemplum Mathematicorum præclarorum obvertere volueris, qui ad artem eximia inveniendi pervenerunt absque ista demonstrationum resolutione; hoc parum nos movebit. Objectionem enim esse nullam capite sequente ostendemus. Absit itaque ut hoc exemplo ab ista, quam commendavimus, demonstrationum resolutione te deterreri patiaris.

§. 70. Ex iis, quæ diximus & per anteriora satis manifesta sunt, liquet, quantum fallantur, qui sibi aliisque persuadere conantur, quod demonstrationes syntheticæ, quales sunt EUCLIDIS, atque Geometrarum veterum, non simul sint analyticæ; consequenter veritates eodem

modo

modo ab ipsis reperiri non potuerint, quo demonstrantur. Etenim, si ex assumtis legitime ratiocineris, quemadmodum fieri debere ex principiis Psychologiæ empiricæ demonstrari potest; eodem prorsus modo colligitur quod ignotum est, & ad investigandum proponitur, quo, quod jam notum est, demonstratur. Dedimus fidem oculatam, quæ in suspicionem adduci minime potest. Memini me olim, cum in Academia Lipsiensi Mathesin atque Philosophiam docerem, antequam ad Professionem Mathematum in Academia Halensi vocarer, Artem inveniendi juxta regulas Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* explicatam, per exempla exerciturus, Geometriam elementarem ea methodo pertractasse, ut theoremata ad problemata revocarem, & quomodo ex assumtis in hypothesi, tanquam datis, eruatur quod in thesi continetur, tanquam quæsitum, ostenderem, ipsaque problemata tanquam nondum soluta, sed adhuc solvenda proponerem, idemque imitarer in Arithmetica. Unde contigit in Elementis Germanicis Arithmeticam practicam a me pertractari methodo vere analytica; ut ex unica notione numeri rationalis, qui juxta definitionem EUCLIDIS, sistitur tanquam unitatum multitudo, nimirum, juxta methodum geneticam, tanquam ortus ex continua unitatis additione, integram Arithmeticam practicam deduxerim, tyronum captui accommodato modo: quod tantisper attent ifacile animadvertent; iis autem satis superque perspectum est, qui me eandem explicantem audiverunt. Dedimus etiam hinc inde specimina quædam in his ipsis Elementis Latinis, veluti ubi de extractione radicum, & numeris æque-differentibus agitur.

§. 71. Ex resolutione demonstrationum præscripto modo facta, præterea videre est, singula ratiocinia, quibus colligitur quod demonstrandum erat, aut, ubi theorema in problema mutatur, quod investigandum fuerat, supponere aliquam definitionem, vel propositionem jam cognitam, quæ, vel ope ejus quod assumitur, seu datur, vel auxilio conclusionum jam elicitarum, in memoriam revocatur. Patet etiam ne unicum quidem ratiocinium abesse posse, siquidem ex assumtis inferendum, quod demonstrandum, vel ex datis deducendum, quod investigandum erat. Etsi enim non omnes ratiocinia distincte expendant; in confusis tamen ipsorum notionibus, quæ animo obversantur, actu continentur. Quælibet adeo veritas latens, ubi in apricum producenda, certas veritates cognitas supponit, quarum si vel una ignoratur, ut quæsitam invenias fieri nequit. Quo plures igitur veritates, hoc est, definitiones & propositiones, tibi perspectæ fuerint, eo plures quoque invenire poteris; cum

abun-

abundes principiis, quibus ad ratiocinandum indiges, ex datis inventurus quæsitum. Quamobrem dum secundo cognitionis gradui acquirendo studes, ad tertium quoque acquirendum te præparas, immo aptum reddis. Qui inoffenso pede, in detegenda veritate latente ex iis quæ dantur, progredi voluerit; ei principia, quibus ad ratiocinandum opus habet, familiaria esse debent; ut ea, veluti sponte sua memoriam subeant, quoties eorum usus requiritur. Definitiones itaque, & propositiones, in quarum etiam numerum referuntur resolutiones problematum, cum eo quod fieri jubetur in theorema conversæ, memoriæ firmiter infigendæ sunt ei, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut multus esse debeas in acquirendo gradu primo, antequam ad tertium properes; nisi quod expediat ea, quæ demonstrationum vi tanquam vera assecutus es, tanquam invenienda tibi proponi (§. 67): ita enim tanto facilius & absque ulla molestia, immo potius cum insigni voluptate, memoriæ mandabis, quæ eidem firmiter inhærere debent, ac una cum gradu secundo tertium acquires.

§. 72. Demonstrationes etiam mechanicæ ad tertium cognitionis gradum ducunt; quatenus tentando manifestant incognitum (§. 32): quibus cum æquipolleant exempla in numeris (§. 35), horum etiam usus est in tertio cognitionis gradu comparando. Quoniam tamen demonstrationes mechanicæ, perinde ac exempla (§. *cit.*), veritatem conspiciendam non præbent, nisi in casu singulari, aut ad summum in particulari (§. 33); in iis non acquiescendum, ne cum periculo errandi a singulari ad universale argumenteris. Quamobrem propositio in casu singulari, vel particulari, detecta sumi debet tanquam universalis, & in problema convertenda; ac deinde inquirendum, num, ex datis legitime ratiocinando, universaliter erui possit, quod in casu singulari, vel particulari, verum cognovisti. Ita constat olim PYTHAGORAM animadvertisse, si quadratum numeri 3, quod est 9, addatur quadrato numeri 4, quod est 16, summam 25 exhibere quadratum numeri 5. Quamobrem cum perpenderet, si latus unum trianguli rectanguli fiat trium, alterum vero quatuor partium, hypothenusam esse partium quinque; consequenter quadratum hypothenusæ æquale esse quadratis reliquorum laterum; suspicio ipsi enata est, num hæc sit proprietas trianguli rectanguli, ut quadratum hypothenusæ sit æquale quadratis laterum simul sumtis. Non diffiteor levem admodum hanc esse suspicionem, si secundum regulas probabilitatis æstimetur; sed levis etiam suspicio ad investigandum verum invitat. Quamobrem ubi super trianguli rectanguli lateribus fuere constructa quadrata, superacceden-

cedente præparatione ad comparationem quadrati hypothenusæ cum quadratis reliquorum laterum requisita, eo modo detegi poterat veritas, quo theorema istud demonstravimus (§. 417 *Geom.)*. Dico veritatem theorematis hoc modo detegi potuisse: cum enim constet, ipsum non uno modo demonstrari posse, & demonstrationem unamquamque, nostro more resolutam, monstrare modum ad veritatem liquidam perveniendi (§. 70), non una patebat ad eandem via. Demonstrationes itaque mechanicæ, si tanquam artificium heuristicum adhibeantur, haud raro faciunt, ut de problemate quodam cogites, cujus cogitatio alias animum non subiret.

Tab. I. Fig. 5. §. 73. Exempla, quæ in superioribus dedimus, dicta confirmant. Ita si ducas lineas AB & CD se mutuo secantes in E, ut prodeant anguli verticales *o* & *x*; ac, vi demonstrationis mechanicæ, eorum æqualitatem deprehendas (§. 32); ubi porro sumis æqualitatem angulorum verticalium tanquam universaliter veram, & hoc theorema in problema convertis (§. 67), eodem modo eruetur veritas in omni casu, quo theorema hoc demonstrandum esse ostendimus (§. 38, 70). Similiter si construas triangulum quodcunque ACB, Tab. I. Fig. 6. & deinde alterum *acb*, ea conditione, ut fiat *ab* = AB, angulus *a* = A, & *ac* = AC; atque triangulo *acb* exciso ex charta, in qua delineatum fuerat, ita ponas super altero ACB, ut punctum *a* in A, & latus *ab* in AB cadat; atque videas, triangulum *acb* esse alteri ACB æquale, & esse præterea *bc* = BC, *c* = C, atque *b* = B; ubi hoc sumis tanquam universaliter verum, & theorema in problema convertis (§. 67), eodem prorsus modo ratiocinando assequeris, quod quæritur, quo theorema demonstrandum esse supra præcepimus (§. 41, 70). Me tacente patebit, quomodo eadem valeant de exemplo, quod in numeris exhibet theorema, de quotis, ex divisione duorum numerorum per eundem tertium resultantibus, numeris divisis proportionalibus; ut plura eam in rem dici non sit opus. Obiter observo, demonstrationem mechanicam de congruentia triangulorum, ubi ad notionem congruentiæ animum advertis, simul insinuare principia, quibus opus est ad ratiocinandum, sive in demonstratione synthetica, sive in investigatione ejus, quod quæritur; ut adeo idea confusa, quæ oculis obversatur, integram demonstrationem contineat, ab ea abstrahendam, si ad notionem distinctam revocetur. Immo notionem theoremati respondentem esse universalem agnoscimus, si in rationem coincidentiæ eorum, quæ in triangulis discernuntur, inquirimus; quatenus patet eandem rationem redire in quolibet casu. Coincidit hic demonstratio mechanica cum exemplis, quibus univer-

ſaliter repræſentavimus numerorum quadratorum & cubicorum geneſin (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*). Ex. gr. in exemplo numerico, 16 quadratum numeri 4, quæ eſt pars ſecunda radicis, prodit, quia 4 ducitur in ſeipſum (§. 246 *Arithm.*). Idem vero cum fiat in quocunque exemplo alio, eadem quoque ſemper adeſt ratio, cur quadratum partis ſecundæ prodire debeat. Similiter in exemplo geometrico, punctum *b* cadit in B, quia *a* ponitur ſuper A, & *ab* ſuper AB, eſtque *ab*=AB. Singula vero cum eodem modo ſeſe habeant in exemplo quocunque alio, eadem ſemper adeſt ratio, cur punctum *b* in B cadere debeat. Principium nimirum ontologicum eſt, quod poſita ratione ſufficiente ponatur etiam id, quod propter eam potius eſt quam non eſt (§. 118 *Ontol.*): quod principium in Arte inveniendi multum habet uſum.

§. 74. Conſtat ex ſuperioribus (§. 40), hypotheſin ſolam non ſemper ſufficere, ut inde colligatur, quod erat demonſtrandum; ſed præterea accedere debere præparationem, qua ſuperadduntur iis, quæ in hypotheſi ſumuntur, adhuc alia, eadem non invita ſumenda, ut ex ſumtis colligi poſſit, quod theſis continet. Quoniam theorematis in problemata converſis, quibus inveſtigandum proponitur, quod theſis inſinuat (§. 67); ratiocinatio, ex aſſumtis tanquam datis, eodem modo cedit ad colligendum quæſitum, quo, in reſolutione demonſtrationis præſcripto modo facta, colligitur quod demonſtrandum erat (§. 70); facile intelligitur, præparatione eadem non minus opus eſſe in veritate inveſtiganda, quam in jam inventa demonſtranda. Quando præparatione opus ſit, quivis animadvertit; nimirum, quando animum advertens ad aſſumta, deprehendit deeſſe principia, quorum vi ex iis elicitur concluſio una, vel plures eliciuntur, prout caſus tulerit. Hic itaque diſpiciendum num, præter ea quæ hypotheſis continet tanquam determinantia id quod theſi continetur, ſumi adhuc poſſint alia iſtis minime repugnantia; quibus accedentibus, hypotheſis apta efficitur ad concluſiones, vi principiorum anteriorum, inde inferendas. In demonſtrationibus præparatio iſta non demum quærenda; ſed Autor, qui theorema demonſtrat, eam ſuppeditat. Aſt ubi theorema per modum problematis proponitur; præparatio non tanquam cognita ſpectari poteſt, ſed adhuc incognita ſupponitur; non tanquam jam inventa conſideranda venit, ſed tanquam quærenda ſpectatur. Ad tertium igitur cognitionis gradum adſpirans inquirere tenetur, quomodo præparatio innoteſcere potuerit. In exemplo de triangulis, angulum æqualem æqualibus cruribus comprehenſum habentibus, conſtat, datis cruribus cum angulo intercepto, conſtrui poſſe

 trian-

triangulum; consequenter per crura data & angulum interceptum datum triangulum, non minus integrum, quam latus ejus tertium, eidemque adjacentes duos angulos reliquos determinari; adeoque in hypothesi nihil eorum deficere, quæ assumenda sunt, ut inde colligi queant, quæ per ea determinantur. Quoniam vero quæritur triangulorum ratio, ratio lateris tertii unius ad tertium alterius, & ratio angulorum ad idem adjacentium in uno ad angulos eidem adjacentes in altero sigillatim; ratio vero omnis vel æqualitatis vel inæqualitatis est (§. 130 *Arith.*); per modum hypotheseos tantisper sumitur, rationem æqualitatis hic obtineri. Hæc hypothesis cum examinanda sit, utrum veritati consentanea sit, nec ne; quæritur quomodo æqualitas innotescat. Quamobrem, cum, juxta notionem communem, æqualitas æstimetur ex congruentia, notio congruentiæ insinuat triangulum unum super altero poni debere. Atque adeo in præparationem incidimus. Vides adeo, quomodo notiones communes insinuare queant præparationem: id quod tamen non semper procedit, cum non omnia ex notionibus communibus immediate deduci possint.

§. 75. Quoniam tamen, per naturam animæ impossibile est, ut quicquam nobis in mentum veniat, nisi quatenus antea cognita, beneficio eorum quæ nunc cogitamus, vel in memoriam revocantur, vel ratiocinationem ingrediuntur; quæ ex notionibus communibus immediate deduci nequeunt, ex aliis utique notionibus derivanda. Quamobrem ut hoc appareat, sumamus exemplum alterum, quo usi sumus in superioribus (§. 54) in demonstratione problematis, de invenienda media proportionali inter duas rectas datas, in hoc theorema conversi: Si ex quocunque puncto diametri excitetur perpendicularis peripheriæ circuli occurrens, erit ea inter segmenta diametri perpendicularis. Patet hic demonstrandam esse proportionem linearum AB, BD & BE ex eo, quod BD sit ad AE perpendicularis & ADE semicirculus. Tab. I. Fig. 10. Quamobrem cum constet, triangula similia habere latera æqualibus angulis opposita proportionalia; consequenter linearum proportionem ex triangulorum similitudine colligi posse; ideo liquet, dispiciendum esse, annon lineis quibusdam ductis, ut prodeant triangula, obtineri possint triangula similia. Ducuntur itaque subtensæ arcuum AD & DE; quia sic prodeunt triangula ADB, ADE & DBE, quæ, per modum hypotheseos, sumuntur tanquam similia, ab eo qui veritatem demum investigat; & deinde experimur, num eorum similitudo demonstrari possit; consequenter num hæc bene sumta fuerit. Quodsi modum, quo in hanc præparationem incidis, distincte perpendis; evidens est, id quod demon-

strans

ſtrandum eſt ad animum revocare ſimilitudinem triangulorum, cujus notionem antea tibi acquiſiviſti; & ex hypotheſi theorematis patet, ductis rectis AD & DE, obtineri triangula, quæ utrum ſimilia ſint, nec ne, angulos eorum inter ſe conferenti innoteſcit; cum ex anterioribus conſtet, triangulorum ſimilitudinem ab æqualitate angulorum pendere; conſequenter per eandem probari. Nimirum in inveniendo conjecturis locus eſt; ubi ex iis, quæ dantur, vi principiorum tibi perſpectorum, ratiocinando colligi nequit quod quæritur; quemadmodum in demonſtranda æqualitate angulorum verticalium ſuccedit (§. 38). Cum vero conjectando, nonniſi caſu, prima ſtatim vice incidamus in veritatem; ideo haud raro variis modis tentanda eſt præparatio, antequam in eam incidas, quæ recta eſt: id quod ſatis experiuntur, qui veritati proprio marte eruendæ operam navant. Enimvero de iis hic dicere diſertius, quæ ad Artem inveniendi ſpectant, noſtri non eſt inſtituti, ubi tantummodi docemus, quomodo ad præparationem pervenire potuerint, qui bene poſitam retinuerunt. Bene autem poſitas eſſe eas, quæ in demonſtrationibus adhibentur, ipſe ſucceſſus in demonſtrando probat. Non tamen exiſtimandum eſt, quaſi earundem inventores prima ſtatim vice in eas inciderint, quemadmodum exemplum modo datum inſinuare videtur; ſed potius tenendum, tentatis haud raro pluribus ſine ſucceſſu, eam retentam fuiſſe, quam ſucceſſus approbabat. Sed talia, ſuo tempore, demonſtraturi ſumus a priori, ex ipſa animæ natura, in Arte inveniendi; ſi quidem Deo viſum fuerit corporis animique vires eo uſque conſervare, donec ad hanc telam pertexendam ordo nos deducet.

§. 76. Hic non aliud agendum eſt, quam ut oſtendamus, quomodo inquiramus in modum, quo ad præparationes in Elementis noſtris occurrentes perveniri licuerit; reddendo rationem, cur hoc modo fiat, tum ex conditione propoſitionis demonſtrandæ, tum ex anterioribus, quæ tanquam cognita & nobis familiaria ſupponuntur. Quodſi ergo, ad imitationem eorum quæ, exempli loco, in medium attulimus (§. 74, 75), præparationes omnes in Elementis noſtris expendere libuerit; nulli dubitamus lucem affulſuram ſufficientem iis, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Quibus vero in ſecundo acquieſcere viſum eſt, illi hac diſquiſitione non habent opus, huicque labori ſuperſedere poſſunt ac debent. Sufficit enim iis præparatione, prouti præſcribitur, ad hypotheſin accedente, demonſtrationem legitime procedere, qua animus convincitur verum eſſe, quod erat demonſtrandum.

§. 77. Illud adhuc ſupereſt, ut doceamus, quomodo procedendum ſit, ſi reſolutionem problematis ſuppo-

nis tanquam incognitam, adeoque eandem consideras tanquam inveniendam. Ex hac enim hypothesi, perinde ac in theorematis, vi anteriorum ratiocinando, colligendum, quid fieri debeat, ut facias, quod erat faciendum. Sumamus exempli loco problema de linea recta per datum punctum alteri rectæ parallela ducenda. Supponamus factum, quod petebatur; nimirum rectam MN, quæ per datum punctum V transit, alteri RS, quæ data supponitur, esse parallelam. Quodsi hoc sumis; ex anterioribus succurrit: perpendicula inter duas parallelas intercepta æqualia esse (§. 226 *Geom.*). Unde infertur: duo quæcunque perpendicula inter rectas MN & RS æqualia sunt. Porro constat, quod V sit punctum extra lineam RS datum. Huc animum advertenti succurrit (§. 216 *Geom.*), a dato puncto extra lineam datam perpendicularem demitti posse. Unde infertur, posse quoque ex puncto V ad rectam RS demitti perpendicularem, nempe VK. Succurrit porro, ubi perpendis duas requiri lineas perpendiculares inter rectas MN & RS, ut per earum æqualitatem pateat parallelismus ipsarum, per demonstrata, ex quovis puncto intra rectam datam assumto erigi posse perpendicularem (§. 212 *Geom.*). Unde denuo infertur, ex puncto quocunque lineæ RS, veluti T, erigi posse perpendicularem TA. Jam, quia MN supponitur ipsi RS

Tab. I. *Fig.* 7.

parallela, & VK atque TA sunt perpendicula inter hasce parallelas intercepta, adeoque æqualia, per demonstrata; resolutio, quæ quærebatur, jam patet. Nimirum 1°. ex puncto dato V demittenda est perpendicularis VK ad rectam RS: 2°. ex puncto quolibet T erigenda est perpendicularis TA priori æqualis: 3°. per duo puncta A & V ducenda est recta MN. Hæc ipsa est resolutio, quæ in Elementis nostris legitur (§. 258 *Geom.*).

§. 78. Patet autem, si hoc modo in resolutionem problematis inquiris; hinc simul modum problema in theorema conversum demonstrandi manifestum esse. In ea enim investiganda uteris principiis, quibus in demonstrando habes opus: id quod ex collatione eorum, quæ modo dicta sunt, cum resolutione demonstrationis superius facta (§. 52) patet. Demonstrationes nimirum, una cum resolutione, una eademque opera deteguntur; ut adeo non opus sit, nisi ut, ubi synthetice proponere volueris quæ invenisti, ea, quæ faciunt ad resolutionem, separes a ceteris, quæ ad demonstrationem spectant. Subinde tamen etiam in Elementis nostris resolutionem & demonstrationem una exhibuimus; quemadmodum in hoc ipso casu factum, quem exempli loco produximus; & in aliis, ubi prolixior est demonstratio, veluti in problematis de extrahenda radice quadrata & cubica (§. 269, 282. *Arithm.*).

§. 79.

§. 79. Demus adhuc exemplum aliud. Supponatur itaque resolutio problematis 16 (§. 212 *Geom.*) de linea perpendiculari, ex dato in recta
Tab.I. data puncto, excitanda. Data sit
Fig. 12. recta ML, & in eo detur punctum G; ex hoc puncto G ducenda est linea, quæ sit ad rectam ML perpendicularis. Ponatur factum, quod petebatur, nempe ducta perpendicularis GI. Succurrit ex anterioribus: Si linea recta ducenda, duo dari debent puncta, ex quorum uno ad alterum ducitur recta (§. 121 *Geom.*). Unde infertur: Præter punctum G, quod datur, determinandum esse adhuc punctum aliud I, ut recta GI duci possit. Liquet igitur, totum negotium in eo versari, ut punctum I determinetur. Ponamus denuo hoc esse factum. Sumitur itaque: Recta ex puncto I ad punctum G ducta perpendicularis est. Succurrit principium: Si recta quædam fuerit ad alteram perpendicularis, anguli deinceps positi æquales sunt (§. 79 *Geom.*). Unde infertur: Anguli MGI & IGL æquales sunt. Sumatur IG pro crure triangulorum contiguorum communi. Patet triangula ista habere angulum unum æqualem &, crus unum ejus esse æquale, nempe idem. Succurrit ex anterioribus principium (§. 179 *Geom.*): Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem duobus cruribus sigillatim æqualibus comprehensum, etiam latus tertium unius æquale erit lateri tertio alterius. Atque hinc infertur: Si præterea fiat GK=GH, erit etiam KI=HI. Atque adeo liquet, si fiat GK=GH, hoc est, si ex puncto H capiatur utrinque æquale intervallum, ex punctis K & H eodem intervallo quocunque alio (cum hic longitudinis GI nulla habenda sit ratio, sed tantummodo situs ad rectam ML) per intersectionem determinari posse punctum I, quod quærebatur, ut recta IG duci possit. Denuo manifestum est, resolutionem problematis analyticam simul continere & ejus demonstrationem. Quodsi unam ab altera separes, utraque prodibit, qualis in Elementis nostris extat. Obiter moneo, inter principia heuristica in Geometrica referendum esse, ut dispiciamus, num triangula congruentia & similia determinari possint, quorum ope procedat ratiocinatio ad investigandum quod quæritur, vel demonstrandum quod asseritur requisita. Quomodo in hoc principium inciderint Geometræ, nostrum jam non est disquirere. Erit alibi de eo dicendi locus.

§. 80. Subinde resolutiones problematum innotescunt sola attentione ad theoremata inventa, ad quas nulla patet via, si hæc tanquam incognita supponuntur. Istiusmodi est problema de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Etenim si supponimus lineam BD esse inventam, quæ inter duas datas AB & BE media proportionalis est, succurrit

Tab. I. Fig. 10. currit tantummodo vi definitionis (§. 155. *Arithm.*): Si fuerint tres lineæ continue proportionales, erit prima ad ſecundam, ut ſecunda ad tertiam. Atque hinc infertur: Recta data AB eſt ad inveniendam BD ut hæc ipſa BD ad alteram datam BE. Etſi hic ad ſimilitudinem triangulorum tanquam principium heuriſticum confugias; & ſumas BD eſſe crus commune duorum triangulorum ſimilium ABD & BDE, videasque, ſi BD fuerit ad AE perpendicularis, angulum *x* angulo *y* æqualem conſtrui debere, quod etiam fieri poſſe conſtat (§. 208 *Geom.*); quoniam tamen BD determinatæ magnitudinis eſt, non conſtat, quantus fieri debeat angulus *x*, ut recta AD attingat punctum D, quod quæritur, atque ita determinandum, ut crus anguli *x* ſecet AE in puncto E. Nihil itaque conficies, niſi ſupponas theorema tanquam cognitum: Si ex puncto quocunque B diametri AE erigatur perpendicularis peripheriæ in puncto D occurrens; erit ea inter ſegmenta diametri AB & EB media proportionalis. Ubi vero hoc theorema tanquam notum ſumitur, reſolutio problematis, de invenienda recta inter duas alias datas media proportionali, ſua quaſi ſponte ſeſe offert. Etenim non multa attentione opus eſt, ut animadvertas rectas datas AB & BE in eandem rectam transferri, & ſuper eadem ſemicirculum deſcribi poſſe; infertur vi corollarii theorematis primi (§. 136 *Geom.*). Neque ullum eſt dubium, quin inventori reſolutionis hujus problematis ante innotuerit theorema iſtud, quam de reſolutione cogitaret. Non eſt quod excipias, nos theorema iſtud non præmiſiſſe in Elementis noſtris problemati huic. Etenim ſi ita viſum fuiſſet, præmitti poterat: ſed in ſyntheſi non neceſſarium erat. Dum enim demonſtranda eſt reſolutio, problema in iſtud theorema convertitur, atque demonſtratio ejus adjicitur, quemadmodum ex ſuperioribus conſtat (§. 54, 55). Non nego fieri quoque potuiſſe, ut reſolutio eadem deduceretur ex aliqua proprietate trianguli rectanguli, ſcilicet ex hoc theoremate: Si ex angulo recto D trianguli rectanguli ADE demittatur ad hypothenuſam AE perpendicularis DB; erit hæc ipſa DB media proportionalis inter hypothenuſæ AE ſegmenta AB & BE. Quodſi enim ſupponas tanquam notum, quomodo ſuper data hypothenuſa conſtrui poſſit triangulum rectangulum: reſolutio problematis noſtri non minus in aprico eſt. Plures haud raro patent viæ ad eandem veritatem, & prouti vel hæc, vel alia principia, tanquam cognita ſupponuntur, unus hanc, alius aliam calcat viam. Mihi tamen probabilius eſt, ex proprietate circuli potius, quam trianguli rectanguli, reſolutionem de qua nobis ſermo eſt fuiſſe deductam. Enimvero non opus eſt, ut ea

de

de re contentionis ſerram cum aliis reciprocemus. Ubi enim veritates tanquam quærendæ proponuntur, quæ jam inventæ ſunt, ſufficit ingredi viam, qua recto facultatum cognoſcendi uſu ad eas pervenire datur.

§. 81. Dantur integræ diſciplinæ mathematicæ, quas inter Algebra eminet, aut, ſi mavis, Analyſis mathematica, quibus docetur, quomodo veritates mathematicæ ſint inveniendæ. Nemo non intelligit, ad tertium gradum cognitionis mathematicæ adſpiranti inprimis opus eſſe, ut in iis addiſcendis aſſiduus ſit. Enimvero ea de re nobis demum dicendum erit, ubi ad ſpecialia deſcendemus. Hic enim nonniſi generalia tradimus, quæ in qualibet Matheſeos parte obſervanda ſunt; etſi tantummodo exempla ex Arithmetica & Geometria dederimus.

§. 82. Reſtat denique ut adhuc dicamus, quomodo definitiones expendere debeat, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat. Facile apparet, inquirendum hic quoque eſſe, quomodo definitiones fuerint detectæ, aut inveniri ſaltem potuerint. Quamobrem id nobis agendum eſt, ut oſtendamus, quomodo hæc inquiſitio ſit inſtituenda. Definitiones eſſe duplices, nominales, & reales, in Commentatione de methodo mathematica monuimus (§. 17, 18); ubi etiam docuimus, quomodo tum ad nominales (§. 19 & ſeqq.), tum ad reales perveniatur (§. 25 & ſeqq.). Juxta regulas igitur ibidem traditas definitiones ad examen revocandæ: quod quomodo fiat, uno alteroque exemplo docendum.

§. 83. *Congruentia* definitur, quod ſit coincidentia terminorum, & *congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Definitio hæc explicat, unde congruentiam agnoſcere poſſis in duabus magnitudinibus, veluti in duabus lineis, vel ſuperficiebus. Quamobrem cum definitio nominalis ſit, cujus beneficio res agnoſcitur, & ab aliis diſtinguitur (§. 17 *Comment. de Meth.*); definitionem hanc nominalem eſſe hinc colligitur. Primus modus perveniendi ad definitiones nominales conſiſtit in eo, ut ad rem præſentem quam percipimus animum attendamus, & cum cura diſtinguamus quæ diſtingui poſſunt; eaque fini ſingula primum ſigillatim conſideremus, mox vero eadem inter ſe conferamus. Quodſi inquiramus, utrum hoc modo definitio congruentiæ inveniri potuerit, nec ne; hoc modo eam detectam eſſe deprehendes. Sumantur, ex. gr. duo fila ejuſdem longitudinis coëxtenſa, dicuntur ea ſibi mutuo congruere. Quodſi quæſiveris, cur ſibi mutuo congruere dicantur; non aliam reddere potes rationem, quam quod ab eodem termino incipiant, & in eodem deſinant;

ſeu quod extrema eorum coincidant, ipſaque etiam coincidant quoad longitudinem. Atque adeo patet, ex lege ratiocinandi (§. 349 *Log.*), coincidentiam terminorum hic dici congruentiam. Similiter notio lineæ rectæ abſtrahitur a filo extenſo, cujus craſſities, cum diminui poſſe concipiatur in infinitum, donec tandem evaneſcat, a notione confuſa ejus abſtrahitur notio lineæ in genere, quod ſit longitudo latitudinis expers: quæ eſt definitio *Lineæ* in genere, quam dedit EUCLIDES. Quodſi jam notionem rectæ confuſam ad diſtinctam revocare volueris, diſtinguenda in ea ſunt, quæ diſtingui poſſunt; eaque fini ſingula primum ſigillatim conſiderari, & mox inter ſe conferri debent (§. 19 *Meth.*). Cum in linea non concipiantur niſi puncta, quæ a ſe invicem diſtingui poſſunt, & ſitus eorundem, quem ad ſe invicem habent; recta a curva differre nequit, niſi ſitu punctorum quæ in ea aſſumuntur. Advertit hoc EUCLIDES: unde *Rectam* definit, quod ſit linea ex æquo interjacens inter ſua extrema. Enimvero cum huic punctorum ſitui nulla reſpondeat notio, niſi confuſa, quam verbis ex æquo interjacere inter ſua extrema indigitat, eadem nempe cum notione confuſa lineæ rectæ; nihil explicuit, nec definitione ſua uti potuit. Nos igitur aſſumentes partem quamcunque rectæ AC, eamque conferentes cum tota AB, inquiſivimus, num quid in ſitu punctorum, quæ in parte aſſumuntur, deprehendi poſſit, quod diverſum ſit a ſitu punctorum in toto aſſumtorum. Ubi nullam diverſitatem reperiri poſſe deprehendimus; memores definitionis ſimilitudinis (§. 24 *Arith.*), *Rectam* definivimus per lineam, cujus pars quæcunque toti ſimilis. Nimirum, vi illius definitionis, in parte ad totam collata, præter magnitudinem nihil obſervare datur, quo ea a tota diſtingui poſſit. Quamobrem cum Linea curva ſit, quæ recta non eſt; eademque, ſuppoſita definitione rectæ, hoc modo definiri poterat (*not.* §. 85 *Ont.*); nos in definitionem noſtram *Lineæ curvæ* incidimus, quod nimirum ſit linea, cujus partes toti diſſimiles (§. 22 *Geom.*). Ita ſi aſſumas duos peripheriæ arcus quoſcunque AC & AB, ducasque chordas cognomines; ſitum puncti C ad A & B ad A diſtinguere licet per diverſam rationem ſubtenſarum ad diametrum; neque enim arcuum ſubtenſæ omnes eandem ad diametrum rationem habent, ut adeo pars arcus ab arcu integro, hoc modo, diſtingui poſſit. Tacemus modos alios diſtinguendi ſitum punctorum in parte; conſequenter partem ipſam, a tota. Geometriæ ſublimioris gnari non ignorant hoc principio diſtingui curvas a ſe invicem. Sed cum ſeniores Geometræ in recta a curva diſtinguenda hæſitaverint, definitiones utriuſque daturi; non opus eſt ut tyrones, in modo

Tab. I. Fig. 13.

Tab. I. Fig. 14.

modo quo eædem detectæ fuerunt inquirendo, induſtriam ſuam fatigent. Tum enim idem manifeſtus erit, ubi in Geometria curvarum fuerint verſati.

§. 84. Similiter videre licet ubivis, lineam rectam cum altera in eodem puncto concurrentem, diverſimode ad ſe invicem inclinari poſſe. Unde, non attenta inclinationis diverſitate, enata eſt definitio *Anguli* in genere (§. 54 *Geom.*), quod ſcilicet ſit duarum linearum in puncto uno concurrentium mutua inclinatio. Quodſi ergo recordatus, a puncto quovis ad punctum quodvis lineam
Tab. I. Fig. 6. rectam duci poſſe (§. 20 *Geom.*), crura anguli CAB recta CB jungi concipias; reflectendo ſuper iis, quæ in figura, quæ ſic prodit, diſtinguuntur; reperitur (§. 19 *Meth.*) definitio trianguli in genere, rectilinei ſcilicet; quoniam, in Geometria elementari, cum aliis nullum nobis eſt negotium, quod ſit figura tribus lineis rectis terminata (§. 87 *Geom.*). Quodſi perpendis, in hac definitione non determinatam eſſe rationem laterum AB, BC & AC; & recordaris rationem omnem vel eſſe æqualitatis, vel inæqualitatis (§. 130 *Arith.*); addendo determinationem rationis laterum ad ſe invicem, naſcuntur triangulorum ſpecies (§. 22 *Meth.*). Nimirum, ſi tria latera habeant ad ſe invicem rationem æqualitatis, ſeu omnia inter ſe æqualia ſint; definitio præſto eſt *Trianguli æquilateri* (§. 88. *Geom.*). Si ſumis eadem habere ad ſe invicem rationem inæqualitatis, hoc eſt, ſingula inæqualia eſſe; definitionem habes *Trianguli ſcaleni* (§. 90. *Geom.*). Denique ſi ſumis latus unum habere ad unum reliquorum rationem æqualitatis, ad alterum vero rationem inæqualitatis, ſeu duo nonniſi latera æqualia eſſe; in definitionem *Trianguli æquicruri* incidis.

§. 85. A definitione trianguli æquilateri, quod tria latera æqualia habet, abſtrahitur definitio *Figuræ æquilateræ* in genere, omiſſa determinatione numeri laterum (20 *Meth.*); quod ſcilicet ſit figura, cujus latera ſingula inter ſe æqualia ſunt (§. 88 *Geom.*). Atque adeo ſatis patet, quomodo, ope regularum in Commentatione de Methodo mathematica explicatarum, detectæ fuerint, aut ſaltem detegi poſſint, definitiones nominales Geometriæ, immo in qualibet Matheſeos parte. Idem enim quoque ſuccedere in definitionibus aliis experietur, qui tentare voluerit.

§. 86. Sufficiant igitur hæc dixiſſe de definitionibus nominalibus: reſtat ut nonnulla addamus de realibus. Ex. gr. lineam quandam rectam LM, juxta ductum alterius rectæ LO, mo- Tab. I.
tu ſibi ſemper parallelo, hoc eſt, ut Fig. 3.
in quolibet ſitu ſemper parallela ſit, deorſum moveri poſſe conſtat. Quamobrem, ſi hoc fieri ſumis; prodit definitio *parallelogrammi* in genere. Similiter rectam quandam AC, circa punctum fixum C, in gyrum

Tab. I. Fig. 15. rum agi posse, donec redeat ad terminum A, unde digressa fuerat, per se liquet, & per notiones communes confirmatur. Quodsi ergo hoc sumis; prodit definitio *Circuli* realis (§. 25 *Meth.*).

§. 87. Eædem definitiones reperiri quoque potuerunt, præsuppositis definitionibus nominalibus. Parallelogrammi definitio nominalis est, quod sit figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela (§. 102
Tab. I. Fig. 3. *Geom.*). Quodsi concipias rectam LM juxta ductum alterius rectæ moveri deorsum; patet figuram describi quadrilateram. Quodsi linea ponatur sibi semper manere parallela; liquet latus ON opposito LM esse parallelum, & rectas quascunque parallelas inter latera OL & MN interceptas esse æquales. Enimvero si lineæ parallelæ æquales intra easdem lineas comprehendantur, erunt quoque hæ inter se parallelæ (§. 257 *Geom.*). Unde infertur, Latus quoque MN esse opposito LO parallelum. Evidens adeo est, figuram, quæ describitur, motu lineæ rectæ LM, juxta ductum alterius rectæ LO, sibi semper parallelo, esse quadrilateram & habere latera opposita parallela. Atque sic liquet, figuram hoc modo descriptam esse, vi definitionis nominalis, parallelogrammum. Nimirum, si definitio nominalis parallelogrammi sumitur; parallelogrammum dici nequit nisi figura, quæ & quadrilatera est, & latera opposita æqualia habet. Quamobrem ubi definitionem realem, hac supposita, dare volueris; ita omnino concipienda, ut nominali non repugnet ista genesis, sed ex genesi figuræ potius demonstrari possit, nominalem definitionem eidem convenire. Quodsi excipias, supponi hic, quæ demonstranda ante sunt, quam definitionem realem ex nominali deducere valeas, nimirum quod lineæ parallelæ inter duas lineas interceptæ æquales esse debeant, ut hæ quoque inter se sint parallelæ; objectio nulla est. Ecquis enim dixerit, salva veritate, definitiones reales ex nominalibus deducendas esse, nulla theoria præsupposita, quæ demonstranda ante venit. Quin potius ipsum exemplum, quod modo dedimus, contrarium loquitur. Definitiones nominales sumere licet, antequam theoremata demonstrentur. Sumere quoque licet reales, antequam demonstrentur propositiones, modo genesis intelligatur possibilis absque demonstratione; scilicet ut nihil fieri jubeatur, quod absque demonstratione fieri posse non constet. Sed figuram, quæ per genesin prodit, esse eandem, cujus definitio nominalis datur, utique demonstrandum. Quodsi ergo demonstratio supponit principia, quæ absque demonstratione vera esse non perspicitur; illa utique ante demonstranda sunt, quam figuram genitam cum ea, cujus definitio nominalis datur, eandem esse ostendi potest.

§. 88.

§. 88. Facilius ex definitione nominali detegitur realis *circuli*, non suppositis aliis, quæ de circulo demum demonstranda. Nominalis circuli definitio est, quod sit figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C ductæ rectæ sunt inter se æquales. Quodsi sumis, quod in hac definitione continetur, circulum terminari linea curva in se redeunte; atque succurrit, vi intentionis inveniendi genesin curvæ, seu detegendi motum, quo describitur, describi lineam, si punctum ab uno termino ad alterum moveatur (§. 10 *Geom.*); facile animadvertis, lineam, qua terminatur circulus, describi, si punctum describens continuo motu redeat ad terminum A, unde digressum fuerat. Quodsi porro sumis, vi definitionis nominalis, rectas ex singulis lineæ istius punctis ad centrum C ductas esse æquales; consequenter punctum describens A esse alterum extremum lineæ rectæ, cujus alterum extremum fixum hæret in centro C; patet, si punctum A a termino suo dimoveri debet, ut tamen alterum rectæ AC extremum in puncto C sit fixum; rectam AC circa punctum fixum C moveri debere. Vides itaque circulum describi, si recta quædam AC circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ ipsa est circuli definitio realis deducta ex nominali, nulla præsupposita theoria circuli, sed tantummodo assumtis, quæ in definitione nominali continentur.

Tab. I. Fig. 15.

§. 89. Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* definitiones reales mirifice deprædicat, iisque omne tribuit pretium, nominalibus nullo relicto. Enimvero, quemadmodum vidimus, definitiones reales ex nominalibus deduci posse; ita vicissim nominales deducuntur ex realibus: id quod in circulo levi attentione animadvertitur. Exempla alia dedimus in solidis (§. 456 *& seqq. Geom.*). Etsi autem non negemus, ex definitionibus realibus haud raro facilius deduci, quæ ex nominalibus operosius demonstrantur, adeoque ad inveniendum eas esse admodum utiles; nominales tamen realibus præstant in rebus ad sua genera suasque species reducendis: id quod in demonstrationibus & in applicatione theoriæ ad casus obvios maxime usui est. Quamobrem definitiones nominales non sunt contemnendæ, immo certo fine realibus præferendæ, quæ ad res obvias agnoscendas & ab aliis distinguendas non adeo commodæ sunt, quam nominales; id quod ipsa circuli atque parallelogrammi definitione reali docetur.

CAPUT II.

De Modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa.

§. 90. NOn omnes in addiscenda Mathesi eundem sibi scopum præfigunt. Postquam igitur in genere docuimus, quomodo Mathesis sit tractanda, ut eam consequaris cognitionem, quam intendis; nunc porro dispiciendum est, quinam per Matheseos studium intendi possint fines, & quænam observanda sint ei, qui finem intentum consequi voluerit. Eminet inter hosce fines perfectio intellectus, quæ consistit in habitu rectum faciendi facultatum cognoscendi usum in veritate cognoscenda. Hunc finem intendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoscibilium adspirant, sive philosophari voluerint, sive Theologiæ, Jurisprudentiæ, ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de causa, veteres neminem ad Philosophiam addiscendam admittere voluerunt, nisi Geometriæ peritum; cum olim Geometria sola accurata methodo traderetur. Optandumque erat, ut idem mos in scholas nostras introduceretur. Rationes perspicientur ex iis, quæ mox tradituri sumus, & per transennam prospiciuntur vi eorum quæ modo diximus. In veritate enim cognoscenda, rectum facere tenetur facultatum usum, qui a veritatis tramite deflectere noluerit.

§. 91. Tres sunt intellectus operationes, notio, judicium, atque discursus, sive ratiocinium; & hisce suppetitas ferunt facultates cognoscendi inferiores, sensus, imaginatio, atque memoria, una cum facultatibus intermediis, attentione ac reflexione, per quas ab inferioribus ad superiorem fit transitus. Quæ omnia satis manifesta sunt ei, qui Psychologiam empiricam cognitam atque perspectam habet. Qui adeo intellectum perficere voluerit, is rectum operationum intellectus usum facere tenetur; ac in iis eliciendis uti debet facultatibus inferioribus atque intermediis. Quamobrem studio Matheseos perficitur intellectus; si eodem habitus operationibus intellectus recte utendi, & in iis eliciendis rectum facultatum cognoscendi inferiorum ac intermediarum usum faciendi acquiritur.

§. 92. Non igitur nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, sed accuratæ methodo, qua traduntur mathemata, fructus hic debetur. Ejus adeo participes non fiunt, qui methodum accura-

curatam insuper habent. Quamobrem cum Mathesis, perficiendi intellectus causa, potissimum in scholas sit introducenda; parum adolescentibus & juvenibus consulunt, qui ut desidiosis placeant, methodi nullam rationem habent, sibi magis, quam ipsis prospicientes.

§. 93. Qui in primo cognitionis gradu acquiescit, non alium finem sibi propositum habet, quam ut veritatem ab aliis propositam intelligat (§. 1); consequenter non aliud intendit, praeterquam veritatum mathematicarum nudam cognitionem. Quoniam igitur nuda veritatum mathematicarum cognitione non perficitur intellectus (§. 92); nec fructus hujus particeps fieri potest, qui primum cognitionis gradum unice curae cordique habet. Quod si ergo eum praxes quaedam mathematicae non juvant, veluti si agrimensorem, aut architectum militarem agere decreverit, vel si principiorum mathematicorum usum non experitur in addiscendis aliis, ex. gr. in percipiendis dogmatis nonnullis physicis; Mathesin plerumque in spem futurae oblivionis addiscit; ut studii hujus, quod multiplici ratione sese commendat cultoribus suis, nullum prorsus percipiat fructum. Unde facile intelligitur, quinam in addiscenda Mathesi oleum atque operam perdant; ut ab hoc studio potius sint arcendi, quam ad idem invitandi vanis pollicitationibus. Convenit ingenuitati docentis, ne aliquid lucelli facturus, juvenes ab addiscendis iis, quae magis profutura sunt, ad ea avocet, quae in spem futurae oblivionis addiscunt.

§. 94. Qui primo cognitionis gradui acquirendo eam operam navat, quam requisivimus; is attentionem ad ea, quae discit, afferre ac tamdiu conservare adsuescit, donec illa rite intellexerit (§. 5). Quaenam ad hoc requirantur, ut definitiones intelligat (§. 6 *& seqq.*), nec in propositionibus quicquam supersit obscuri (§. 17 *& seqq.*), perspicit. Definitionum accuratarum, & in disciplinis rite ordinandarum (§. 6), ac theorematum (§. 24, 25), & problematum, & resolutionis eorundem (§. 26 *& seqq.*) genuinae formae ideam exemplarem animo concipit. Differentiam inter notiones distinctas & confusas, adaequatas & inadaequatas penitus perspicit (§. 6, 9 *& seqq.* §. 24 *& seqq.*). Quomodo recto sensuum usu facilitetur operatio intellectus addiscit (§. 7). Quo pacto repetitio facilior minusque molesta reddatur, qua memoriae infiguntur firmiter eadem retinenda, cognoscit (§. 15). Nemo non agnoscit, ad perfectionem intellectus pertinere, ut formet notiones distinctas & adaequatas cognoscibilium; ut judicia formet determinata; ut resolutiones problematum distincte concipiat; ut attentionem, prout usus requisiverit, determinet; ut usum sensuum in operationibus intellectus decernat; ut memo-

memoriæ infigendorum eademque retinendorum curam gerat. Quamobrem cum hæc perfectio intellectus acquiratur, si primo cognitionis gradui acquirendo præscripto modo studeamus; quin Matheseos studium, si nostro more tractetur, faciat ad intellectum perficiendum dubitandum non est.

§. 95. Non est quod mireris modum, a nobis præscriptum, ad primum cognitionis gradum adspirantibus, facere ad perficiendum intellectum; cum tamen a methodo, non a dogmatis expectanda sit perfectio intellectus (§. 92). Etenim cum secundus cognitionis gradus supponat primum; nos in acquirendo cognitionis gradu primo jam ea præcepimus, quæ vi methodi observanda sunt iis, quibus secundus curæ cordique est (§. 30); cum vulgo methodi nulla habeatur ratio, & plerumque nonnisi confusæ notiones memoriæ imprimantur, vi imaginationis reproducendæ, quando iisdem opus est. Sane in Geometria, lecta vel audita definitione, oculos in schema delineatum statim conjicientes ideam definiti memoriæ infigunt, non distincte expensis, quæ in definitione continentur; eodemque modo idea schematis, quæ theorema & resolutionem problematis exhibet, eidem mandatur, quæ vi imaginationis præsens sistitur, quoties de ea re cogitamus. Parum adeo, vel nihil, tribuitur intellectui, facultatum vero cognoscendi inferiorum usus prædominatur. Immo ne attentionis quidem is fit usus, quem facultas cognoscendi superior exigit.

§. 96. Qui definitiones, propositiones, & resolutiones problematum eo modo exponit, quem nos præscripsimus (§. 9, 17 *& seqq.*); eas ad figuras in charta delineatas & exempla exhibita applicat, qualis applicatio requiritur, dum ratiocinamur. Ratiocinatio tertia intellectus operatio est; eodemque prorsus modo ratiocinandum, dum propositiones demonstramus, vel a priori, ex cognitis, alia adhuc nobis incognita colligimus. Quamobrem patet, si in acquirendo cognitionis gradu primo morem nostrum sequaris, hoc ipso perfici debere intellectum. Nulla adeo intellectus operatio est, cui rite eliciendæ non inserviat modus acquirendi primum cognitionis gradum a nobis præscriptus (§. 94 *& præf.*).

§. 97. In primo igitur cognitionis gradu acquirendo, omnem illum facis facultatum cognoscendi usum, qui in secundo acquirendo requiritur, immo in tertio familiaris supponitur. Est adeo modus acquirendi cognitionis gradum primum, quem nos præscribimus, præparatio ad secundum: qua facta, nihil prorsus difficultatis in secundo percipitur, cum eum usum facultatum jam facere possis, quem is requirit. Me vero tacente liquet, quod, ubi primus cognitionis gradus acquiritur, antequam

quam ad ſecundum accedas, una in parato habeas principia, quibus in ratiocinando opus eſt, dum ad ſecundum animum appellis. Equidem id modus a nobis præſcriptus commune habere videtur cum vulgari; non tamen utroque idem prorſus efficitur. Etenim, noſtro more, definitiones ac propoſitiones pure enunciatæ memoriæ infiguntur, quales adhibendæ ſunt in ratiociniis diſtinctis; &, dum præſcripto modo expenduntur, ſimul familiares evadunt, quales eſſe debent, ut ſtatim memoriam ſubeant, quando iiſdem indigemus. Quodſi vero noſtro more non expenduntur; nec eadem facilitate definitiones ac propoſitiones memoriæ mandantur, ſed multa demum repetitione conſequimur, quod multo temporis compendio obtineri poterat.

§. 98. Plurimum autem refert, ut definitiones, & propoſitiones antecedentes familiares experiaris, antequam ad ſequentes accedas. Etenim, definitiones ſequentes non intelliguntur niſi per anteriores, ubi eas ingrediuntur termini per anteriores explicati. Quamobrem ubi haſce nondum familiares experiris; ſequentes tibi non poſſunt non videri obſcuræ, nec fieri poteſt, ut eas penitus intelligas. Similiter demonſtratio non convincit, niſi principia, quæ ex antecedentibus ſumuntur, ſenſum evidentiæ ſecum ferant. Neceſſe igitur denuo eſt, ut tibi antecedentes definitiones ac propoſitiones fuerint familiares, ubi ſine hæſitatione in demonſtratione progredi volueris. Quid, quod nec propoſitiones ſatis intelligantur, quamdiu definitiones, quibus explicantur termini in iiſdem occurrentes, non fuerint familiares? Ea de cauſa obſervare licet, quod ſtudium mathematicum difficile videatur iis, qui nulla terminorum notitia inſtructi ad idem accedunt, nec in repetendis iis, quæ explicata fuerunt, ſeduli ac frequentes ſunt; cum in caſu oppoſito nulla percipiatur difficultas. Danda vero omnino eſt opera, ut difficultas hæc tollatur, ne ſtudii utiliſſimi efficiat deſertores.

§. 99. Qui Matheſi addiſcendæ operam navant, ut intellectum perficiant; iis inprimis convenit, ut in ſecundo cognitionis gradu acquirendo induſtriam ſuam exerceant. Methodo enim debetur hic fructus, non dogmatis, quæ in Matheſi proponuntur. Hujus autem potiſſima pars ſunt demonſtrationes, quibus veritatis eorum, quæ docentur, convincimur, ut nihil nobis dubii ſuperſit. Secundo gradui cognitionis acquirendo inſerviunt demonſtrationes (§. 30). Quamobrem ſi ſtudium Matheſeos intellectum perficere debet, neceſſe eſt ut in demonſtrando ſis aſſiduus.

§. 100. Intelliguntur vero hic demonſtrationes ſyntheticæ, quales ſunt EUCLIDIS & Geometrarum veterum. Neque alia de cauſa, quam harum demonſtrationum gratia,

Veteres voluerunt, ne quis ad philosophiam accedat, nisi Geometriæ peritus. Quamvis enim demonstrationes recentiorum analyticæ, quæ calculis algebraicis absolvuntur, suum etiam habere possint usum in intellectu perficiendo; ab iis tamen eundem expectare minime licet, quem spondent syntheticæ: id quod satis manifestum evadet per ea, quæ mox disertius dicentur. Inde nimirum est, ut in Mathesi licet versatissimi & inter summos Mathematicos eminentes, ubi extra Mathesin methodo mathematica uti voluerunt, minime dare potuerint, quæ satisfaciunt. Exemplo nobis est CARTESIUS, Vir summus, cujus memoriam egregia in Mathesi inventa posteritati commendabunt, quamdiu scientiæ honos erit. Cum enim MERSENNI desiderio satisfacturus, suum de existentia Dei argumentum ad formam demonstrationis geometricæ reducere vellet; quam parum ipsi leges methodi mathematicæ & genuina demonstrationis forma fuerit perspecta, abunde prodidit in Responsionibus ad objectiones contra Meditationes suas metaphysicas. Taceo exempla alia, quæ commemorari poterant; & quibus tandem effectum est, ut extra Mathesin nullam dari certam cognitionem acutiores inde colligerent: in qua opinione ipsum scepticismum consistere, nemo est qui non agnoscat. Quodsi ergo ad certam cognitionem extra Mathesin pervenire volueris; necesse est ut methodi mathematicæ interiorem rationem perspicias, & leges ejus distincte cognoscas: id quod fieri non poterit, nisi demonstrationum syntheticarum resolutione naturæ animæ convenienter facta, quam in superioribus satis declaravimus, ut nihil in ea desiderari possit. Atque, ea de causa, demonstrationes nostras syntheticas eo ordine digessimus, ut facillime præscripto modo resolvi possint. Nihil enim magis intendimus, quam ut studio mathematico intellectus perficiatur, quo certæ extra Mathesin cognitioni acquirendæ sufficiat.

§. 101. Doluit ideo ipse Vir summus ISAACUS NEWTONUS, quod, cum se studio mathematico totum daret, ad CARTESII Geometriam, aliosque scriptores algebraicos, statim progressus fuisset, antequam Elementa EUCLIDIS ea attentione expendisset, quam merentur; nec probavit, quod hodie Geometræ methodum syntheticam Veterum prorsus negligant, & in solis calculis algebraicis acquiescant; quemadmodum ex ore ipsius hausta refert HENRICUS PEMBERTON in præfatione ad Conspectum Philosophiæ NEWTONI, quem patrio sermone edidit. Nullum mihi dubium est, quin, quantum sibi hoc ipso defuerit, abunde expertus fuerit, cum in divino opere Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, inventa præclara methodo veterum Geometrarum proponere

nere decreviſſet. Quodſi enim quis, more a nobis præſcripto, demonſtrationes ſyntheticas reſolvere didicerit, & genuinam earum formam animo comprehenderit; is facile animadvertet, quod eam non perviderit NEWTONUS; neque adeo diſtinctè agnoverit, unde pendeat evidentia veritatis extra Matheſin; quemadmodum & CARTESIO accidiſſe modo monuimus (§. 100). Idem videre licet in eximio opere Phoronomiæ JAC. HERMANNI; qui, cum omnem ætatem in calculis algebraicis conſumſiſſet, methodo Veterum recentiora in Mechanica & Hydraulica, agnatisque diſciplinis inventa demonſtrare volebat. Quam parum enim ſibi & lectoribus ſuis conſuluerit; quod methodo, cujus vim ac poteſtatem minime comprehendebat, ea proponere voluerit, quæ per calculos algebraicos aſſecutus fuerat, & cum laude ad utilitatem diſcentium proponere poterat, acutiores vident.

§. 102. Firmum itaque ratumque manet; qui intellectus perficiendi gratia ad Matheſin accedit, ei demonſtrationes *Euclideas* omni cura ac ſollicitudine expendendas eſſe: quæ qualis eſſe debeat, noſtra demonſtrationum analyſis & earundem ſymbolica repræſentatio clariſſime docet §. 38 & ſeqq.). In his igitur induſtriam ſuam ingeniique vires exerceat, qui extra Matheſin evidentiam in veritatis cognitione conſequi voluerit. Proprio experimento edocti ſumus, non dari aliam ad evidentiam in Philoſophia & Facultatibus, quæ dicuntur, ſuperioribus viam: quam ſi calcare nolueris, tanto pronior erit in Scepticiſmum prolapſus, quanto fueris acutior; & facillimum erit nubem pro Junone amplecti, nec abortus imaginationis a genuinis intellectus fœtibus diſtinguere dabitur. Quodſi, præſcripto a nobis more, in Matheſi verſari volueris, ceſſabunt querelæ de imbecillitate intellectus humani, quales movit HUETIUS, non profuturæ, niſi ut ſternant ad Scepticiſmum viam, non ſine detrimento religionis tam revelatæ, quam naturalis. Scepticiſmum hodie ubivis terrarum invaleſcentem everſuri methodo iſta philoſophari cœpimus, qua EUCLIDES in ſuis Elementis olim uſus. Cumque, in Philoſophia, notiones confuſæ reſolvendæ ſint in diſtinctas, quas ſine detrimento veritatis fert Matheſis; ipſas etiam demonſtrationes geometricas ad eam formam reduximus, quam extra eandem habere debent, ne quid deſit evidentiæ; ut adeo ſuperflua exiſtimanda non ſint, quæ finis tam præclari gratia fiunt. Nec puerilia cenſenda ſunt, quorum neglectus ſe vindicat in Viris ſummis. Abſit itaque, ut eorum autoritate ad eundem defendendum abutaris.

§. 103. Modus, quo definitiones ac propoſitiones expendere docuimus, omnem facultatum uſum legiti-

mum in veritate cognoscenda pollicetur, ipso opere consequendum. Quodsi vero ad repræsentationem symbolicam animum advertere, & regulas generales inde abstrahere volueris; verioris Logicæ præcepta consequeris, quæ in Logica nostra demonstravimus. Atque adeo reipsa experieris, Logicam artificialem tum demum esse genuinam, ubi praxi veterum Geometrarum conformis; quemadmodum in Prolegomenis Logicæ ostendimus (§. 26 *Log.*). Qui sic præparatus ad Logicæ studium accedit, non modo omnia, quæ hic docemus, penitus intelliget; verum etiam regulas ibidem traditas, absque ulla hæsitatione, dextre applicabit; ut nec in iis applicandis sibimet ipsi imponat; quemadmodum haud raro contingit, nec de difficultate applicandi queratur. Ubi studium Matheseos præscripto a nobis more instituerit; in studio Logicæ, quod spinosum alias ac tædii plenum videtur, non sine voluptate versabitur, nec Logicam soli scholæ addisci in seipso experietur. Etenim ideas, quæ regulis logicis lucem affundunt, tot exemplis confirmatas, recta Mathematum tractatione, adeo familiares possidet; ut, quoties iisdem opus est, sua veluti sponte sese sistant animo præsentes; ipsaque Mathematum tractatio in continua regularum istarum applicatione cum consistat, quin continuo, hoc exercitio, eas applicandi habitum sit consecutus, dubitari nequit. Voluptate perfunditur animus, dum veritatis plenarie convincitur. Quamobrem cum veritatis eorum, quæ in Logica docentur, convincatur qui, Matheseos studio nostro more præparatus, ad studium Logicæ accedit; quin continua in eodem fruatur voluptate dubitandum non est. Docet Logica usum facultatum cognoscendi in veritate cognoscenda & applicanda. Quoniam itaque usum facere potest, qui nostro more in Mathesi fuit versatus; usus autem idem requiritur, in singulis omnino actionibus recte determinandis, prouti abunde constabit, si quis attenta mente Tomum posteriorem Philosophiæ practicæ universalis perlustrare voluerit; utilitatem Logicæ per omnem vitam experietur, qui regulas ejus penitus intelligit, & dextre applicare didicit.

§. 104. Quoniam ea demum Logica censetur genuina, quæ praxi veterum Geometrarum conformis (§. 26 *Log.*); utrum vero huic conformis sit, nec ne, dijudicare valet, qui in Mathesi præscripto a nobis modo fuit versatus (§. 103); nostra Matheseos quoque tractatio hunc pollicetur fructum, ut Logicam genuinam a spuriis discernamus, quales nostra ætate eduntur haud paucæ, & quæ naturali facultatum animæ usui e diametro adversantur; ita ut studium Logicæ non amplius faciat ad dirigendum facultatem cognoscitivam in cognoscenda veritate, sed intel-

intellectum potius corrumpat, ut a solida cognitione veritatis proscribaris. Neque verendum est, ne autoritas Mathematici, Logicæ non unius scriptoris, ipsi imponat: satis enim intelligit, vulgari Mathemata discendi more (§. 64) non patefieri regulas logicas, quas nostra resolutio & analytica expressio in apricum producit. Non igitur sufficit Logicam scribi ab eo, qui Mathematicus audit, vel Geometriæ quædam Elementa methodo minus accurata compilavit; sed necesse est, ut, qui Logicam scribit, in expendendis definitionibus ac propositionibus earumque demonstrationibus, eum faciat facultatum usum, quem regulæ logicæ urgent, & ut hasce ipsas regulas praxi huic conformes tradat. Vidimus paulo ante (§. 101) deficere hic acumen Mathematicorum summorum; ut adeo mirum videri non debeat, si acumen illorum desideretur, qui in illorum numerum referri nequeunt.

§. 105. Quoniam ad studium logicum accedere non debet, nisi qui in studio Matheseos secundum morem nostrum versatus est; ideo in Logica exempla mathematica dedimus, quippe quæ satis cognita atque perspecta supponimus, nisi ubi exempla vulgaria satisfaciunt. Accedit, quod nonnulla in Logica tradantur, quæ aliis, quam mathematicis exemplis, non eadem perspicuitate illustrantur. Bene sibi consulunt, qui saltem Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa præscripto a nobis modo perlustrant, antequam ad Logicam animum appellunt. Reipsa experientur, quod ex studio logico omnem percepturi sint fructum, qui ab eo sperari potest. Quodsi vero, neglecta Mathesi, ad Logicam properant, multa in iis non penitus intelligent, etsi omnia rite percepisse videantur; nec absoluto studio logico in potestate sua positum deprehendent, ut regulis Logicæ satisfaciant, hoc est, eum faciant facultatum usum, quem Logica præscribit.

§. 106. Maxima intellectus perfectio est Ars inveniendi; qua ex iis, quæ cognovimus, alia nobis incognita ratiocinando colligimus. Qui eo usque in perficiendo intellectu progredi voluerit; illi tenenda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66 *& seqq.*) Quodsi enim vel sola Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ eo modo pertractaveris, qui ibidem præscribitur; non modo constabit, quomodo in veritate invenienda sit procedendum; verum etiam habitum quendam tibi comparabis ex cognitis alia incognita colligendi; consequenter aliquid saltem hujus Artis acquires. Quemadmodum vero intellectus continuo magis magisque perficitur, quoad promptum usum in veritate cognoscenda; si simili modo Philosophiam nostram pertractare volueris, quo in acquirendo gradu secundo

cognitionis mathematicæ utendum esse docuimus; ita quoque, quoad Artem inveniendi, eundem ulterius perficies, si in Philosophia facias, quæ tertii cognitionis gradus acquirendi gratia fieri debere præcepimus. Quodsi cui hoc nimis molestum videtur; is sciat velim, quæ ardua sunt, ea non facili opera acquiri. Qui vult finem, media velit necesse est, quæ ad eundem ducunt.

§. 107. Satis itaque docuimus, quomodo instituendum sit studium Matheseos, ut intellectus, quantum datur, perficiatur. Unicum adhuc superest, de quo nonnulla mihi dicenda sunt, antequam ad alia progrediar. Sunt qui sibi aliisque persuadere conantur, quasi methodus mathematica Philosophiæ minus conveniat; multo autem adhuc minus in Theologia, Jurisprudentia, & Medicina eidem locus sit. Equidem hoc dubium jam sustulimus in Discursu præliminari, quem Logicæ præmisimus, de Philosophia in genere, ubi (§. 139) identitatem methodi philosophicæ ac mathematicæ demonstravimus; & in Horis nostris subsecivis ostendimus, quod & quomodo methodus mathematica adhiberi possit in Jurisprudentia, & Scriptura sacra interpretanda: ex nostra tamen definitionum & demonstrationum propositionum analysi, singulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifestum est, omnem methodum mathematicam, qua usus est EUCLIDES, huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus usum in veritate cognoscenda, qui ad evidentiam acquiritur, qua veritas indubitato agnoscitur. Hinc manifestum est, non alias homini esse facultates, quibus in cognoscendis mathematis utitur, quam quibus opus habet ad cognoscendam veritatem quamcunque aliam; nec alium esse facultatum earundem usum in Mathesi addiscenda, vel etiam in veritatibus mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, sive ab aliis inventa fuerit, sive demum nostra opera detegenda. Mathesis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoscendi usus fieri debeat, si ad liquidam veritatis cognitionem pervenire decreveris: id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abstrahi possunt (§. 103), ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas sit lapis Lydius genuinæ Logicæ (§. 26 *Log.*). Quotquot igitur in ea sunt opinione, quasi Mathesis propriam sibi habeat methodum, quæ extra eam nullius sit usus; aut methodi mathematicæ vim ac potestatem, aut genuinum facultatum cognoscendi ad certam veritatis cognitionem consequendam usum, aut utrumque, ignorant. Hinc etiam videas, objectionem moveri ab iis, qui vel sunt in omni Mathesi hospites ac peregrini, vel legitimi usus facul-

facultatum cognoſcendi prorſus ignari.

§. 108. Denique noſtra Mathematum tractatio manifeſto loquitur, eum, qui in Matheſi addiſcenda præſcriptum a nobis morem obſervat, ſequi modum cogitandi maxime naturalem. Primus hoc animadverti, cum ad demonſtrationum analyſin, præſcripto a nobis modo factam, animum attenderem, & publice hoc monui in Lexico mathematico, idemque poſtea uberius docui in Pſychologia. Naturalis cogitandi modus eſt, qui leges animæ exacte ſequitur. Quis igitur adeo veſanus eſt, ut ſibi perſuadeat, uſum facultatum aliis legibus accommodandum eſſe in Philoſophia, Theologia, Jurisprudentia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

§. 109. Etſi autem Matheſis univerſa faciat ad intellectum perficiendum, ſi eo, quem præſcripſimus, modo tractetur; ut adeo optime ſibi conſulat, qui Elementa noſtra omnia eodem ſtudio perluſtrat: quoniam tamen non omnibus tantum ſuppetit temporis ſpatium, quantum huic labori ſufficit; unusquiſque eo uſque progredi poterit, quantum conceditur. Arithmeticæ autem & Geometriæ pertractatio prorſus indiſpenſabilis eſt; quæ ideo præmittenda, antequam ad Logicam animum appellis, & hinc ad reliquam Philoſophiam te conferas. Immo, ſi cui volupe fuerit integra Matheſeos noſtræ Elementa perluſtrare; ei tamen non ſuaſerim, ut de Philoſophia omnem cogitationem abjiciat, donec ſtudium Matheſeos omne fuerit abſolutum: ſed potius autor ſum, ut, Arithmetica & Geometria abſoluta, ſtatim Logicæ operam ſuam addicet, & in Matheſi juxta Philoſophiam pergat. Ita enim futurum certus ſum, ut ſtudium Matheſeos ac Philoſophiæ ſibi mutuo lucem affundant.

§. 110. Supponimus autem Philoſophiam eadem methodo eſſe conſcriptam, qua in Elementis Matheſeos utimur. Quamobrem cum id ante nos fecerit nemo; nec alia ipſi ſcripta philoſophica commendare valemus, niſi Opera noſtra philoſophica, Latino inprimis idiomate conſcripta. Quodſi prolixitatem obtendas, nulla ſane ratio eſt, cur ea te deterreat. Etenim ſi non ante ulterius progredi volueris, quam ſingula rite intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris; multo minore temporis ſpatio ſcripta noſtra utiliter perlegere potueris, quam breve quoddam compendium, communi more conſcriptum; modo in pertractanda Arithmetica & Geometria induſtriam tuam deſiderari paſſus non fueris. Immo valde vereor, ne ſi præſcripto a nobis more in Arithmetica & Geometria fueris verſatus, lectio aliorum ſcriptorum philoſophicorum quam noſtrorum, te efficiat ſtudii philoſophici deſertorem, aut in Scepticismum dedu-

deducat. Absit, ut quis existimet hæc arroganter a nobis dicta esse, nimia in nos fiducia, in contemtum aliorum! Veritati enim unice litamus, non loquentes nisi experta, quæ ratio defendit. Ab aliorum contemtu procul remoti, aliena merita suspicimus & extollimus; neminem in scriptis nostris nominatim perstringimus; iis etiam parcimus, qui in lacessenda fama nostra quidvis sibi licere arbitrantur; probe memores eam non dependere a laudibus aliorum, sed a factis propriis; omni animi contentione omnique industria ac diligentia in id enitentes, ut calumnias factis contrariis refellamus. Alienum a nobis esse existimamus, ut doctrinis, quas profitemur, facta sint contraria. Nemo igitur nobis vitio vertet, si aliorum utilitati velificaturi ea dicimus, quæ veritas imperat, citra injuriam alterius. Minus toleranda potius ambitio est, si quis non sine detrimento aliorum veritatem reticeri vult, ut videatur qui non est. Ceterum, si quis consilio nostro aurem benignam dare voluerit; re ipsa experietur vera omnino esse, quæ dicimus.

CAPUT III.

De Studio Arithmeticæ, Geometriæ, & Trigonometriæ planæ in specie.

§. 111. Arithmeticæ, Geometriæ, & Trigonometriæ planæ nostra Elementa ita conscripsimus, ut satisfaciant omnibus, quocunque fine ad Arithmeticam & Geometriam addiscendam appellunt. Ea enim digessimus, ut nullo negotio prætermittantur, quæ salvo fine, quem quis sibi præfixum habet, ignorare potest; & ea iisdem inseruimus, quæ nisi eo excidere voluerit, ignorare nequit.

§. 112. Qui Arithmeticam addiscit, vel soli praxi studet, theoriam non curat, vel hujus etiam rationem habet. Qui soli praxi operam navat, is vel solum ejus usum in vita communi, vel usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus, intendit. Idem præterea, vel in nuda praxi acquiescere vult, vel veritatem quoque praxeos perspicere avet. Cui theoria curæ cordique est, is eandem, vel propter usum in ceteris Matheseos partibus, vel propter usum in perficiendo intellectu, appetit. Videamus igitur, quomodo Elementa nostra Arithmeticæ pro multiplici hoc discentium scopo satisfaciant.

§. 113. Qui soli praxi operam navant,

vant, & quidem in usum vitæ communis; iis satisfaciunt problemata de Algorithmo in numeris integris, & fractis, quæ capite secundo & quarto continentur, una cum problemate 33, quod capite sexto legitur, de numero tertio, vel quarto, proportionali inveniendo, una cum scholiis, in quibus idem problema ad varios casus in vita communi obvios applicatur. Qui vero usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus intendunt; illi superaddere debent problemata de extractione quadratæ ac cubicæ radicis, quæ capite quinto leguntur, problemata de logarithmis, fractionibus decimalibus & fractionibus sexagesimalibus, quæ capite octavo, nono & decimo extant. Fractiones sexagesimales omittere possunt, qui calculi Astronomici nullam habent rationem. Immo eodem carere possunt, qui ultra ea non progrediuntur, quæ in nostris Astronomiæ, & Chronologiæ Elementis traduntur.

§. 114. Problemata a definitionibus & theorematis satis aperte distinguuntur, suoque nomine insignita numerantur, ut adeo nullo labore opus sit ad ea evolvenda, & agnoscenda. Ut adeo usus quidam hinc elucescat, cur in Mathesi veritates singulæ suis nominibus compellentur, ac numerentur; etiamsi in citationibus ad paragraphum provocemus, in quo principium istud continetur, quo in demonstrando utimur.

§. 115. Quoniam in propositione, itemque in resolutione, occurrere solent termini, quibus nondum intellectis, nec propositio, nec resolutio intelligi potest; igitur necesse est, ut istorum terminorum definitiones ante expendat, quam ad problema accedat, qui praxin in eodem traditam discere studet. Ita ex. gr. problema secundum (§. 96 *Arithm.*) docet numeros quotcunque datos addere. Supponitur adeo definitio additionis, quæ traditur in anterioribus (§. 61 *Arithm.*). Quia vero nec definitiones intelliguntur, nisi intellectis terminis, qui eas ingrediuntur; si qui termini per notiones claras, sed confusas communes non satis perspicui sunt, ad definitiones eorum, quas in antecedentibus damus, recurrendum. Ita, in definitione additionis mentio fit numerorum homogeneorum. Quinam numeri sint homogenei, ex communi sermone notum non est. Quamobrem necesse est, ut ad definitionem numerorum inter se homogeneorum recurras, quam in anterioribus exhibemus (§. 35 *Arithm.*). Quomodo autem hæ definitiones sint expendendæ, patet ex iis, quæ de primo cognitionis gradu acquirendo, quoad definitiones, præcepimus.

§. 116. Problematum resolutiones statim applicandæ sunt ad exempla, quemadmodum in ipso textu a nobis factum. Nimirum regulæ, quibus præcipiuntur, quæ fieri debent, suis

ſuis numeris diſtinguuntur, ut ſingulis ſtatim ſatisfieri poſſit. Collocantur eo ordine, quo ſingula fieri debent; ut, lecta regula una, ſtatim fiat quod eadem præcipitur. Nihil adeo applicatio ad exempla habet difficultatis; ita ut totam Arithmeticam practicam proprio marte addiſcere poſſis, niſi fueris valde impatiens; aut ſi, duce alterius, unam operationem arithmeticam didiciſti, ceteras deinde, abſque ullo duce, tibi familiares reddere queas.

§. 117. Si quis veritatem reſolutionis problematum perſpicere voluerit, neceſſe eſt demonſtrationes addat. Citationes in iiſdem adductæ oſtendunt principia, quibus opus habet. Neque opus eſt, ut theoremata, quæ capite primo proponuntur, demonſtret; ſed ſufficit ea ſumi, tanquam per notiones communes nota, abſque demonſtrationibus. Similiter ſufficit, ut ex capite 3 nonniſi definitionem rationis, nominis rationis, rationum identitatis & proportionis in genere, ejuſque ſpecierum, proportionis continuæ atque diſcretæ (§. 126, 136, 149, 155, 156) ſibi cognitam ac perſpectam reddat, una cum theoremate 20 & 21, quorum demonſtrationes omittere poteſt, in illuſtratione per exempla facta acquieſcens. Problema 36, de modo inveniendi logarithmum, prætermittere poteſt; immo totam de Logarithmis doctrinam tamdiu differre; donec, abſoluta Geometria, ad Trigonometriam accedere voluerit.

§. 118. Quodſi vero theoriam expetit, ſive propter uſum in ceteris Matheſeos partibus, ſive intellectus perficiendi gratia, tota omnino Elementa pertractanda ſunt, eo modo, quem in capite primo pro acquirendo gradu cognitionis ſecundo præſcripſimus, ut adeo nihil ſuperſit, quod hic veniat addendum.

§. 119. Quamvis oſtenderimus, quid faciendum ſit, ſi quis nudæ praxi operam navat, nulla prorſus habita ratione theoriæ; hujus tamen neglectum nemini ſuademus; quin potius conſultum ducimus, ut Arithmetica, etiam practica, in uſum vitæ communis, non ſine demonſtrationibus addiſcatur. Ut enim alios taceam uſus; non modo tota Arithmetica practica facilius addiſcitur; verum etiam memoriæ multo firmius infigitur, non ſine temporis compendio; & ubi quorundam oblitus eſt, abſque multa difficultate in memoriam revocantur: id quod inprimis uſui eſt, ubi arithmeticis operationibus non quotidie habueris opus.

§. 120. Ceterum hinc liquet, quod, abſque ullo negotio, ex Elementis noſtris Arithmeticæ exſcribi poſſit Compendium Arithmeticæ practicæ, in uſum illorum qui ſolam Arithmeticam practicam, propter uſum in vita communi, expetunt; levi ſumtu ab iis comparandum, qui

eodem opus habent. Quodsi plura desiderentur exempla, ea cumulare difficile non est. Etenim non alia re opus est, quam ut in locum numerorum, quos exemplum sistit, substituantur quicunque alii. Quodsi demonstrationes non negligantur, quemadmodum ne id fiat modo suasimus (§. 119); paucis exemplis obtinetur, quod non sine multis consequi datur, ubi theoriam omnem abjicere volueris.

§. 121. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ii memores esse debent ejus, quod in scholio definitionis primæ (*§. 2 Arithm.*) monuimus; scilicet quod ab Arithmetica practica, tanquam methodo inveniendi speciali, regulæ inveniendi generales abstrahere liceat. Cumque in scholio generali ad Algorithmum numerorum integrorum (§. 125 *Arithm.*), istiusmodi regulas abstraxerimus, ut exemplo quodam præiremus; & in genesi numerorum quadratorum & cubicorum (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*), nec non in theoria numerorum æquidifferentium (§. 327, 329 *Arithm.*) artificia quædam analytica docuerimus; ad hæc inprimis animum advertere debent, qui non modo in Arithmeticis, Artem inveniendi, sed eam etiam generalem, curæ cordique habent. Si prolixioribus esse liceret, addi poterant multa specialia, de quibus alibi commodius dicetur; ubi nimirum Artem inveniendi ea methodo trādituri sumus, qua huc usque Logicam & Metaphysicam universam, una cum Philosophia practica universali, tradidimus. Ita ex. gr. quæ (§. 142 *& seqq. Arithm.*) de generibus & speciebus rationum rationalium docentur, insinuant modum ex dato genere inveniendi genera inferiora eorundemque species: quo etiam Dignitatum divisio facit (§. 252 *Arithm.*). Huc etiam pertinent fictiones, quarum exemplum habemus in fractionibus spuriis (§. 221, 222 *Arithm.*)

§. 122. Qui Geometriæ studio sese dedunt; similiter aut soli praxi student, theoriæ nullam prorsus rationem habentes, veluti agrimensores & architecti militares; aut in praxi nuda acquiescere nolunt, sed ejus demonstrationes expetunt. Qui vero theoriæ addiscendæ sese dedunt, aut usum in ceteris Matheseos partibus intendunt, aut hoc faciunt intellectus perficiendi causa.

§. 123. Quibus in nuda praxi acquiescere visum est; iis satisfaciunt definitiones & problemata, omissis demonstrationibus. Nullum est problema, quod usui esse non possit, adeoque prætermittendum sit: sed definitiones quædam omitti possunt, veluti figuræ in genere, lateris, tangentis, secantis, &c. Sufficit enim didicisse definitiones angulorum & figurarum, atque lineæ perpendicularis, & linearum parallelarum Ceterorum notiones confusæ, ipso usu

terminorum, in casu dato insinuabuntur, quæ praxi soli intentis satisfaciunt.

§. 124. Quænam observanda sint circa definitiones, & problemata, eorundemque resolutiones, ex iis intelliguntur, quæ de acquirendo gradu primo cognitionis in anterioribus præcepimus (§. 5 *& seqq.*); nisi quod definitiones sequentes non opus sit resolvi in antecedentes, quia sufficit eas referri ad schemata oculis subjecta; cum non requiratur adæquata entium geometricorum notio, sed vel in confusa eorundem notione acquiescere possit.

§. 125. Praxis duplex est: alia, quæ exercetur in charta; alia, quæ in campo. Qui praxi unice se dat, eam exercere intendit. Non igitur sufficit resolutiones problematum intelligere; verum etiam requiritur, ut facias, quæ fieri jubentur. Ad praxin igitur in charta exercendam, ad manus esse debet circinus, regula, instrumentum transportatorium, norma, & parallelismus, una cum triangulo ex ligno ebenino, & scala modica; ad eandem vero in campo exercendam, baculi, cum catena, vel fune cannabino in pedes & decempedas illorumque digitos legitime diviso, una cum instrumentis ceteris, quorum usus explicatur.

§. 126. Juxta resolutionem problematis uniuscujusque instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo; ut videas, num ea facere possis, quæ jubentur. Quorum vero problematum resolutiones arithmeticæ sunt, adeoque calculo absolvuntur; eæ tentandæ sunt in exemplis non modo iis, quæ ipsimet in medium attulimus, verum etiam aliis; qualia comminisci haud difficile, ubi in locum numerorum datorum surrogantur alii pro arbitrio nostro. Quemadmodum enim consultum est, ut una eademque operatio, sive in charta, sive in campo, aliquoties repetatur, donec exacte facere possis quod jubetur; ita etiam exempla cumulanda. Hoc nimirum non tantummodo facit, ut resolutionem problematis uniuscujusque rite intelligas, eandemque memoriæ firmius infigas; sed & ut habitum exacte faciendi, quod faciendum erat, acquiras. Qui enim praxin exercere vult, non modo intelligere debet, quid fieri debeat, sed & ut omni exactitudine id facere possit requiritur. Habitus docendo communicari nequit, sed crebro exercitio, seu idem sæpius faciendo acquiritur. Qui adeo docet, officio suo satisfecit, si ea tradit, quæ, ut recte facias quod faciendum, nosse debes.

§. 127. Quoniam multa dantur problemata geometrica, quorum resolutiones per calculum expediuntur; Geometria practica Arithmeticam practicam supponit. Illam igitur si addiscere volueris, hanc ante addiscas necesse est.

§. 128. Ex nostris adeo Elemen-

tis

tis Geometriæ, absque ullo negotio, Geometria practica extrahi poterat, ne verbo quidem immutato: cui quod utiliter addatur compendium Arithmeticæ practicæ, ex Elementis Arithmeticæ exscribendum (§. 120), nemo est, qui non videt (§. 127).

§. 129. Enimvero, etsi praxis absque theoria commode addisci possit, & Elementa nostra ita conscripta sint, ut brevissima ad eandem via ducant absque ulla theoria; meo tamen, si quid valet, consilio, omnes agrimensores & architecti militares, & si qui alii praxin geometricam exercere voluerint, tantum theoriæ sibi acquirere deberent, quantum ad praxin demonstrandam sufficit. Quemadmodum enim theoria accurata praxin accuratam parit; ita etiam probe intellecta exercitium praxeos reddit exactum. Immo succurrunt subinde in praxi casus nonnulli, in quibus hæret ac facile aberrat, qui theoria instructus non est. Non opus esse videtur, ut hoc multis rationibus adstruatur; qui enim consilio nostro aurem benignam præbere voluerit, veritatem dicti reipsa experietur. Nemo non novit, si plures agrimensores aream ejusdem campi investigent, haud raro magnum esse dissensum in quantitate ejus definienda; certo indicio, quod non eadem accuratione singuli fuerint usi, etsi omnem diligentiam adhibuisse sibi videantur. Diligentia oculata esse debet, quæ ab accuratione nulla in re deficit. Ut hæc oculata sit, theoriæ debetur.

§. 130. Equidem non diffitemur, theoriam adeo exactam non requiri in iis, qui Geometriam practicam exercent, qualem nos intellectus perficiendi gratia condidimus; unde & in Elementis nostris Germanicis ab ea abstinuimus eandemque in compendium contraximus. Quodsi tamen visum fuerit omnem retinere theoriam, quam dedimus; ea multiplici utilitate sese commendabit etiam praxin exercentibus. Per eam enim obtinebis, ut nulla in re patiaris desiderari attentionem tuam, & vel in minimis te præbeas circumspectum. Taceo, quod omnibus usui sit, si facultatum cognoscendi legitimum usum facere queant; & ipsa obligatione naturali, nemo negligere teneatur occasionem, qua eundem in potestatem suam redigere valet.

§. 131. Neque est quod excipias, agrimensoribus, & architectis militaribus, aliisque praxin geometricam exercentibus non convenire theoriam, sed eam captum ipsorum transcendere, immo ipsos eandem naturali quadam aversione fastidire: hoc enim quam sit a veritate alienum, & experientia me docuit, & ratio convicit. Si qui theoriam contemnunt, non alia de causa hoc faciunt, quam quod eam non didicerint, nec ignoti ulla sit cupido, & quod eadem in praxi sua carere posse sibi videantur. Aliter vero sentirent, ubi mature theoria eorun-

eorundem animis inſtillaretur. Quod vero eam capere nequeant, ſi rite eandem doceantur, adeo verum non eſt, ut experimento contrario refellatur. Ne difficultatem præter neceſſitatem faceſſas, doce ipſos primum praxin ſolam, ſed ea methodo, ut diſtincte concipiant ſingula, quæ fieri debent; quemadmodum nos urgemus: ita enim futurum, ut notionibus diſtinctis adſueti, quid inter has atque confuſas interſit facile internoſcant. Adde demonſtrationes, quas diximus, mechanicas; ut veritatem eorum, quæ docentur, experiantur: quam ubi percepiſſe ſibi videntur, eoſdem mone experimenta hæc loqui nonniſi veritatem in caſu ſingulari, nec reiterata eandem prodere in univerſali. Neque difficile eſt convincere quemvis a poſteriori, quod a particulari ad univerſale non valeat argumentatio, cum ubivis proſtent exempla, quibus idem doceri poteſt. Cum hoc modo excitaveris cupidinem ſciendi, quod ſcire delectet; commodum jam erit ad theoriam progredi. Et ubi quis in cognitionis gradu primo acquirendo noſtro more verſatus fuerit, ad ſecundum conſequendum præparatus accedit; in quo ſi denuo morem a nobis præſcriptum ſequaris, abſque ulla moleſtia in theoria addiſcenda progredi dabitur.

§. 132. Qui theoriæ operam navant, propter uſum in diſciplinis ceteris mathematicis; illi non modo omnes propoſitiones ſibi familiares reddere, verum etiam habitum demonſtrandi comparare tenentur. Quamobrem univerſa Elementa Geometriæ eo modo pertractare debent quem, acquirendi ſecundi & tertii cognitionis gradus cauſa, capite primo præſcripſimus; & definitiones, ac propoſitiones pure enunciatas memoriæ firmiter infigere tenentur: quo plurimum confert accurata demonſtrationum analyſis, in quibus definitiones & propoſitiones pure enunciatæ tanquam principia adhibentur. Hoc enim pacto demonſtrationum ſequentium evolutio repetitionis vicem ſuſtinet, qua definitiones ac propoſitiones pure enunciatæ memoriæ mandantur, & diſcenti familiares evadunt; quales ſupponuntur ad ceteras Matheſeos partes abſque difficultate pertractandas.

§. 133. Quod problemata attinet, quæ praxin continent; notandum eſt, praxin in charta exercendam uſui eſſe in ceteris Matheſeos partibus; quæ vero exercetur in campo, ea nullum habere in reliquis uſum, niſi in Architectura militari, & in Aſtronomia, atque Geographia, nonnulla ex iis cognita atque perſpecta ſupponi. Praxis accurata in charta magis ornat Mathematicum, quam neceſſaria eſt, ſi in ſola theoria acquieſcere voluerit. Neque is multo inſtrumentorum apparatu indiget; ſed ſufficit regula, cum circino, & graphio, cujus tamen vicem ſupplet penna

na ex corvorum alis evulsa (§. 123 *Geom.*). Problemata, quæ praxin in campo docent, non tamen prorsus negligenda. Eorum enim theoretica cognitio discentem præparat ad ceteras Matheseos partes facilius addiscendas. Necesse igitur est, ut resolutionem distincte concipiat, & demonstrationem nostro more resolvat, ac analytice exprimat; omni cura ac sollicitudine animi observans, quæ de iis, secundi cognitionis gradus acquirendi gratia, præcepimus, qui theoreticam Matheseos universæ cognitionem curæ cordique habet.

§. 134. Eadem tenenda sunt, si quis, intellectus perficiendi gratia, Geometriæ studet; sive tantummodo ad secundum cognitionis gradum, sive simul ad tertium extra Mathesin adspiret. Utilitatem percipiet qui, in Philosophia morali & civili, accurata diligentia versari, eandemque ad usum vitæ transferre, & theoriam physicam ad Artes perficiendas applicare voluerit.

§. 135. Qui a Geometria & Trigonometria ad Algebram progredi voluerit, is cognitionis gradum tertium in Mathesi intendit. Quamobrem ea ipsi observanda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus capite primo. Inprimis autem animum attendere debet ad præparationem, quæ demonstrationi præmittitur; cum ea opus quoque habeat in resolutione problematum geometricorum in Algebra, & in solutionibus, præsertim algebraicis, problematum in ceteris Matheseos partibus.

§. 136. Elementa Arithmeticæ & Geometriæ, per Mathesin universam, & in omni cognitione mathematica, quam philosophicæ contra distinguimus (§. 14 *Disc. prælim.*), apprime necessaria sunt, ita ut eorum notitia nemo carere possit, qui in ceteris Matheseos partibus ad cognitionis gradum secundum atque tertium adspirat. Quo majore igitur studio ac industria in illis fuerit versatus, eo felicius in reliqua Mathesi progredietur. Id etiam obtinebit, quod hodie in plerisque Mathematicis, & in seipso desideravit Vir summus NEWTONUS (§. 101), ut methodum Geometrarum veterum cum algebraica recentiorum conjungat, & utriusque compos reddatur: cujus insignem experietur usum, si ad summa quævis in Mathesi contendat, & exemplo NEWTONI naturam mathematice tractare voluerit; inprimis si quando volupe fuerit mathematicam rerum naturalium cognitionem in systema redigere, quantum fert ætas nostra, præsertim ubi ante officio suo satisfecerint Philosophi.

§. 137. Trigonometria plana, non minus quam Sphærica, primum in usum Astronomiæ fuit inventa. Quamobrem indispensabilis usus est in Astronomia, adeoque eam negligere nequit, qui nobilissimæ huic scientiæ operam dare decrevit. Postea

quoque

quoque ad praxin geometricam in campo fuit applicata; quemadmodum capite ultimo Trigonometriæ planæ ostendimus. Quamobrem eidem quoque studere tenentur, qui praxin geometricam in campo exercere voluerint. Applicata eadem fuit ad varia problemata in Geographia, Hydrographia, Gnomonica, Mechanica, Architectura militari, & Opticis disciplinis: ut adeo commendanda veniat ad hasce quoque Matheseos partes animum appellentibus. Multo igitur illustrior est ejus usus, quam qui olim fuerat.

§. 138. Qui in sola praxi acquiescunt, iis satisfaciunt perpauca ista problemata, quæ capite secundo continentur; addituri ea, quæ continentur tertio, ubi Geometriam practicam curæ cordique habent. Hoc unicum notandum est, quod usum Canonis sinuum & tangentium, una cum Canone logarithmorum tam sinuum atque tangentium, sibi familiarem reddere teneantur, qui in usum praxeos Trigonometriam planam addiscunt; additis problematis, quibus in Arithmetica usus logarithmorum docetur (§. 349 *& seqq. Arithm.*), una cum definitione logarithmorum, & theorematis eorum naturam explicantibus (§. 334 *& seqq. Arithm.*); sed absque demonstratione.

§. 139. Exempla, quibus calculum trigonometricum illustravimus, adeo distincte repræsentavimus, ut ideam exemplarem resolutionis problematum animo insinuent, & resolutionis vicem tueri possint. Quamobrem ii, quos sola praxis juvat, eandem sibi familiarem reddere tenentur: id quod uno alteroque exemplo facile obtinetur. Exempla autem complura facile comminiscitur, qui numeris in exemplo proposito datis substituit pro arbitrio alios. Inprimis etiam suademus omnibus, quotquot praxin geometricam in campo exercere voluerint, ut exempla proprio marte addant problematis, quæ hunc in usum traduntur capite tertio. Reperiuntur autem ad imitationem eorum, quæ dedimus capite secundo. Nimirum non alia re opus est, quam ut data numeris exprimantur: id quod nihil difficultatis habet; præsertim cum in expendendis problematis data a quæsitis semper veniant distinguenda (§. 26). Quodsi hoc feceris, calculus erit idem, qui in problematis citatis: quæ etiam ratio est, cur eundem in textu non apposuerimus, ne præter necessitatem essemus prolixiores.

§. 140. Qui praxin oculatam desiderant, vel theoriæ tantummodo rationem habent; illos demonstrationes superaddere & in Trigonometria eodem modo versari debere, quem pro secundo & primo cognitionis gradu acquirendo supra præscripsimus, me vel tacente, intelligitur. Nihil adeo prætermittere tenentur, quæ in Elementis nostris continentur. Et quam-

quamvis Canon ſinuum atque tangentium, cum naturalis, tum artificialis, jam fuerit conſtructus, ut nullus amplius problematum, quæ in capite primo in hunc finem traduntur, videatur uſus; ea tamen negligenda non ſunt, ut appareat, quomodo Canones iſti conſtrui potuerint, & quomodo ex theoria praxis, ad quam tendit, deducatur.

§. 141. Inprimis hoc proderit iis, qui ad cognitionis gradum tertium adſpirant. Ex hiſce enim perſpiciunt, quomodo ex cognitis alia incognita ratiocinando colligantur, & quomodo haud raro praxes prorſus inexpectatæ eædemque longe utiliſſimæ ex theoriis deriventur, quarum tantam prævidere non licebat utilitatem. Sane non alia de cauſa, poſtquam Canon ſinuum & tangentium jam fuit conſtructus, Mathematici tamen recentiores alios eoſdem conſtruendi excogitarunt modos, quam quibus uſi ſunt illorum conditores. Non alia de cauſa, poſtquam docuimus Canonis ſinuum atque tangentium conſtructionem, adjecimus ſcholion (§. 27 *Trigon.*), in quo monemus, eundem adhuc multis aliis modis conſtrui poſſe; laudavimuſque URSINUM, qui nonnulla præclara dedit, & in Algebra, ubi de ſerierum doctrina agitur, oſtendimus, quomodo pro ſinibus & tangentibus, nec non pro logarithmis reperiantur ſeries infinitæ, ex quibus per approximationem deducuntur numeri, qui ſatisfaciunt.

§. 142. Trigonometria non modo pars quædam Artis inveniendi ſpecialis eſt, cujus uſus in aliis Matheſeos partibus elucet (§. 137); ſed tota etiam ita digeſta, ut appareat, quomodo ſingula fuerint inventa, modo obſervare volueris, quæ de acquirendo cognitionis gradu tertio præcepimus capite primo. Ab ea igitur regulas generales Artis inveniendi non modo abſtrahere licet; verum ſi præſcripto a nobis modo, ad quem hic provocamus, pertractetur, ad ipſam quoque Artem inveniendi acquirendam aliquid conferet. Quamobrem ſtudium trigonometricum rite inſtituendum tam iis, qui ad tertium cognitionis gradum in Matheſi adſpirant, quam illis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, commendandum.

CAPUT IV.

De Studio Algebræ, ſeu Analyſeos mathematicæ in ſpecie.

§. 143. ANalyſis mathematica eſt ipſa Ars inveniendi, qua hodie utuntur Mathematici in veritatibus mathematicis inveſtigandis. Huic adeo operam dare debent, quotquot ad cognitionis gradum tertium in Matheſi

Matheſi adſpirant. Etſi enim demonſtrationum more noſtro facta reſolutio etiam analytica ſit, ut eodem modo ex hypotheſi data inveniri poſſit, quo demonſtrandum quod demonſtratur; non tamen iis detegendis ſufficit, ad quæ Analyſis recentiorum ducit, tota vulgo Algebræ nomine appellari ſolita. Etenim, per Algebram, paucis cognitis, invenire licet quæ, ſi more veterum detegenda eſſent, longam rerum inventarum ſeriem ſupponerent. Quid, quod facili labore eruantur, quæ Herculeo inveſtiganda eſſent? Hæc ſane ratio eſt, cur inventa Mathematicorum recentiorum longiſſimo intervallo poſt ſe relinquant inventa Veterum, & quod uno ſeculo plura fuerint detecta, quam tot ſeculis inveniri potuerint, quibus Matheſis antea fuit exculta. Sane ſi ARCHIMEDES & APOLLONIUS noſtro ævo reviviſcerent; in ſtuporem raperentur, viſis inventis recentiorum, quæ per Algebram fuerunt in apricum producta: neque enim unquam ſibi perſuaſiſſent, patere ad talia mortalibus aditum.

§. 144. Non tamen omnia per calculos algebraicos erui poſſunt, quæ ad Geometriam ſpectant. Patet id ex ipſa Geometria elementari. Etenim quæ ibidem de lineis perpendicularibus, de paralleliſmo linearum, de angulis, de congruentia & ſimilitudine triangulorum, aliiſque nonnullis demonſtrantur, per Algebram inveſtigari nequeunt. Pendent enim hæc a ſitu linearum, quem ad ſe invicem habent. Calculus vero algebraicus eſt calculus magnitudinum, non ſitus. Unde LEIBNITIUS in Analyſi recentiori adhuc deſiderari monuit calculum ſitus, a calculo magnitudinum prorſus diverſum; quem tamen nec ipſe dedit, nec dedit adhuc alius, ſed in deſideratis numeramus.

§. 145. Similiter Analyſin Veterum, qualem loquitur noſtra demonſtrationum analyſis, non eam eſſe qua, Algebra inventa, carere poſſimus, haud difficulter oſtenditur. Etenim antequam problemata geometrica, vel alia in Matheſi mixta ad Geometriam puram reducta, per Algebram ſolvuntur, reducendæ ſunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo ſupponit præparationem methodo Veterum inveniendam, verum etiam ipſamet per eandem methodum eruenda. Accedit ſubinde occurrere problemata, etiam in altioribus, quæ methodo Veterum multo brevius & elegantius ſolvuntur, quam per calculum algebraicum, qui haud raro admodum perplexus & nimis longus eſt. Accedit, quod abſque omni theoria calculo algebraico minime ſit locus. Hinc qui problemata phyſico-mathematica, vel etiam mechanico-phyſica ſolvunt, quædam tanquam cognita ſumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut ſumant nondum ſatis explorata, vel ſi ea demonſtrare voluerint, quæ certa ſunt & methodo Veterum

rigide demonſtrari poterant in dubitationem adducant; ut adeo, quæ per calculum ex aſſumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel ſuſpecta reddantur acutioribus, rigori Veterum adſuetis. Immo nullum eſt dubium, quin plura irrepſerint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum reviſione quadam indigerent, & haud pauca firmiori fundamento ſuperſtrui mererentur. Nec alia ratio eſt, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controverſiæ, quales Veteribus erant ignotæ. Optime igitur ſibi conſulunt, qui methodum Veterum cum algebraica Recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum NEWTONO (§. 101), quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc hodie properent, qui inter Mathematicos eminere volunt.

§. 146. In Analyſi noſtra, primo loco occurrit Arithmetica ſpecioſa, quam etiam literalem appellare ſolent. Primo loco agitur de ſignis tam primitivis, quam derivativis. Occurrunt nempe ſigna quantitatum, & operationum arithmeticarum, quas vulgo ſpecies Arithmeticæ vocant. Quantitates, cum ſint numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), per determinatos explicabiles ſunt. Quamobrem ſuadendum tyronibus, ut literas, quibus indigitantur quantitates, per plures numeros diverſos explicent. Quoniam vero eædem quantitates etiam ſub ſe comprehendunt quamlibet magnitudinem; igitur non minus conſultum eſt, ut etiam per magnitudines, veluti per lineas, explicentur. Linearum enim, & magnitudinum quarumvis determinatarum ratio ad aliam homogeneam, quæ pro unitate ſumitur, per numeros determinatos definiri poteſt; cum numeri revera omnes, tam rationales, quam irrationales, nonniſi rationem ad unitatem exprimant. Nimirum, quod literis generaliter, hoc eſt, indeterminate deſignatur, per numeros determinate exprimitur; itidemque per magnitudines determinatas; quatenus harum ratio ad aliam homogeneam pro unitate aſſumtam numeris, ſive rationalibus, ſive irrationalibus, exprimi poteſt: ſit ita, quod hoc variis modis fieri poſſit pro diverſitate ejus, quæ pro unitate ſumitur, nec ſemper hoc præſtare valeamus. Qui theoriam entis univerſalis, ab ipſa Matheſi abſtrahendam, perſpectam habet, multo intimius quæ dixi perſpiciet, quam qui ab omni Philoſophia prorſus alienum habet animum.

§. 147. Qui Artem inveniendi in genere curæ cordique habent; modo univerſalia a ſpecialibus abſtrahere didicerint, multa animadvertent ad Characteriſticam univerſalem ſpectantia, quam eſſe partem Artis inveniendi ipſa Arithmetica univerſalis, & calculus differentialis docet, ſuoque oſtendemus loco, ſi quando ad Artem inveniendi explicandam ordo nos deducet. Ipſa autem

Ars Characteristica universalis plurimum lucis affundet, tum notationi numerorum in Arithmetica, tum signis, quibus utimur in calculo literali, sive communi, sive differentiali. Ceterum hic notandum est, signa primitiva, quæ in alia resolubilia non sunt, respondere notionibus confusis; derivativa vero distinctis: quemadmodum suo loco demonstrabimus. Qui enim novit differentiam, quæ inter notiones distinctas & confusas, quoad usum earundem, intercedit, quantæ sit utilitatis huc adverti animum facile perspiciet.

§. 148. Ipsum algorithmum in integris satis perspicue explicavimus. Tyrones sibi eundem familiarem reddent, ubi diversis modis exempla literalia explicaverint per numeros determinatos, si ita visum fuerit, etiam per concretos, quemadmodum ostendimus (§. 28, 30 *Analys.*). Qui in Arte inveniendi generali proficere volunt, iis consultum est, ut ex ipsis hisce exemplis in numeris concretis datis addiscant, quomodo algorithmus literalis ex notionibus communibus deducatur, per quas primum inventoribus innotuerunt regulæ, quibus in eodem utimur; quamvis idem, utut non eadem facilitate, jam ex Elementis Arithmeticæ ac Geometriæ addisci poterat. Plurimum enim prodest ut noris, omnem tandem cognitionem humanam ex notionibus communibus fuisse deductam, in quocunque scientiarum genere. Et in Ontologia jam me monuisse memini, EUCLIDEM Elementa sua reduxisse ad notiones communes; consequenter, per ea, omnem Mathesin. Hoc notasse etiam usui erit in Mathesi mixta: demonstrabitur autem in Arte inveniendi generali, aliter fieri hoc minime posse.

§. 149. In multiplicatione quoad usum signorum fictiones occurrunt, veluti si quantitas sive positiva, sive negativa, per privativam multiplicanda venit (§. 34, 36 *Arithm.*). Unde liquet usus fictionum, ad conservandam notionum universalitatem. Etsi autem regulas, in subsidium vocata Geometria, demonstravimus; ut ad imaginationem reducantur, quæ vi intellectus concipienda; consultum tamen est, ut tyrones exempla statim in numeris addant, in iis regularum veritatem perspecturi, vel ipsas etiam regulas ex iisdem deducturi, quemadmodum in Elementis Germanicis feci. Clarius enim in numeris liquet, cur addendum sit, quod plus fuerat subtractum, vel subtrahendum, quod plus fuerat additum, ubi conceptibus universalibus, utpote nimium abstractis, nondum fueris adsuetus: id quod initio studii algebraici supponi nequit.

§. 150. Algorithmus fractorum literalis cum numeroso idem est; cum quantitates, quæ literis designantur, sint numeri indeterminati; regulæ

autem hujus algorithmi ex notione numeri generali fluant; consequenter ex iis deducantur, quæ numeris determinatis & indeterminatis communia sunt. Hinc tyrones sibi consulunt, si literis numeros substituant determinatos, ut clarius appareat, nihil hic occurrere diversitatis. Quæ vero problemate 7, & ejus corollariis, ac scholiis (§. 45 *& seqq. Analyſ.*), de seriebus infinitis per divisionem prodeuntibus docentur, initio prætermitti possunt ab iis, quorum attentio facile defatigatur; donec multo inferius in doctrina de seriebus infinitis iisdem habuerint opus, ubi attentio nihil amplius difficultatis facessit, cum multo usu jam major gradus fuerit acquisitus.

§. 151. Multiplicatio & divisio potentiarum, & elevatio ad potentiam, atque extractio ex radice, a Logarithmorum doctrina pendet, quam in Arithmetica tradidimus. Quamobrem, nisi hic in tenebris versari volueris, illam ante tibi perspectam reddere debes, quam ad Algorithmum dignitatum accedas. Inprimis autem hic notanda est reductio quantitatum irrationalium ad formam rationalium, & unitatis ad x^0 (§. 57, 55 *Analyſ.*), quoniam hæc reductio non modo multiplicem, eundemque prorsus eximium & inexpectatum, in altioribus habet usum; verum etiam apertissime loquitur, quantum intersit inter characteres primitivos & derivativos: id quod Arti characteristicæ generali, quam partem quandam Artis inveniendi esse supra jam monuimus, notiones fœcundas suppeditat.

§. 152. Usus hujus reductionis analyticus in Arithmetica irrationalium conspicitur; præsertim ubi ea, quæ nos de eadem tradimus, cum illis conferre velis, quæ vulgo in eadem docentur, veluti cum calculo irrationalium in Elementis Algebræ OZANAMI. Sane tractatio nostra tota vere analytica est, qualem requirit Analysis recentiorum mathematica. Et qui ad cognitionis gradum tertium adspirant, hinc discunt, quemnam facere teneantur characterum derivativorum usum; cumque inferius per Algebram eruamus (§. 146 *Analyſ.*) quæ hic ex charactere derivativo, regulis Artis characteristicæ generalis convenienter, deducuntur; hinc porro discere licet, quomodo ex characteribus, derivativis, modo magis naturali & ad Analysin Veterum propius accedente, eruantur, ad quæ Algebra via quadam extraordinaria ducit: sit ita quod tyrones, quibus intimius singula perspicere nondum datur, Algebræ magis fidant, quam Arti characteristicæ, quemadmodum indigitavi in scholio problematis 19 (§. 60 *Analyſ.*). Illustratur quoque doctrina fictionum in Arte inveniendi utilium, radicibus imaginariis, de quibus in scholio tertio problematis 13 (§. 71 *Analyſ.*), diximus. Et perplexa EUCLIDIS de

de irrationalibus doctrina, ope hujus characteristicæ, ab omni perplexitate liberari, eidemque plena lux affundi potest; ut non amplius habeant, quod de obscuritate illius conquerantur, qui eandem ex Elementis hodie vulgo eliminare solent.

§. 153. Quibus calculus irrationalium sub initium molestus est, ii eundem prætermittant, & statim ad usum calculi literalis in inveniendis theorematis se transferant, absoluto algorithmo integrorum & fractorum; donec multo usu calculum literalem magis familiarem sibi reddiderint, majusque acumen acquisiverint ejus applicatione, & attentione majori uti didicerint. In ipso autem progressu patebit, quandonam calculo irrationalium habeas opus; ut gradum sistere & ad ea, quæ in anterioribus neglecta fuerunt, regredi tenearis.

§. 154. Sola Arithmetica literalis sufficit ad invenienda longe plurima, quæ in Elementis *Euclideis* docentur; ita ut, qui eam didicit, absque ullo negotio eadem facilitate theoremata *Euclidea* reperire possit, qua exemplis illustrantur. Ostendimus hoc capite tertio. Neque in problematis resolvendis, quæ ibidem proponuntur, alia notanda sunt, quam ut attendatur, quomodo datorum denominatio fiat, & ut literis designatæ quantitates numeris quoque exprimantur; quo pateat quid intersit discriminis inter exempla universalia & singularia, & hisce illis lux quædam affundatur, qua indigent tyrones. Observandum tamen, calculum in casu singulari instituendum esse, juxta regulas calculi universalis seu literalis, ubi iste pleniori luce fulgere debet. Ex. gr. in problemate 20 (§. 81 *Analys.*) jubemur determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt. Diximus radicem unam n, alteram $n+1$. Dicantur in casu singulari 7 & $7+1=8$. Quodsi quadratum majoris per calculum universalem reperias, erit $7.7+2.7+1=64$; Quadratum minus $=7.7$, Differentia $2.7+1=14+1=15$. Ita nimirum constabit, calculum universalem etiam exerceri posse in numeris, & sic absque calculo literali eadem detegi posse, quæ per literalem eruuntur; quemadmodum & in Arithmetica fecimus, ubi v. gr. in genesin numerorum quadratorum & cubicorum inquisivimus. Consultius tamen est uti calculo literali, qui hoc commodo gaudet, ut numeri determinati ab indeterminatis sua sponte sese distinguant: cum si notis numericis uti volueris, artificiis demum opus sit, quibus hoc fiat. Ita in allato exemplo $2.7+1=14+1$, numerus binarius 2 est determinatus, idem in omnibus exemplis, sed 7 est indeterminatus, qui in omni exemplo alio alius. Collatio autem calculi literalis cum calculo universali, in exemplis singularibus, usui esse poterit

terit ad invenienda artificia, quibus absque ulla confusione calculus universalis in numeris utiliter exercetur. Nostrum non est ea hic docere uberius, quæ Ars inveniendi jure suo sibi vindicat. Etsi autem calculus universalis in numeris instituendus superfluus videri poterat, literali invento; falluntur tamen, qui ita sentiunt. Facit enim ad facile demonstrandum haud pauca in gratiam eorum, qui ad Analysin animum appellere nolunt, nec difficiles demonstrationes capiunt; quemadmodum patet per ea, quæ de genesi numerorum quadratorum & cubicorum in Arithmetica docentur. Neque nullus quoque ejus usus est in Analysi speciosa, prout ex sequentibus constabit. Taceo alia, quæ in ejus favorem dici poterant.

§. 155. Multa hic facillime, absque ullo fere negotio, eruimus theoremata, quæ in Elementis EUCLIDIS extant, eorumque plura erui poterant, nisi hæc specimina sufficerent. Alia vero investigavimus per Algebram. Enimvero jam supra monuimus (§. 144), per calculum literalem, qui nonnisi magnitudinum calculus est, non omnia in Geometria demonstrari posse theoremata, sed quædam pendere a situ; ad quæ investiganda & analytice demonstranda, peculiaris requiratur calculus situs. Quodsi Analysis situs fuisset reperta; non inconsultum foret integra Elementa EUCLIDIS analytice demonstrari; ut inter methodum Veterum, & Analysin Recentiorem clarius pateret differentia. Quodsi quis eam investigare voluerit, is novas condere tenetur definitiones situs notionem involventes; veluti quod *Punctum* sit situs sui unicum, quod *Circulus* sit figura plana, in cujus perimetro singula puncta ad punctum quoddam intra eam dato eundem situm habent, quod *Linea* una sit ad alteram *perpendicularis*, si punctum quodcunque in ea assumtum sit situs sui ad idem punctum alterius unicum. Dicitur autem *situs sui unicum*, quod ad aliam magnitudinem datam, seu punctum aliud datum, eum habet situm, ut nullum aliud præter ipsum eundem situm habere possit. *Eundem* vero *situm* habent, inter quæ idem extensum, veluti eadem linea recta poni potest (§. 5 *Geom.*). Præterea opus est novo calculo, calculo nempe situs: quem investigaturus perpendere tenetur, calculum in genere esse inventionem characteris derivativi ex aliis, sive primitivis, sive derivativis, per continuam æquivalentium substitutionem (§. 298 *Psych. empir.*). Hinc enim conficitur, diversos determinandos esse situs possibiles eorumque excogitandos characteres, & ut hos legitime combinare liceat, requiri axiomata quædam generalia aut, si mavis, regulas quasdam generales, quibus perficitur combinatio & substitutio.

Sed

Sed nobis minime vacat, ut in talibus investigandis ingenii nostri vires exerceamus, qui magnum adhuc campum emetiri tenemur, antequam Philosophiam universam ad umbilicum perduxerimus. Sufficit aliis monstrasse viam, qua sit ad metam contendendum. Reddat eandem proprio ingenio & propria industria perviam, qui hanc attingere voluerit.

§. 156. Quanta vero sit vis Artis characteristicæ, non modo ex singulis problematis, sed vigesimo præsertim nono, ejusque corollariis (§. 95 *& seqq. Analys.*) perspicitur; in quo binomium ad dignitatem quamcunque evehere docemur; quod deinde ad extractiones radicum (§. 98 *Analys.*), & ad infinitinomium ad dignitatem datam evehendum transferimus (§. 102 *Analys.*). Huc animum advertere debent non modo, qui in Analysi Recentiorum feliciter progredi voluerint, verum etiam qui eidem, Artis generalis inveniendi causa, operam navant.

§. 157. Quoniam vero non uno artificio analytico utimur in problematis istis per calculum literalem solvendis; singulis autem artificiis insunt generales notiones, quæ ad Artem inveniendi generalem spectant; eas inde abstrahere tenentur, qui Artis generalis inveniendi gratia in Analysi Mathematicorum versantur: ut vero hoc facere possint, acquirere sibi tenentur acumen pervidendi abstracta in concretis, quod quomodo comparetur docebimus in philosophia morali, ubi praxin virtutum intellectualium, inter quas etiam sibi acumen istud locum vindicat, expositcuri sumus. Quodsi vero quis in addiscenda Mathesi eo modo versatus fuerit, quem capite primo præscripsimus, & inprimis in repræsentatione definitionum, propositionum, & demonstrationum symbolica industriam suam exercuerit, atque inprimis ad animum probe revocaverit, quæ in scholio generali ad algorithmum integrorum de abstrahendis regulis generalibus, juxta quas intellectus in eodem dirigitur, inculcavimus; is se hujus acuminis compotem fieri animadvertet: quod quomodo fiat, nunc exponere non lubet, ne extra oleas evagari videamur. Quemadmodum vero Mathesis & Philosophia mutuas sibi suppetias ferunt; ita quoque ad acumen istud ipso usu acquirendum haud parum confert Logica, qualem nos tradidimus idiomate Latino. Immo Ontologia etiam, & Psychologia, adjumento esse poterit. Quamobrem autor fui, ut, absolutis Arithmeticæ ac Geometriæ Elementis, studium Philosophiæ cum mathematico conjungatur. Et si quis in Arte inveniendi generali ex studio Matheseos proficere voluerit; ei suademus, ut, postquam in Philosophia fuerit cum laude versatus, Mathesin universam denuo pertractet, & huc inprimis animum advertat, quod ad usum facultatum in veritate cognoscendâ

cenda usui esse potest. Nullum enim dubito fore, ut perspicillis philosophicis usus plus videat, quam cum iisdem destitueretur.

§. 158. Inprimis autem opera danda est, ut tempestive adsuefiamus formulis algebraicis, tam per numeros, quam per lineas, explicandis. Quamobrem consultum est, ut data exprimantur, tum numeris, tum lineis, & tam in formula substituantur pro literis numeri, quam figuræ construantur juxta formulam: id quod cum in præsenti capite facillime succedat, plurimum confert ad formulas per Algebram erutas, geometrice præsertim, minori molestia construendas. Ex. gr. in problemate 24 (§. 90 *Analys.*), partes totius sunt Q & q, & prodit aggregatum ex Q^2 & $Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$. Quodsi fiat $Q = 4$ & $q = 3$, erit $Q + q = 7$, $Q^2 = 16$, $(Q+q)^2 = 49$, adeoque $Q^2 + (Q+q)^2 = 65$. Sed $2Q = 8$, adeoque $2Q(Q+q) = 56$. Est vero $q^2 = 9$. Quare $2Q(Q+q) + q^2 = 65$. Habes itaque etiam examen, quali inprimis indigent tyrones, ut tanto clarius perspiciant, quod per calculum fuit erutum a veritate non esse alienum. Etsi enim exempla singularia non evincant veritatem in universali; tyronibus tamen magis satisfaciunt, quam si animum ad calculum advertentes nullibi a se aberratum esse observent. Neque destituitur summa probabilitate, si quidem formula analytica cum exemplo in numeris consentit. Quoniam enim numeri nullo consilio eliguntur, sed potius sumuntur, prout eos casus obtulerit; vix credibile est te casu incidere in numeros, qui ex ratione singulari satisfaciunt formulæ, in omni casu minime veræ. In præsenti casu dubium hoc esse nullum, quod quis movere poterat, ostendi nullo negotio poterat, si calculus universali ratione instituatur etiam in numeris. Etenim si $Q = 4$ & $q = 3$, habebis $2.\,4^2 + 2.\,4.\,3 + 3^2 = 2.\,4(4+3) + 3^2$, hoc est, $2.\,16 + 2.\,12 + 9 = 8(4+3) + 9$, seu $32 + 24 + 9 = 32 + 24 + 9$. Vides autem pro numeris 4 & 3 substitui posse duos alios quoscunque, ceteris semper eodem modo sese habentibus. Sed nolim tyrones talibus defatigari, nisi tempestive adsuefieri voluerint calculo, universali ratione in numeris instituendo: quo in casu consultum foret, ut numeri determinati, in omni casu iidem, qualis hic binarius ter occurrit, virgula transversa notentur, nempe ut scribatur $\not{2}.\,4^2 + \not{2}.\,4.\,3 + 3^2 = \not{2}.\,4(4+3) + 3^2$. Quodsi Q & q explices per lineas & construas tam quadratum ex composita $Q + q$, quam ex una Q, & deinde rectangulum ex composita Q & q in rectam Q bis sumtam atque quadratum lineæ alterius q, formulam geometrice repræsentabis. Sed utriusque figuræ æqualitatem intuitive non cognosces,

quemadmodum numerorum, qui calculo secundum formulam instituto prodeunt. Hoc tamen non obstante figurarum constructio non omni utilitate caret. Neque enim figuræ eum in finem construuntur, ut examinis vicem subeant; sed ut discamus, quomodo formulæ analyticæ geometrice construantur, & earum sensus per figuras explicetur. Subinde tamen accidit, ut non minus veritatem formulæ intuendam præbeant figuræ, quemadmodum numeri. Taceo quod mechanicæ demonstrationi, de qua supra diximus, hic sit locus, si ad principium congruentiæ confugias & partes a figura una rescissas alteri superimponas, prout ipse usus docuerit. Enimvero quibus talia inutilia videntur, is ea prætermittat. Neque enim omnia conducunt omnibus.

§. 159. Nimirum calculus literalis, & ejus applicatio ad solutionem problematum, doceri poterat pueros & adolescentes; quorum captui consulitur, si, quæ abstracta sunt, ad sensum & imaginationem reducantur. In omni Philosophia utilis est hæc reductio; ut eidem nunquam satis adsuefieri possit, qui in hac inoffenso pede progredi voluerit. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, in Algebra versantur, talia negligere non debent, quæ superflua ac puerilia videntur aliis, qui in nuda veritatum mathematicarum cognitione acquiescunt. Maximæ quoque utilitatis est ad recte philosophandum, si actus imaginationis ab operationibus intellectus discernere valeas, ne abortus imaginationis cum notionibus realibus confundas: quemadmodum accidit summis etiam Mathematicis, qui imaginaria a realibus separare non didicere, neglectis exercitiis, quæ huc facere poterant.

§. 160. Difficilis est tyronibus doctrina de ratione quantitatum, quam in Arithmetica demonstravimus; præsertim si theoremata non exponantur per numeros, & demonstratio ad exempla non applicetur. Delectabuntur itaque, quando in problemate 32 (§. 124 *Analys.*) videbunt, quomodo per calculum literalem, absque ullo negotio, omnia pateant; ut ad ea capienda sensuum magis usu, quam intellectus operationibus opus sit. Hæc ipsa autem voluptas, non modo amorem studii algebraici, sed & alacritatem idem prosequendi instillabit. Consultum vero est, ut literæ non minus per numeros rationales, quam irrationales explicentur: id quod non modo universalitatem theorematum per calculum erutorum confirmabit, verum etiam exercitio calculum irrationalium reddet magis familiarem. Immo, ne multitudine theorematum hic coacervatorum obruaris, sed ut singula absque molestia memoriæ infigantur, nisi hoc jam factum fuerit in Arithmetica, hoc ipso obtinebis. Quoniam vero theoremata verbis pure enun-

enunciata in usum futurum memoriæ mandanda sunt (§. 21); non minus consultum est, ut singula verbis enuncies. Hoc modo enunciatorum facilior quoque erit comparatio cum theorematis in Arithmetica propositis; cumque ea tota nitatur distinctis notionibus, faciet idem institutum ad notiones confusas ad distinctas revocandum, & animum impatientem reddet ad acquiescendum in confusis, per quas nobis veritatem perspicere videmur: id quod haud parum proderit in Philosophia ad præcavendam præcipitantiam, qua in periculum errandi adducimur, & in errorem haud raro præcipites damur. Theorema primum, quo investigatur ratio factorum communem efficientem habentium, multiplicatis scilicet duabus quantitatibus, rationem quamcunque inter se habentibus, a & ma, per eandem tertiam c, ita repræsentatur:

$$\frac{a : ma}{c \quad c}$$

$$ac : mac = a : ma$$

Per numeros rationales explicabitur hoc modo:

$$\frac{8 : 12}{3 \quad 3}$$

$$3 . 8 : 3 . 12 = 8 : 12$$

$$\text{seu } 24 : 36 = 8 : 12$$

Quodsi 24 dividas per 36 & 8 per 12; fractionibus $\frac{24}{36}$ & $\frac{8}{12}$ reductis, prodibit utrobique $\frac{2}{3}$, idem nempe exponens (§. 136 *Arithm.*), quemadmodum requirit proportio (§. 149, 155 *Arithm.*).

Per numeros irrationales explicabitur hoc modo:

$$\frac{\sqrt{5} : \sqrt{3}}{\sqrt{7} \quad \sqrt{7}}$$

$$\sqrt{5} . \sqrt{7} : \sqrt{3} . \sqrt{7} = \sqrt{5} . \sqrt{3}$$

$$\text{seu } \sqrt{35} : \sqrt{21} = \sqrt{5} : \sqrt{3}$$

Quodsi denuo $\sqrt{35}$ dividas per $\sqrt{21}$ & $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$, prodibit utrobique exponens idem $\sqrt{1\frac{2}{3}}$.

§. 161. Quodsi existimes, committi hoc pacto circulum vitiosum, cum fractionum reductio ad minores terminos supponat rationum doctrinam, & calculus quoque irrationalium eadem nitatur; non unum est, quod respondeo. Primum constat, calculum fractionum & irrationalium erui posse per Algebram, quemadmodum specimine quodam docuimus (§. 146 *Analys.*), & quod idem imitari detur in casibus aliis, etiam in algorithmo fractionum, monuimus (§. 147 *Analys.*). Sane per Algebram reperiri posse reductionem fractionum ad minores terminos, quod dubio careat, exemplo singulari hoc docere lubet. Sit fractio reducenda $\frac{9}{12}$ Fiat

$$\frac{9}{12} = y$$

$$\text{erit } 9 = 12y \quad | 3$$

$$3 = 4y \quad | 4$$

$$\frac{3}{4} = y$$

adeoque $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Quodſi pro $\frac{9}{12}$ ſubſtituas $\frac{a,}{ma}$ vel ſi mavis *na*: *ma*; habebis regulam, quæ in Arithmetica ad fractiones ad minores terminos reducendos præſcribitur. Cumque calculus hic nitatur axiomatis notiſſimis, intelligi etiam poterit ab iis, qui Algebram nondum didicerunt. Deinde notandum eſt, nos calculum fractorum & irrationalium jam tradidiſſe, independenter a problemate 32 (§. 124. *Analyſ.*), adeoque abſque circulo vitioſo a nobis illuſtrationis gratia adhiberi poſſe, quæ aliter jam demonſtrata ſunt, ut eorum, quæ traduntur, appareat conſenſus. Quamprimum vero ſcrupulus iſte te angit, tollitur extemplo eo, quem diximus, modo. Quodſi quis Elementa Arithmeticæ & Geometriæ methodo analytica recentiorum demonſtrare vellet; is calculum literalem cum numeroſo in Arithmetica combinare poterat, & algorithmum fractorum, nullis ſuppoſitis de ratione quantitatum theorematis, per Algebram elicere tenetur, antequam per calculum literalem demonſtret theoriam rationum. Ceterum hic notari velim, quam facile committatur circuloſus vitioſus, qui non advertitur, ab iis, qui extra ſyſtema propoſitiones aliquas demonſtrare volunt; ut agnoſcatur neceſſitas ſyſtematum veri nominis in omni ſcientiarum genere, & ut principia, quibus utimur in demonſtrando, deſumantur ex ſyſtemate, in quo propoſitiones demonſtrandæ vel non occurrunt, vel ſaltem non anteriore loco, quam principia iſta, collocantur. Videmus etiam per præcipitantiam judicare eos, qui demonſtrationi cuidam circulum vitioſum ſimpliciter imputant, qui nonniſi in relatione ad certum aliquod ſyſtema committitur; ubi nondum demonſtraverunt, non poſſe condi ſyſtema, in quo veritates ita ſibi invicem ſubordinentur, ut demonſtrationi iſti abſque circulo vitioſo ſit locus. Ad talia omnino animum advertere tenentur, quotquot intellectus perficiendi curam gerunt.

§. 162. Inprimis etiam attentionem meretur problema 29 (§. 95 *Analyſ.*), quo theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo inveſtigatur, ope ſolius calculi literalis; quatenus ſcilicet oſtendit, quomodo theoremata infinita ad unicum reduci poſſint, ita ut unum æquipolleat infinitis; ut præjudicium illud evellatur animo, quaſi intellectus finitus non ſit capax infiniti. Falſum enim eſſe hinc intelligitur, quod aliis quoque ſpeciminibus comprobabitur in ſequentibus, intellectum infinita comprehendere non poſſe; cum hic formulas numero infinitas ſub una quadam contentas exhibeamus. Rationem, cur hoc fieri poſſit, perſpiciet, qui attenta mente perpendere voluerit, quæ hic docentur. Nec minus idem problema ſingularem attentionem meretur,

tur,

tur, ob artificia ſingularia, quibus in eodem ſolvendo utimur, & quorum uſus etiam eſt in aliis, immo quæ artificia heuriſtica generalia ſuggerunt, extra Matheſin etiam uſurpanda.

§. 163. Elementa nimirum Analyſeos ita conſcripſimus, ut paucas præſcripſerimus regulas, reliqua vero artificia ipſo uſu inſinuentur: quibus cum utendum ſit, non modo in eo problemate ubi primum adhibentur, verum etiam in aliis ubi adhiberi poſſunt; ſi reflectendo ſuper iisdem diſtincta eorundem notio animo imprimitur, & facilius eadem memoria retinentur, & eorum ſtatim meminimus, quando iiſdem denuo opus habemus, nec tentatis demum fruſtra aliis in ea caſu incidimus. Generalia vero Artis inveniendi præcepta ut inde abſtrahat, qui artificia quibus utimur nondum diſtincte animo concepit, & in rationes eorum inquiſivit, prorſus impoſſibile eſt. Quoniam generalia conſtituuntur ſimilitudine latente in ſpecialibus; ingenii quoque acumen mirifice augetur generalium iſta abſtractione, quam juvant regulæ de notione generis ex data notione ſpeciei formanda (§. 710 *Log.*), & de notione generum ſuperiorum ex notionibus inferiorum derivanda (§. 711 *Log.*), quemadmodum applicationem extra Matheſin adjuvant regulæ de notionibus ſpecierum ex notione generis (§. 712 *Log.*), & de notionibus ſpecierum aliarum ex notione ſpeciei unius deducenda (§. 714 *Log.*); quas ſingulas & ipſas a Matheſi abſtrahi poſſe, exempla docent, quibus problemata hæc illuſtravimus in Logica.

§. 164. Nemo a nobis requiſiverit, ut artificia ſpecialia, quibus utimur, ad notiones generales revocemus, & alias ſpeciales determinemus, quibus extra Matheſin in aliis veritatibus inveſtigandis opus eſt. Hæc enim pertinent ad Artem inveniendi generalem, quam ſuo loco, ſi Deo viſum fuerit, explicaturi ſumus: ubi in notis adjectis doceri poterit, quomodo ab artificiis analyticis Mathematicorum abſtrahantur, quæ in ea ex notionibus ontologicis, & pſychologicis, aliiſque Philoſophiæ principiis, demonſtrantur. Sufficit excitaſſe attentionem illorum, qui ſtudium Philoſophiæ cum mathematico conjungunt, ea methodo philoſophantes, qua nos utimur.

§. 165. Enimvero progrediamur ad Algebram proprie ſic dictam. Algebra primum non erat niſi regula arithmetica, quæ inſtar regulæ trium in eadem docebatur, & in numeris tantummodo exercebatur. Arithmetica literali a VIETA, Gallo, inventa, latior patebat ejus uſus; cum ſub literis, non ſolum numeri ſeu quantitates diſcretæ, ſed & magnitudines ſeu quantitates continuæ comprehenderentur. Unde calculum literalem VIETÆ ad Geometriam elementarem applicabat

GHETALDUS Italus in Libris *de Resolutione & Compositione mathematica.* Cum HARRIOTTUS Anglus, Arithmeticam literalem ope characteristicæ magis perfecisset, & CARTESIUS genuina characteristica potentiarum usus, (quemadmodum jam obiter monuerat KEPLERUS in *Harmonica*, & rationem designationis perspicue multo ante docuerat STIFELIUS in *Arithmetica integra*, numerorum cossicorum naturam ex genuinis fundamentis eruens,) Algebram quoque ad Geometriam superiorem applicaret; illustrior adhuc ejus evasit usus. Nos igitur ut in tradenda Algebra gradatim progrederemur, primum eam exercere docuimus in problematis arithmeticis determinatis; deinde etiam in indeterminatis; mox in problematis Geometriæ elementaris; tandemque in problematis Geometriæ sublimioris. Quoniam vero Geometria sublimior aliud adhuc calculi genus requirit, in quo quantitates supponuntur infinite parvæ, methodo a KEPLERO in *Stereometria* primum quasi obiter indicata, a CAVALERIO in *Geometria Indivisibilium magis promota* & a STEPHANO præsertim DE ANGELIS, atque GREGORIO A S. VINCENTIO ulterius exculta; hoc quoque calculi genus, cum reductione quantitatum ad series infinitas per divisionem MERCATORIS, & extractiones radicum *Newtonianas*, combinatum, explicavimus; & Algebræ usum, adhibito hoc calculo in Geometria sublimiori, multo latiorem exposuimus. Ceterum cum in Geometria elementari omiserimus theoremata nonnulla, quæ difficilius demonstrantur; qualia sunt de multisectione anguli, seu divisione circuli & arcus in partes quotcunque æquales, & de investiganda solidita-te corporum regularium, nec non de inscriptione quorundam polygonorum in circulo ab EUCLIDE demonstrata; Geometriam vero sublimiorem methodo Veterum demonstratam prorsus non attigerimus; quæ hic desiderari poterant, per Algebram investigare docuimus, ut una eademque opera & Ars inveniendi exerceretur, & theorematum scitu necessariorum cognitio acquireretur. Quoniam enim non cujusvis est in numeris, & lineis, atque figuris consenescere, & ab omnibus studium Philosophiæ cum mathematico conjungi consultum sit; plerique etiam non alio fine Mathesin puram tractare debent, quam ut in Philosophia aliisque studiorum generibus felicius progrediantur; Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ abunde sufficere existimavimus, ut genuinam methodum, sine qua ad solidam rerum cognitionem in quocunque scientiarum genere perveniri minime datur, nobis familiarem reddamus; præsertim si demonstrationes nostro more resolvantur, & singula analytice repræsententur, quemadmodum capite primo

primo præcepimus; & ceterarum veritatum mathematicarum facillimo modo acquirendam esse duximus cognitionem.

§. 166. Studium algebraicum ut facilitaremus, primas tantummodo exposuimus regulas (§. 141, 143 *Analys.*), easque statim applicavimus ad exempla; problematis eo consilio electis, ut vel artificium aliquod analyticum animo insinuent, vel veritatem quandam cognitu necessariam doceant. Ita problemate statim 38, quod in hoc genere primum est, (§. 144 *Analys.*) ostendimus, dari proprietates numerorum singulares, quibus ab omnibus aliis distinguuntur, & quæ differentiam eorum numericam constituunt. Hoc ipso illustratur doctrina de differentia numerica individuorum, in Ontologia a nobis tradita, & in Cosmologia, ac Psychologia demonstrata; ex doctrina autem de origine idearum in intellectu divino, prorsus a priori deducta, ex ipsa natura & attributis Dei, entis omnium primi, multo clarius elucescens, scholæ autem non satis animadversa, multo minus expensa. Quoniam vero exemplum nonnisi singulare est, numeri nempe nonnisi duodenarii; sequente statim problemate (§. 145 *Analys.*) theorema generale eruere docemus, tum ut pluribus exemplis confirmetur idea tam nobilis, multique per philosophiam omnem, tam practicam quam theoreticam, usus, tum ut uberius explicetur artificium problemata particularia, immo singularia, ad universalitatem revocandi; cujus jam specimina quædam dedimus in anterioribus, veluti cum problema generale de binomino ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analys.*), de radice quacunque inde extrahenda (§. 98 *Analys.*) & de infinitinomio ad dignitatem quamcunque evehendo proponeremus (§. 102 *Analys.*), & regulas de permutatione quantitatum, seu variatione ordinis earundem, ad universalitatem revocaremus. Similiter problemate 40 (§. 146 *Analys.*), specimine quodam docui per Algebram investigari posse talia, quæ aliis etiam modis erui possunt, & in scholio (§. 147 *Analys.*) monui, idem in aliis quoque eodem modo procedere. Quod vero utilitate sua non destituatur, eandem veritatem pluribus modis diversis investigari, supra jam monuimus (§. 161). Illustravimus differentiam, quæ intercedit inter solutionem problematum in numeris abstractis & concretis (§. 161 *& seqq. Analys.*), & artificia reductionis insinuavimus (§. 163, 183, 184 *Analys.*). Cum de proportione harmonica & contra harmonica, nec non de numero pronico, & numeris polygonis, aliisque figuratis nihil dixerimus in Arithmetica, ne ejus theoriam nimium extenderemus, & a studio Geometriæ nimis diu detineremus tyrones, studii mathematici facile effecturi desertores; defectum

istum hic supplemus, dum theoremata præcipua ad theoriam istorum numerorum spectantia per Algebram eruere docemus (§. 186 *& seqq. ac* §. 206 *& seqq. Analys.*). Idem a nobis factum esse in reliquis capitibus, qui animum huc advertere libuerit, facile deprehendet.

§. 167. Inprimis autem singularem attentionem meretur artificium prorsus singulare, quo in summandis quadratis & cubis, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur, utimur (§. 200 *Analys.*), & quod mox ad summandas potentias quascunque numerorum naturalium transferimus (§. 203 *Analys.*), ac deinde ad summandos numeros polygonos (§. 212 *Analys.*), & ad summandos quoque pyramidales adhibemus (§. 216 *Analys.*). Quantum enim eodem præstetur, abunde intelliget, qui quæ hac methodo eruuntur conferre voluerit cum *Arithmetica infinitorum* WALLISII & inprimis BULLIALDI. Facile autem apparet, methodum hanc ad alia problemata arithmetica solvenda transferri posse, perinde ac calculus summatorius in Geometria amplissimum habet usum. Nec puto faciliori modo potentias, & numeros figuratos summari posse. Loquuntur autem hæc ipsa problemata, & problema de binomio ad dignitatem infinitam evehendo, ac radice quacunque ex eodem extrahenda, ut alia taceamus, quam ardua problemata per calculum literalem, & Algebram solvi possint, etiamsi paucissima theoria fueris instructus; ut adeo methodi hæ, in Arte inveniendi, præ methodo Veterum sese maxime commendent. Per eas enim aditus ad ea patet, quæ a nostra cognitione intervallo quam longissimo adhuc sunt remota. Clarius idem elucescet in sequentibus. Unde si quis in Mathesi inventorem agere voluerit, ei Analysis Mathematicorum recentiorum nunquam satis commendari potest.

§. 168. Per universam Analysin, in solvendis problematis, calculum integrum distincte exhibuimus; ut quilibet tyro proprio marte intelligat, quomodo problema fuerit solutum, & quomodo ordine in solutione sit progrediendum, quem præscribunt regulæ generales ab initio expositæ. Lineis quoque distinximus ea, quæ ex anterioribus concluduntur, ab iis, ex quibus colliguntur per communem algorithmum. Non tamen hoc ipso solutiones reddidimus prolixiores, quin potius in minus easdem spatium haud raro coarctavimus. Et qui citra confusionem, quæ errorem facile parit, absque ulla molestia, problemata solvere voluerit; eo modo calculum instituere tenetur, quo eundem in contextu repræsentamus. Quilibet adeo experietur, nullibi ipsi esse hærendum, modo attentionem afferre voluerit. Equidem, brevitatis gratia, nonnisi speciminibus quibusdam ostendimus,

quo-

quomodo formulæ algebraicæ verbis explicentur, ut prodeant regulæ, per quas problema solvitur in dato quocunque casu particulari; nec non quomodo theoremata ex calculo eruantur. Suadendum tamen tyronibus, ut idem faciant in singulis problematis. Sentient utilitatem, ubi in hoc labore sese præstiterint diligentes. Explicavimus formulas per numeros; ut discant tyrones, quod eædem instar regulæ sint, quæ per calculum eruuntur universalem. Initio tamen utilitate sua non caret, si solutionem algebraicam tentent in exemplis singularibus, numeris in locum literarum, quibus quantitates datæ designantur, surrogatis, quemadmodum exemplo aliquo ostendere lubet. In problemate 41 (§. 148 *Analys.*), datur duarum quantitatum summa & eorundem factum, quæruntur quantitates ipsæ. Quare si sit summa $a = 14$, factum $b = 48$; resolutio talis erit:

Sit summa $= 14$, semidiffer. $= x$
factum $= 48$, erit Quantitas

$$\begin{array}{rl} \text{maj.} = & 7 + x \\ \text{min.} = & 7 - x \\ \hline & -7x - x^2 \\ & 49 + 7x \\ \hline \text{Factum} = & 49 - x^2 \end{array}$$

Ergo

$$\begin{array}{c} 49 - x^2 = 48 \\ \hline 1 - x^2 = 0 \\ \hline 1 = x^2 \\ \hline 1 = x. \end{array}$$

Quare $7 + x = 8$, & $7 - x = 6$.

§. 169. Quodsi problemata quoque per Algebram numerosam solvas; non modo hinc elucescet discrimen inter Algebram numerosam & speciosam, & hujus præ illa præstantia agnoscetur; cum per istam nonnisi exempla computentur, per hanc vero solutiones, adeoque veritates universales detegantur; verum etiam calculus algebraicus reddetur familiarior & clarior. Hoc vero suademus nonnisi primis tyronibus. Qui enim in calculo jam fuerint versati, istiusmodi exercitiis non amplius habebunt opus. Consultum vero est exemplum calculi numerosi conferri cum calculo specioso; tum ut appareat, quantum conveniant, quantum differant, tum ut numerosus lucem affundat specioso. Quodsi quis universalitatem in calculo numeroso conservare velit, haud difficulter idem præstabitur, quemadmodum exemplum modo allatum, & hic alia forma exhibitum, docet:

$$\begin{array}{c} 7^2 - x^2 = 48 \\ \hline 7^2 = 48 + x^2 \\ \hline 7^2 - 48 = x^2 \\ \hline \sqrt{(7^2 - 48)} = x \end{array}$$

Vides nimirum, in quolibet casu, a quadrato semisummæ 7^2 subtrahendum esse factum & ex residuo extrahendam radicem, ut habeas semidifferentiam numerorum quæsitorum. Quodsi Veteres hoc animadvertissent,

sent, per Algebram numerosam, ante inventum calculum literalem, non minus veritates universales eruissent, quam nunc per speciosam erui solent. Si enim in calculo numeroso universalitatem conserves, specioso prorsus æquipollet, quemadmodum collatio utriusque calculi intuenti extemplo prodit. Immo hoc pacto etiam, eodem successu, per Algebram numerosam solvi poterant problemata geometrica, quemadmodum nunc solvuntur per speciosam. Sed de hoc dicemus suo loco. Ratio in aprico est. Per calculum speciosum obtinentur solutiones universales, quia idem in omni casu particulari, & pro literis, quibus quantitates datæ designantur, numeri quilibet substitui possunt, salvo calculo integro. Idem vero succedere eodem modo in calculo numeroso, qui universalitatem conservat, per se patet. Quoniam signa primitiva, qualia sunt quibus exprimuntur quantitates datæ, prorsus arbitraria sunt; notis autem numericis significatum universalem imponere licet; universum a singulari, quem habent, abstrahere licet: veluti ut 14 non significet summam ex duobus numeris determinatis, (quas hic esse 8 & 6 solutio prodit), sed summam ex duobus quibuscunque numeris, immo generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus compositam, veluti si significet lineam in duas quascunque partes divisam; & similiter 48 non denotet factum ex duobus numeris determinatis iisdem cum anterioribus, quorum summa est 14, sed potius factum ex duobus quibuscunque aliis, cum illis tantummodo iisdem qui summam conficiunt, vel generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus, cum illis iisdem ex quibus summa componitur; veluti quando 14 significet lineam in duas quascunque partes divisam, si 48 denotet rectangulum ex parte una in alteram.

§. 170. Non difficile fuisset Veteribus hæc animadvertere; si quidem in universalia in iis, quæ cognoscebant, latentia mentis aciem intendere voluissent, & a notatione numerorum notiones Artis characteristicæ universales abstraxissent: ad quod faciendum non defuit ipsis acumen, sed defecit tantummodo attentio ad ea quæ, pro scopo præsente, satis cognita atque perspecta deprehendebant. Discant hinc velim omnes, quibus puerilia, aut saltem superflua videntur, quæ ad tractandam Mathesin præcipimus; quantum non modo sibi, verum etiam scientiæ desint, qui, quæ se satis intelligere arbitrantur, ea nulla amplius attentione dignantur, & vulgarium meditationem ad sublimia nitentibus non convenire arbitrantur. Multo luculentius hæc patebunt, ubi Artem inveniendi explicare licuerit. Nos experti, quantum valeat vulgarium meditatio, nulli dubitamus, quin in Philosophia universa, præsertim in Physica, & Philosophia morali, immo

mo ipſa civili, dudum principia certa, per quæ ad remotiora paratur aditus, conſtituiſſent Philoſophi; ſiquidem ad notiones communes, ex maxime vulgaribus derivandas, ſufficientem attentionem afferre voluiſſent. Neque vero exiſtimandum eſt, convenire hæc iis, quibus ad ſublimiora non conceditur aditus. Etenim non leve acumen requiritur, ut notiones communes, quas ſuppeditant obvia, non modo ad diſtinctas & determinatas revoces, ſed & inde univerſales abſtrahas. Quænam enim, quæſo, ratio eſt, cur notionum communium, admodum fertilium, quemadmodum vel EUCLIDIS Elementa teſtantur, immo ipſa quoque Algebra confirmat, non eum hactenus fecerint uſum Philoſophi, nec etiam in dirigendis actionibus viri prudentes, quem facere poterant, niſi quod negligantur ab iis, qui acumine alios vincunt. Sane cur Mathematici ſummi, quorum acumen accuſari nefas, genuinam demonſtrationis formam non apprehenderint, ratio alia non eſt, quam quod eandem attentione ſufficiente dignati minime fuerint, ſine qua diſtinctam ejus notionem conſequi minime datur. Conſtat autem, quantum ſibimetipſis defuerint, tum ubi demonſtrationes more Veterum in ipſa Matheſi dare voluerunt, tum quando extra eandem veritates quaſdam demonſtrare conati ſunt. Quo majore acumine maxime vulgaria perluſtrantur, eo profundiora in iis latentia in apricum proferuntur.

§. 171. Poſtquam uſum Algebræ in ſolvendis problematis Arithmeticis determinatis oſtendimus, ad problemata indeterminata progredimur capite ſecundo. Applicamus in eo Algebram ad problemata pleraque DIOPHANTI, a quo horum ſolutio *Analyſis Diophantea* appellari ſuevit. Ex quo Algebra ad Geometriam, præſertim ſublimiorem, & inprimis ad problemata phyſico-mechanica applicata fuit; Analyſis Diophantea negligi cœpit, ita ut præter OZANAMUM in *Elementis Algebræ*, vix quiſquam fuerit alius, qui ultra *Diophanteos* limites eandem promovere conatus fuerit. Quam minus recte autem hoc fiat, jam LEIBNITIUS monuit, qui ejus præclarum uſum in Analyſi infinitorum obſervavit. Singularibus in iis artificiis haud raro opus eſt, tum ſi denominationem ſpectes, tum ſi reductionem conſideres. Quamobrem ſuadeo, ut, qui horum problematum ſolutionem expendit, in rationem inquirat, cur denominatio hoc modo fuerit facta & reductio hoc modo inſtituatur, ubi aliquid inuſitati occurrit. Ex. gr. in problemate 92 (§. 230 *Analyſ.*), quo ſummam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere jubemur, ubi latus quadrati majoris dicitur a, minoris b; latus quæſiti unius appellatur a-z, latus alterius yz-b. Ratio denominationis non patet per communes

 regulas

regulas: per eas enim dicendum erat latus unum x, alterum y (§. 141 *Analyſ.*). Enimvero ſi denominatio hoc modo fiat, habebimus $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, conſequenter $x = \sqrt{(a^2 + b^2 - y^2)}$. Sed hæc ſolutio nulla eſt, cum in Analyſi Diophantea ſolutio quæratur in numeris rationalibus. Quamobrem in ſcholio (§. 231 *Analyſ.*) monuimus, cur ad vitandam irrationalitatem, latera quadratorum quæſitorum ſumſerimus $a - z$ & $yz - b$. Enimvero cum idem non fecerimus in ceteris, ſed propriæ diſcentis meditationi reliquerimus; neceſſe eſt ut ad rationem generalem animum advertens ſpecialem ex conditione calculi eruat.

§. 172. Quoniam in problematis indeterminatis facilius aberratur, ubi ſingularia artificia adhibenda ſunt; tyronibus ſuadendum, ut problemata generaliter ſoluta etiam in numeris aliquoties ſolvant, quo artificia iſta ipſis magis familiaria reddantur. Conſultum etiam eſt, ut, ubi formulas generales per numeros explicaverint, examen addant, quo numeros repertos conditionem in problemate præſcriptam habere innoteſcit. Ex. gr. in problemate 87 (§. 225 *Analyſ.*), reperiuntur numeri 11 & 6, quorum partes aliquotæ numeris ſuis additæ efficere debent eandem ſummam. Quoniam 11 eſt numerus primus, quem quippe ſola unitas metitur (§. 75 *Arithm.*), præter unitatem partem aliquotam aliam non habet (§. 30, 74 *Arithm.*). Unitas igitur ſi eidem addatur, ſumma efficitur 12. Aſt ſenarii partes aliquotæ ſunt 1, 2 & 3, quas ubi addas ipſi numero 6; habebis itidem ſummam 12. Similiter, per formulam generalem determinantur duo numeri 104 & 116. Illius partes aliquotæ ſunt, 1, 2, 4, 8, 13, 26 & 52: hujus vero 1, 2, 4, 29 & 58. Eſt vero $1 + 2 + 4 + 8 + 13 + 26 + 52 + 104 = 210$, & $1 + 2 + 4 + 29 + 58 + 116 = 210$. Nec inconſultum eſt, ut etiam in hac Analyſi formulæ algebraicæ verbis explicentur, quemadmodum ſupra præcepimus (§. 168); ſi quis præſertim Matheſin non ſibi ſoli diſcit, ſed intellectus potiſſimum perficiendi gratia eidem incumbit. Etenim non leve exercitio opus eſt, ut, quicquid animo concipis, verbis diſtincte enuncies. Niſi vero hac facultate polleas, in ſtudio philoſophico, & quocunque alio ſcientiarum genere, accurata methodo nunquam uteris. Extra Matheſin non habemus characteres & figuras, quibus imaginatio juvatur, & defectus diſtincte enunciandi, quæ concipiuntur vi intellectus, ſuppletur. Inprimis autem uſui eſt, ut quam maxime abſtracta verbis perſpicuis accurate enunciare valeas; ubi tibi propoſitum fuerit, ex perceptionibus obviis eruere notiones univerſales quæ iiſdem inſunt, & veritatibus in caſu particulari agnitis omnem ſuam tribuere ampli-

amplitudinem, quam habere possunt: id quod mirifice conducit ad omnem cognitionem promovendam, & prudentiam, qua ad recte agendum opus habemus, amplificandam. Immo augebitur eodem medio notiones distinctas formandi facultas, quæ non adeo facile acquiritur, quemadmodum vulgo putatur, præsertim ubi cum abstractis tibi fuerit negotium. Scholastici in distinguendis iis, quæ diversa sunt, satis fuerunt acuti; sed quæ confuse perceperunt distincte concipere, & verbis perspicuis accurate enunciare non valuerunt. Quamobrem Metaphysicam tenebris involverunt, nec ratiocinando quicquam ex notionibus confusis colligere potuerunt; ut scientia nobilissima in terminologiam versa fuerit, ac proinde a nonnullis perperam pro Lexico quodam philosophico habita. CARTESIUS vero, qui notionum distinctarum usum indispensabilem in scientiis perviderat, Ontologiam in eorum numerum retulit quæ contemni merentur; & in Physicis, imaginaria cum realibus confudit, ut ad veritatem liquidam pertingere non potuerit; Philosophiam vero practicam, quam excoli maxime interest, prorsus intactam reliquit; etsi ipsi propositum esset Philosophiam reformare, cujus defectus abunde agnoscebat.

§. 173. Sed dicta sufficiant de applicatione Algebræ ad problemata arithmetica. Progrediamur itaque ad problemata geometrica, quæ capite tertio traduntur. Problemata geometrica duo singularia habent. Etenim plerumque artis est invenire æquationem; nec ea tam obvia est, quemadmodum in problematis arithmeticis puris, ubi scilicet numeri dantur abstracti. Deinde non minoris artis est formularum algebraicarum, per quas determinatur quæsitum, constructio geometrica. Immo subinde difficultate non caret, ut reperias, quid quæri debeat, ut in commodam incidas solutionem. Quamvis vero problemate 110 (§. 250 *Analys.*) præscribantur regulæ generales de invenienda æquatione; eædem tamen non ita determinatæ sunt, ut in dato quolibet casu statim appareat, quanam earum utendum sit ad æquationem inveniendam, sed haud raro variis id tentandum est modis. Similiter in problemate 111 & 112 (§. 252, 253 *Analys.*) docuimus, quomodo construantur æquationes simplices & quadraticæ omnes; monuimus tamen in scholio (§. 254 *Analys.*), quod hoc modo raro incidamus in constructiones concinnas, quales sunt, quæ in Elementis Geometriæ extant, cum tamen concinnæ potissimum desiderentur. Quamobrem modus quo pervenitur ad æquationem, & quo æquatio ultima, per quam determinatur quæsitum, construitur, majorem attentionem meretur, quam qua in

problematis arithmeticis uſi fuimus; ut pateant artificia, quibus utimur, in aliis caſibus ſimilibus, quando occurrunt, imitanda. Ut autem conſtructionem concinnam reperias, primo tentanda eſt per regulas generales, quæ præſcribuntur. Deinde diſpiciendum, quomodo omnes linearum determinationes eidem ſchemati includantur, in quo lineæ ſingulæ commodum nanciſcantur ſitum; ut prodeat ſchema, quod viſum minime offendit, & in quo citra moleſtiam lineæ ex loco uno in alterum transportantur. Nulla adhuc datur conſtructionum elegantium theoria, in qua elegantia, quam ipſi tribuimus, ad notiones diſtinctas reducitur; quamvis ea non impoſſibilis ſit. Pendet ea a principiis generalibus pulchritudinis entis compoſiti, quam & ipſam nemo hactenus explicavit. Inſunt Architecturæ civili notiones quædam generales, quæ huc faciunt; ſed nemo hactenus ad eas, quantum publice conſtat, animum advertit. Quamobrem hactenus, in caſu omni, demonſtrari nequit, conſtructionem, quam dediſti, eſſe eam, in qua nihil deſiderari poſſit. Et haud raro, caſui magis quam arti tribuendum, quod in conſtructionem incidas, quæ pulchritudine ſua ſeſe commendat. Neque vero exiſtimandum eſt, ſi vel in noſtris Analyſeos Elementis, vel apud autores alios, occurrunt conſtructiones elegantes; eas ex formula algebraica juxta regulas generales reſoluta primo ſtatim conamine deductas fuiſſe. Quin potius pro certo tenendum, eas haud raro multum negotii feciſſe inventoribus, antequam ad eam formam deducerentur, quam habent. Ceterum ut dicta intelligantur, ſpecialia quædam addenda ſunt.

§. 174. In problemate 113 (§. 255 *Analyſ.*), quo, ex data perimetro & area trianguli rectanguli, hypothenuſam invenire, ipſumque triangulum conſtruere docemus, non minus æquationis inveſtigatio, quam trianguli conſtructio ſingularia quædam habent, quæ attentionem merentur. Quodſi in inveſtiganda æquatione via ordinaria, quam monſtrant regulæ generales, incedere voluiſſemus, hoc modo æquatio inventa fuiſſet.

$AB + BC + CA = a \qquad AC = x$

$\text{Area} = b^2 \qquad AB = y$

erit

$AB + BC = a - x$

$BC = a - x - y$

Duæ cum inveniendæ ſint æquationes, alteram ſuppeditat theorema Pythagoricum, vi cujus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*), alteram vero area trianguli $= \frac{1}{2}$ AB. BC (§. 392 *Geom.*). Habemus itaque

$x^2 = 2y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy$

$0 = 2y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + 2xy$

$2ax - 2xy = 2y^2 + a^2 - 2ay$

$$x = \frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y}$$

$b^2 = \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$

$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}y^2 - b^2$

$xy = ay - y^2 - 2b^2$

$$x = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$$

Quam-

Quamobrem

$$\frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y} = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$$

$$2y^3 + a^2y - 2ay^2 = 2a^2y - 4ay^2 - 4ab^2 + 2y^3 + 4b^2y$$

$$0 = a^2y - 2ay^2 + 4b^2y - 4ab^2$$

$$2ay^2 - 4b^2y - a^2y = -4ab^2$$

$$y^2 - \frac{4b^2 + a^2}{2a} y = -2b^2$$

Fiat $\frac{4b^2 + a^2}{2a} = m$,

erit $y^2 - my = -2b^2$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y^2 - my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 - 2b^2$$

$$\left.\begin{matrix} y - \tfrac{1}{2}m \\ \tfrac{1}{2}m - y \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

Vides hic, quam prolixus evadat calculus, ſi viam ordinariam ingrederis ſtricte inhærens regulis generalibus. Incidis in æquationem quadraticam affectam; cum in ſolutione, quam in textu dedimus, æquatio ſit ſimplex, adeoque primi gradus. Quodſi y per conſtructionem geometricam determinare volueris, primo eruendus eſt valor ipſius m. Eſt vero $m = \frac{4b^2 + a^2}{2a} = \frac{2b^2}{a} + \tfrac{1}{2}a$. Unde patet, te eadem opera, ſi æquatione in contextu utaris, reperiſſe hypothenuſam, qua hic valorem m repeteris, quo in conſtructione geometrica æquationis ultimæ hic opus habes: ut adeo dubitari non poſſit, conſtructionem quoque fore multo prolixiorem, & intricatiorem ea, quam in contextu exhibemus. Abbreviatur calculus, & æquatio multo ſimplicior eruitur, quia problema ad æquationem reducturus uteris theoremate de compoſitione quadrati, cujus radix binomia (§. 261 *Arithm.*); adeoque plures veritates cognitas ſupponis, quam ſi viam ordinariam ingrederis; & ad circumſtantias particulares animum attendis, quarum viam ordinariam ingreſſus nullam habes rationem. Nihil itaque hic ſingulare occurrit, quod non eodem modo locum habeat in aliarum regularum generalium applicatione. Qui ea attentione utitur in addiſcenda Matheſi, quam in capite primo inculcavimus; rationem hanc jam didicit in Practica Italica, ubi, ob circumſtantias ſingulares, ope theorematum quæ tanquam cognita præſupponuntur, & quorum in regula trium opus non habemus, calculus abbreviatur. Diſcas hinc velim, quod, ſi noſtro more in ſtudio Arithmeticæ & Geometriæ verſatus acumen quoddam tibi comparaveris, te in ſtudio quoque algebraico fore acutiorem, & dum eidem incumbis, in majore luce verſaturum. Acumen vero, hoc ſtudio algebraico auctum, non uno nomine ſeſe tibi commendabit, ubi ad Philoſophiam & alia addiſcendum

dum progredieris, immo in ipsa praxi vitæ. Enimvero constructio quoque trianguli rectanguli, ex perimetro & area datis, attentionem meretur. Vulgo triangula rectangula construimus ex datis cruribus, quibus ad angulum rectum junctis determinatur hypothenusa: quæ etiam ratio est, cur problema per regulas generales solventes investigamus cruris y valorem. Construi vero etiam potest triangulum rectangulum data hypothenusa & altitudine: quæ constructio denuo uberiorem theoriam supponit, quam communis; quod facile animadvertes, ubi fundamentum, quo nititur constructio, perpendere volueris. Unde vides cur, inventa hypothenusa, etiam quæsiverimus altitudinem. Et quoniam inventa in numerum cognitorum refertur, x non amplius spectatur tanquam magnitudo incognita, sed pro cognita habetur; ut adeo constructionem præter necessitatem efficeres prolixiorem & intricatiorem, si pro x valorem inventum in æquatione $y = b^2 : \frac{1}{2}x, = 2b^2 : x$ substituere velles. Immo commodius accidit, si retineas $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, quam si, reductione modo ordinario facta, sumas $y = 2b^2 : x$. In quo denuo latet quoddam artificium, quod in geometricis constructionibus formularum algebraicarum utile est, & quo etiam in sequentibus utimur.

§. 175. Regulas arithmeticas non adscripsimus, brevitatis gratia; non modo, quod geometricarum constructionum hic potissimum habetur ratio; verum etiam quod ex anterioribus satis manifestum supponimus, quomodo formulæ algebraicæ arithmetice explicentur, & regulæ arithmeticæ inde deducantur. Non tamen ideo tyrones negligere debent formularum per numeros explicationem, & regularum arithmeticarum enunciationem. Etsi vix opus esse videatur, exemplo præsenti rem declarari; ut tamen consulamus minus perspicacibus, id fecisse non nocebit. Æquatio itaque $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ hanc suppeditat solutionem arithmeticam, adhibito artificio, quod sub finem paragraphi præcedentis commendavimus: 1. Quæratur ad perimetrum dimidiam $\frac{1}{2}a$, & latus quadrati areæ æqualis b, tertia proportionalis, quæ erit $\frac{2b^2}{a}$. 2. Hæc subtrahatur a semiperipheria $\frac{1}{2}a$, relinquetur hypothenusa quæsita. Arithmetice explicabis formulam hoc modo. Sit $a = 12$, $b^2 = 6$. Erit $\frac{1}{2}a = 6$, adeoque $x = 6 - \frac{12}{12} = 6 - 1 = 5$.

§. 176. Qui ex solutionibus problematum proficere voluerit, quantum datur; is negligere minime debet theoremata, quæ offerunt æquationes. Quamobrem in problemate, quod nunc perlustramus, docuimus, quomodo theorema ex æquatione secunda, seu penultima eruatur. Enimvero ipsa etiam æquatio ultima theo-

rema

rema non inelegans suppeditat. Cum enim $2b^2 : a$ vel $b^2 : \frac{1}{2}a$ sit differentia inter semiperimetrum trianguli rectanguli $\frac{1}{2}a$ & hypothenusam x, extemplo patet theorema sequens: *Differentia inter hypothenusam & semiperimetrum trianguli rectanguli est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis.* Non video quid obstet, quominus hoc theorema ceteris Geometriæ elementaris adscribi possit; nisi quod usum, quem habere possit, non prævideas: nullum enim esse demonstrare minime vales. Sane si hæc ratio sufficeret ad theoremata ex Mathesi eliminanda, multa ex eadem arcenda & olim fuissent, & nunc essent; quorum egregius prorsus, successu temporis, comparuit usus, & in posterum comparebit. Ecquis prævidere poterat usum, quem habet comparatio progressionum arithmeticarum & geometricarum, cui inventum logarithmorum longe utilissimum deberi constat, & qua STIFELIUS usus in algebraicis æquationibus intimius explicandis? Quodsi igitur hanc comparationem tanquam inutilem rejicere voluissent Mathematici, locum in Mathesi eidem denegaturi, quod usum ejus minime præviderent; logarithmorum doctrina & ardua illa, quæ in Mathesi sublimiori ab eadem pendent, forsan hodienum non essent detecta. Inventores non solliciti esse debent, num, quod investigandum sibi sumunt, utile sit, sed num quod investigaverunt sit verum. Utilitas enim sua veluti sponte sese manifestabit, ubi in veritate investiganda progrediuntur, quam prævidere nullo modo poterant. Multum obest incremento scientiæ, si qui eam promovere possunt ac volunt, hoc præjudicio tenentur, quod de veritatis inveniendæ utilitate prima moveri debeat quæstio. Hæc enim cura tangere debet nonnisi eos, qui ab aliis inventa certo fine addiscunt; etsi cautione multa opus sit, ubi utilitatem ex vero æstimare voluerint; ne, quemadmodum plerumque accidit, quæ maxime utilia sunt pro inutilibus reputentur.

§. 177. Forsan non inconsultum judicaveris, ut constructiones ex calculo erutæ, itemque theoremata hinc derivata etiam more Veterum, seu synthetice demonstrentur. Non improbo consilium, ubi hoc facile fieri potest, & ea fini problemata quædam per leges rationum reduximus, quemadmodum problema 116 (§. 259 *Analys.*); ubi ipsa reductio demonstrationem quæsitam continet, modo singulæ analogiæ verbis enuncientur. Enimvero, cum per Algebram solvantur problemata, quæ a cognitione nostra adhuc procul sunt remota; defectu principiorum ad ratiocinandum requisitorum, per quæ ratiocinando colligi poterat quæsitum, quemadmodum in Geometria fecimus; multa haud raro theoremata interme-

dia essent invenienda, antequam demonstratio synthetica dari posset. Unde facile intelliges eam non esse in potestate tua. Sume exempli loco theorema, quod modo (§. 176) elicimus: In triangulo rectangulo differentia hypothenusæ a semiperimetro est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati triangulo æqualis. Si demonstrationem syntheticam dare volueris; hæc analogia ex aliis notis colligenda per theoremata de ratione quantitatum. Enimvero in Geometria elementari nihil adhuc demonstratum est de perimetro trianguli rectanguli. Quamobrem alia adhuc invenienda essent theoremata, antequam demonstrationem consummatam dare possis, quales dedimus in Geometria. Nobis jam non vacat eam in rem inquirere, ut exemplo dicta confirmaremus. Nemini igitur suademus, ut tempus in quærendis istiusmodi demonstrationibus fallat, quod longe utilius in exercenda Analysi consumere datur. Quodsi vero obvia fuerit demonstratio, eam addi non dissuademus.

§. 178. Si existimaveris demonstrationes syntheticas dari posse, si vestigiis calculi insistens verbis enuncies, quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugias; totus falleris: neque enim forma demonstrationis mutabitur, si characteribus expressa verbis enuncientur. Abunde hoc videre licet in *Phoronomia* HERMANNI, cujus prætensæ demonstrationes syntheticæ seu lineares, quas vocat, quantum distent a demonstrationibus *Euclideis* nullo negotio deprehendet, qui cum fuerit in resolvendis demonstrationibus more nostro versatus resolutionem demonstrationum *Hermannianarum* tentare voluerit. Præstat igitur in analysi acquiescere, quam per eandem reperta minus recte demonstrare. Sane ipse NEWTONUS (quod citra injuriam in maxima Viri summi merita dictum esto,) multa, corollariorum instar, absque ulla demonstratione subjicit propositionibus, quæ subinde prolixam desiderant demonstrationem, si *Euclideo* more evincenda eorundem veritas; immo corollariorum loco habet quæ absque ulla demonstratione pateant lectori, quæ posita propositione minime ponuntur. Exempli loco est, quando problema inversum virium centripetarum in sectionibus conicis pro corollario directi habet, cum tamen conversio per se minime pateat; nec quis ferret, in Geometria elementari, si, ex parrallelismo linearum demonstrata angulorum æqualitate, per modum corollarii absque demonstratione inferret: Ergo etiam parallelæ sunt lineæ, si anguli alterni fuerint æquales. Non omnes propositiones posse converti, ex doctrina logica de conversione satis manifestum est. Quamobrem ubi conversio per rationes logicas non statim patet, conversa utique demon-

demonſtranda eſt. Immo cum ex principiis logicis demonſtrandum foret, propoſitionem converti poſſe; Geometris veteribus conſultius viſum ex principiis propriis, aliunde non ſupponendis, demonſtrare converſam. Nos vero, qui omnibus juſtum ſtatuere pretium ſolemus, demonſtrationes logicas in numerum artificiorum heuriſticorum referimus, per quas reperire, nonnunquam ſaltem conjectare licet, propoſitionem aliquam datam & demonſtratam converti poſſe. Qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat, is a rigore demonſtrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur; ne methodi confuſæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Matheſin: quod quam facile fieri poſſit, jam in ſuperioribus monuimus (§. 100, 101).

§. 179. Ceterum, cum demonſtrationibus ſyntheticis confundendæ non ſunt demonſtrationes, quibus evincitur conſtructionem juxta formulam per calculum erutam rite eſſe factam. In his enim ſupponimus quæſitum eo modo determinandum eſſe, quemadmodum exigit formula algebraica. Quoniam nos conſtructiones ad formulam retulimus, earundem demonſtrationes in ipſa conſtructionum explicatione jam continentur. Quodſi vero illas verbis enunciare velles, demonſtratio ubique adjicienda foret, de qua hic ſermo eſt. Ita in exemplo noſtro, ubi triangulum rectangulum conſtruendum ex formulis $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & $y = b^2 : \frac{1}{2}x$ (§. 255 *Analyſ.*); conſtructio pure enunciabitur hoc modo: 1°. Erigatur ad perimetrum BD perpendicularis AB, quæ ſit ad latus quadrati areæ trianguli æqualis in ratione dupla; fiatque BG ipſi lateri huic æqualis. 2°. Quæratur ad BD, AB & BG quarta proportionalis BH. 3°. Fiat BC ſemiperimetro æqualis; & ex C in I transferatur modo inventa BH. 4°. Super BI deſcribatur ſemicirculus; & ad BO dimidiam ipſius BI, & BE dimidiam ipſius AB, quæratur tertia proportionalis BK. 5°. Ducatur denique ex puncto K diametro BI parallela KL. Quodſi 6°. punctum L cum extremis diametri B & I rectis BL & LI connectatur, prodibit triangulum rectangulum quæſitum BLI. Hoc modo ſi enunciaveris conſtructionem, ut prodeat reſolutio problematis, quali forma exhibentur reſolutiones in Geometria elementari; demonſtratio ſequens adjicienda utique eſt, ut manifeſtum evadat, ſuppoſitis formulis algebraicis tanquam veris, ſeu, uti loqui amamus, iiſdem conceſſis, conſtructionem eſſe veram. Nimirum quoniam $BD = a$, $AB = 2b$, $BG = b$; erit quarta proportionalis $BH = 2b^2 : a$. Quare cum ſit $BC = \frac{1}{2}a$ & $CI = BH$, erit $BI = x$, ſeu hypothenuſa trianguli rectanguli conſtruendi per formulam primam. Jam quia porro $BO = \frac{1}{2}x$, $BG = BE = b$, erit BK

Fig. Algebr. Tab. XII. Fig. 113.

 $= b^2$:

$= b^2 : \frac{1}{2}x$, adeoque altitudo trianguli rectanguli construendi. Quoniam itaque recta KL est ipsi BI parallela & BLI semicirculus super hypothenusa trianguli descriptus; erit BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa $\frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & altitudo $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quod erat construendum. Suppono nimirum hic tanquam notum, quomodo triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa sit construendum. Quodsi enim notum non sit, demonstratio ex principiis Geometriæ elementaris facile contexitur. Etenim angulus BLI, cum sit in semicirculo *per constr.* rectus est (§. 317 *Geom.*), adeoque BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa BI (§. 91, 95 *Geom.*). Linea KL est diametro BI parallela, & KB ad BC perpendicularis, *per construct.* consequenter perpendicula inter easdem intercepta KB & ex L in BI demissum æqualia sunt (§. 226 *Geom.*). Enimvero KB est altitudini trianguli æqualis, *per construct.* & perpendiculum ex L in BI demissum ipsa trianguli BLI altitudo (§. 227 *Geom.*). Patet itaque si supra hypothenusa describatur semicirculus & in ejus altero extremo erigatur perpendicularis altitudini æqualis, per ejus vero summitatem ducatur recta diametro parallela & punctum, in quo hæc secat semicirculum, connectatur cum extremis diametri; triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa data esse constructum. Problema hoc, cum sua demonstratione, Elementis Geometriæ inseri poterat; ex cujus quippe principiis eodem prorsus modo demonstratur, quo problemata cetera ibidem demonstrantur.

§. 180. Cum formulæ algebraicæ contineant regulas, per quas ex datis determinatur quæsitum; & per calculum ac demonstrationem æquationis, nisi hæc in conditione seu hypothesi problematis continetur, verum esse constet, quod sic determinetur quæsitum, quemadmodum vult formula; qui constructiones ex formulis erutas pure enunciat, & easdem deinde hisce convenienter factas demonstrat, in demonstrando sese non minus exercet, quam si in demonstrationibus Arithmeticæ & Geometriæ elementaris versetur. Quamobrem qui methodum demonstrandi sibi familiarem reddere intendunt, eadem extra Mathesin feliciter usuri; iis omnino suadendum, ut constructiones pure enuncient, & ad eam formam redigant qua resolutiones problematum in Geometria elementari exhibentur, atque deinde demonstrationes, cum quibus jam nobis negotium est, superaddant.

§. 181. Et quoniam problematum simplicium reductio per leges rationum, cujus exempla quædam dedimus (§. 259, 266, 289 *Analys.*), & reductio quadratici ordinis ad lineas reciprocas (§. 263, 265, 278 *Analys.*) propius accedit ad Analysin Veterum,

terum, & demonſtrationes ad formam Veterum componendas formaliter continet; eam negligere minime debet, qui methodum Veterum cum methodo Recentiorum conjungere voluerit. Probe nimirum notandum eſt, ſignorum uſu non variari ipſam methodum, quæ in modo ratiocinandi conſiſtit, ſed tantummodo facilitari & clariorem reddi; quemadmodum demonſtrationes Veterum eædem manent, ſi noſtro more reſolutæ, ope Artis characteriſticæ, ſymbolice repræſentantur. Sane per hoc, quod in Geometria elementari utamur ſignis, quorum in Algebra uſus eſt, demonſtrationes non fiunt algebraicæ, quemadmodum hebetiores judicant; ſed tantummodo brevius & clarius exprimuntur. Vocabula non minus ſigna ſunt, quam ſigna alia, quæ in locum eorum ſurrogantur. Quemadmodum itaque eadem manet demonſtratio, ſi vocabula idem ſignificantia ſibi mutuo ſubſtituis, prouti in verſionibus accidere ſolet, ubi v. gr. Latinis ſubſtituis Germanica, vel Gallica; ita nec alia evadit, ſi vocabulis alia ſigna ſubſtituis, quæ cum ipſis idem ſignificant. Ita perinde eſt, ſive dicas, triangulum BDE ſimile eſt triangulo BAC, ſive ſcribas, △ BDE ∽ △ BAC: etenim ſi verbis reddere volueris, quæ ita ſcripſiſti, verbis iſtis eadem efferre teneris; perinde ac dicendum eſt, *das Dreyecke* BDE *iſt dem Dreyecke* BAC *ähnlich*, ubi Germanice reddere volueris, quod Latine dictum fuerat.

§. 182. In problemate 114, (§. 257 *Analyſ.*) quo, data area trianguli rectanguli, cujus latera ſunt in proportione continua, inveniri jubentur latera; & reductio, & conſtructio ſingularia habet, quæ attentionem tyronum merentur. In reductione notandus eſt modus, quo eliminatur quantitas alterutra incognita, utpote a regula generali recedens (§. 141 *Analyſ.*). Notanda quoque eſt applicatio calculi irrationalium, qua formula efficitur ſimplicior. In conſtructione autem notatu dignum eſt artificium, quo numeri irrationales in lineis exhibentur, & radices quoque quadrato-quadratæ per Geometriam elementarem conſtruuntur. Quæ enim in aliquo problemate ſingularia occurrunt, ad ea advertendus eſt animus, cum eidem inſinuentur artificia, quibus utendum in caſu ſimili, quoties is occurrit. Et ſelecta dicuntur problemata, quæ vel in veritatum cognitu neceſſariarum notitiam nos deducunt, vel artificia ſuggerunt, quibus Ars inveniendi locupletatur, ipſo uſu rectius diſcenda, quam per præcepta; cum hæc non ſatis intelligantur, niſi per exempla. Quamobrem qui in Analyſi proficere voluerit, non ſine ſingulari attentione circa ſingula problemata verſari tenetur; ut, ſi qua nova occurrunt, ea comparatione cum regulis generalibus inſtituta advertat & memoriæ infigat.

§. 183. Non commemoramus hic alia, quæ in ceteris problematis annotabit attenta mente & solutionem & constructionem perlustrans; ne præter necessitatem justo prolixiores videamur. Unum tamen est, quod notasse non piget, scilicet ex problemate 124 (§. 275 *Analys.*) patere, per Algebram subinde prodire formulas, quæ statim dant constructionem, quam Veteres suo modo invenerunt. Patet in hoc problemate ratio, quod in æquatione investiganda insistamus iisdem principiis, quibus usi Veteres in eruenda constructione. Et quamvis problema sequens (§. 279 *Analys.*) de latere Pentagoni inveniendo contrarium insinuare videatur; videbis tamen, si attentius rem consideres, nos totos in eo esse, ut investigemus relationem lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni regularis eidem circulo inscriptorum simul, qua nititur constructio Veterum. Eam vero non dare regulas reductionis generales; sed utendum hic esse singulari artificio substitutionis; quo neglecto, per æquationem $x^2 = 4b^2 - b^4 : a^2$, vel per $\frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ longe alia prodiret constructio, quam dedere Veteres. Immo nisi relatio lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni simul, ex inventis Veterum, nobis cognita & perspecta fuisset; non facile adfuisset ratio, cur de ista substitutione cogitassemus. Duo igitur hic probe notari velim, cum in veritate investiganda multum relictum sit tentaminibus, in problematum resolutionibus algebraicis & præsertim in formularum constructionibus, operam dandam esse ut problema & ejus constructio efficiatur dependens a veritatibus aliis jam inventis; quæ dependentia in methodo Veterum, qua usi sumus in Geometria elementari, & in demonstrationibus propositionum syntheticis, unice attenditur, & ut ea fini tententur substitutiones, quibus locus esse potest. Elucescit hinc usus, quo commendatur studium in veritatibus nobis jam notis analytice investigandis, si nempe proponantur tanquam quærendæ. Istiusmodi enim investigationes efficient, ut animum attendas ad artificia, quæ alias eundem non subirent, & quibus posthac felici successu usurus es in investigandis iis, quæ nondum cognita, sed adhuc latent. Neque enim sufficit, artificia quædam esse in potestate nostra; verum etiam requiritur ratio, cur eadem mentem nostram subeant, quando iisdem commode utimur: id quod ex principiis nostris psychologicis abunde patet. Ratio autem ista non semper a nobis pendet, sed a casu, qui potestati nostræ subducitur. Quodsi vero artificia nobis fuerint familiaria, quoniam iisdem jam ante usi ea attentione convenienti memoriæ infiximus; probe conscii varia esse tentanda, ubi veritas latens eruenda; eadem nobis in memoriam revocamus: id

quod

quod denuo per principia noſtra pſychologica manifeſtum eſt; ut nihil affirmetur, quod non ex iiſdem demonſtrari poſſit, ſi demonſtratio exigatur; quamvis defectum demonſtrationis hic ſuppleat experientia domeſtica, ſi quis dictis fidem habere voluerit.

§. 184. Forſan nec inconſultum erit quædam adhuc moneri circa examen Regulæ *Renaldinianæ* polygonum regulare quodcunque circulo inſcribendi. Conſtat ex Elementis EUCLIDIS, conſtare modum, quo trigonum, quadratum, pentagonum, octogonum, decagonum, quindecagonum circulo inſcribitur, & idem patet ex anterioribus. Quamobrem totum examen huc redit, ut inveſtigetur valor lateris cujuſdam polygoni, aut ſaltem partis ejuſdem, per regulas demonſtratas; deinde vero idem valor eruatur per regulam RENALDINI; quæ ſi vera fuerit, valor per eam inventus erit alteri æqualis. Quodſi ergo hoſce duos valores æquales ponas, & exinde eruas contradictionem; hinc patebit, regulam *Renaldinianam* eſſe falſam, cum alteram veram eſſe conſtet. Nimirum hinc agnoſcitur illam contradicere veritati manifeſtæ, adeoque, per principia logica, quibus nititur tota methodus demonſtrandi per indirectum, colligitur eam falſam eſſe debere. Examen adeo præſens pendet a principio contradictionis, & in applicatione methodi demonſtrandi per indirectum conſiſtit. Eodem artificio utimur etiam in aliis; veluti ſi quis dederit Quadraturam circuli; ſumta diametro pro unitate, valorem peripheriæ eruimus in fractionibus decimalibus, quia conſtat numeros LUDOLPHI notiſſimos cum veritate conſentire. Quodſi enim ab his diverſi prodeant, prætenſam quadraturam circuli veritati contradicere, adeoque falſam eſſe colligitur. Novi equidem quod huic examini manus victas dare nolint, qui circuli quadraturam ſibi inveniſſe videntur: ſed hi ſunt, qui ignorant, quomodo numeros ſuos eruerit LUDOLPHUS, & quales ſint methodi recentiorum, quibus inveſtigantur ſeries infinitæ pro circulo, unde iidem numeri deducuntur. Valeat hic pervulgatum iſtud: Cum ignorante principia non eſt diſputandum.

§. 185. Quantum interſit diſcriminis, inter conſtructionem elegantem & minus elegantem, clariſſime eluceſcit, ubi utramque conſtructionem * trianguli rectanguli, ex data area una cum angulo uno obliquo, inter ſe conferre volueris. Ipſa vero hæc collatio etiam manifeſtabit rationem, cur conſtructio ſecunda prima ſit elegantior. Conſtructio ſecunda ſimplicitate ſua ſeſe ita commendat, ut in Geometriam referri poſſit. Habet autem hoc ſingulare conſtructio, quod recta ſimul repræſentet ſinum totum, & rectam datam; ſicque loco quartæ proportionalis invenienda ſit

* Probl. 149.

ſit tertia, ſingulari modo per conſtructionem trianguli rectanguli determinata, qui ab eo longius recedit, quem in Elementis Geometriæ docuimus; etſi hujus quoque fundamentum in illis ipſis contineatur. Quodſi quis conſtructionibus æquationum in Algebra ſedulam operam navaverit; is varias ſolutiones ex Elementis demonſtrandas deteget, quæ in uſum conſtructionum elegantium in Algebra, non ſine tyronum commodo, poſthac Geometriæ elementari inſerentur; ut hæc ampliorem nanciſcatur uſum, & ſtudium conſtruendi formulas algebraicas facilitetur.

§. 186. Problema 152, cum duobus ſequentibus (§. 325 *& ſeqq. Analyſ.*) inter difficilia referri ſolet. Ita autem eadem reſolvimus, ut nec tyronibus quicquam difficultatis faceſſant. Præmittitur, in reſolutione primi, theorema quod tanta facilitate ex principiis Geometriæ elementaris demonſtratur, ut ipſum in iiſdem Elementis locum mereatur. Hoc ipſo autem exemplo docemur, quod in uſum Analyſeos & Geometriæ ſublimioris, ſupplementum quoddam Elementorum Geometriæ conſcribi poſſet, quo ſtudium algebraicum & Matheſeos mixtæ multum facilitaretur. Sane ſi hoc ipſum theorema, quod ad reſolvendum problema præſens primus adhibuit NEWTONUS, ab EUCLIDE jam fuiſſet traditum; Mathematici alii non tantopere in reſolvendo hoc problemate deſudaſſent. Confirmat igitur problematis præſentis reſolutio ea, quæ ſuperius (§. 176) inculcavimus de non contemnendis theorematis, quæ nullum uſum habere videntur, ſeu quorum ſaltem uſum prævidere minime licet. Vi hujus theorematis, ſolo calculo literali, abſque regulis Algebræ, ex ſinu & coſinu anguli ſimpli eruuntur ſinus & coſinus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, ſextupli, ſeptupli &c. ita ut hoc problema jam ſuperius c. 3. exhibere potuiſſemus, ubi uſus calculi literalis in inveniendis theorematis explicatur. Apparent adeo denuo, quam ardua ſolo calculo literali eruantur, etiamſi Algebra prorſus ignota ſupponatur. Inprimis vero animum attendi convenit ad artificium, quo ex theorematis particularibus eruitur univerſale. Conſiſtit hoc in reductione ad theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo; & reductio ipſa nititur comparatione formularum particularium problematis præſentis cum formulis particularibus problematis ſuperioris. Principium hoc reductionis ampliſſimum habet uſum in omni Arte inveniendi, etiam extra Matheſin; quemadmodum jam in Pſychologia me monuiſſe memini. Inprimis autem reductio problematis unius ad aliud, quod notius & ſimplicius, in Geometria ſublimiori & in calculo integrali uſum prorſus eximium habet. Quamobrem

con-

consultum est hoc artificium tempestive observari. Tollit reductio hæc, in casu præsente, omnem laborem, cumque valde molestum, quo alias opus foret, si eodem modo legem progressionum in infinitum, quam formulæ particulares loquuntur, ex earundem comparatione elicere velles; quemadmodum supra fecimus, cum theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigaremus. Ostendi etiam, quomodo ex formula cosinus multipli, expungatur valor sinus simpli, per legem substitutionis, ut cosinus multipli determinetur per solum simplum atque sinum totum. Hoc modo eruuntur alia theoremata particularia; & universale quoque aliud prodiret, si eadem substitutione valores b^2, b^4, b^6, b^8, &c. eliminare velles. Quem calculi molestia non deterret, is eundem tentare potest; quamvis non opus habeamus hisce theorematis, cum dato sinu facile reperiatur cosinus (§. 16 *Trigonom.*). Ceterum hic quoque elucet, quomodo infinita theoremata comprehendantur uno generali. Sed cum hic nihil occurrat, quod non jam animadversum fuerit in problemate 29 (§. 95 *Analys.*); plura ea de re non addimus. Corollarium vero, quod adjicitur, attentionem meretur, ut notes alibi etiam profutura. In eodem scilicet ostendimus, quod idem theorema inserviat determinandis chordis arcuum multiplorum, quo sinus angulorum multiplorum determinantur: immo quod hinc etiam pendeat multiplicatio arcus, & consequenter anguli per datum numerum. Notandum igitur hic est; in scientiis, problematum quoque æquipollentiam esse perpendendam; non modo, ne entia præter necessitatem multiplicentur, verum etiam ut, in solutione problematis investiganda, seligamus illud quod facilius solvi potest. Sane, in nostro casu, non adeo prona erat solutio, si loco sinus anguli multipli investigandam tibi proposuisses chordam arcus multipli. Neque enim meditatio te duxisset ad theorema geometricum, cui debetur solutionis problematis præsentis facilitas. Multum in philosophia usum habet, ut æquipollentia agnoscantur. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, Mathesi operam navant, ea probe notare tenentur, ad quæ hic attentionem excitamus.

§. 187. Problema de tangente arcus multipli ex data tangente simpli invenienda, quod operosissime solvitur ab aliis, hic nullo fere negotio solvitur, si nostram solutionem cum aliis solutionibus compares. Notanda igitur sunt artificia, quæ facilitatem solutionis pariunt. Primum artificium, idque palmarium, in eo consistit, quod problema hoc consideretur tanquam dependens ab altero de inveniendo sinu anguli multipli ex dato sinu simpli. Unde intelligitur, quantæ sit utilitatis, ut

ut dependentiæ problematum a se invicem habeatur ratio. Quoniam vero hoc pacto prodit formula, tangentem anguli multipli ex datis sinu & cosinu simpli, non ex tangente simpli determinans, quod quærebatur; ideo, per legem substitutionis, valores sinus & cosinus simpli eliminamus, ut eorum loco introducatur tangens anguli simpli. Duæ sunt quantitates exterminandæ, nimirum *a* & *b*. Singulari autem ratione hic accidit ut, cum una earundem *a*, eliminetur etiam altera *b*: quod nisi succederet, substitutione nihil efficeres, propterea quod valorem ipsius *a*, per tangentem *t* expressum, ingreditur simul *b*, & vicissim valorem *b*, per *t* expressum, simul *a*. Atque hæc forsan ratio fuit, cur problema nostrum independenter a problemate sinus & cosinus anguli multipli inveniendi solvendum esse visum fuerit. Unde patet veritatem investigaturum non nimis tribuere debere iis, quæ apparent; &, nisi impossibilitas fuerit demonstrata, non obstante apparentia tentandum esse, quod successu cariturum videtur. Tentaminibus enim in veritate investiganda multum esse tribuendum nemo diffitebitur, nisi qui eorum usum nondum fuit expertus. Ceterum hic quoque attentionem meretur artificium, quo utimur in abbreviando calculo, eoque a perplexitate tædiosa liberando; dum pro coëfficientibus substituimus literas majores, pro quibus deinde, calculo absoluto, iterum reponuntur earundem valores. Etsi enim eodem artificio jam antea fuerimus usi, veluti in problematis 54 & 81 (§. 165, 213 *Analys.*); applicatio tamen in casu præsenti non statim cuilibet succurrit, nisi qui in anterioribus ad idem artificium animum attendit, & distincta notione comprehensum memoriæ infixit; quemadmodum ex natura animæ, vi principiorum nostrorum psychologicorum, facile demonstratur. Ea enim dedimus in Psychologia principia, per quæ ratio a priori dari potest, in casu dato, eorum quæ in anima contingere observamus. Denique notandum est, quomodo formula pure enuncietur, ut prodeat solutio facillima intellectu, in locum formulæ surroganda. Continet ea legem progressionis in infinitum, qua nituntur formulæ particulares, qualem in anteriori problemate deduximus ex formulis particularibus in usum generalis eruendæ. Ceterum, quæ hic annotavimus de problemate tangentis multipli ex tangente simpli arcus inveniendæ, eadem etiam tenenda sunt de problemate secantis anguli multipli ex data secante simpli invenienda (§. 328 *Analys.*).

§. 188. Quæ hactenus de Algebra tradidimus, non progrediuntur ultra terminos ab Arabibus assignatos, a quibus eandem accepimus; nisi quatenus ope Arithmeticæ literalis, seu calculi universalis, ad quem animum non

non adverterunt Arabes, multo amplior efficitur illius usus, ut per eam pateat accessus ad ea, quæ inaccessa videbantur. Ante inventam vero Arithmeticam literalem, Algebram ulterius provehere studuerunt Itali; nec infelici prorsus successu. Cum enim Arabes in æquationibus quadraticis subsisterent; SCIPIO FERREUS, ulterius progressus, dedit regulas ex æquationibus cubicis extrahendi radicem, a CARDANO publici juris factas; LUDOVICUS vero *Ferrariensis* etiam ex æquatione biquadratica radicem extrahere docuit. Neque Algebra in hunc usque diem ulterius promota, ex quo, ope calculi literalis & calculi differentialis, adeo amplificatus est ejusdem usus, ut nihil videatur a cognitione nostra adeo remotum, quin ad ipsum aperiat aditum. Etsi enim DE TSCHIRNHAUSEN invenisse sibi visus est methodum universalem quamcunque æquationem affectam reducendi ad puram; eamque Analysi suæ demonstratæ inserere nullus dubitavit CAROLUS REYNEAU; tentanti tamen apparebit, eam non succedere, nisi in æquationibus cubicis, ad quas etiam eandem tantummodo applicavit DE TSCHIRNHAUSEN & qui eandem approbavit REYNEAU: eandem enim methodum ad æquationes altioris gradus applicaturus, incides in æquationes, quæ superioris gradus sunt quam resolvenda; id quod monendum utique fuerat, ne Algebra complementum suum videatur nacta, a quo tamen longissimo intervallo adhuc distat. Non difficile fuerat Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hoc observare, modo applicationem in superioribus æquationibus tentasset, nec nimia forsan in vires suas confidentia, quæ ipsum non in unum errorem seduxit, difficultates oblatas pro superabilibus reputasset, quæ omnino insuperabiles sunt, saltem hactenus superari minime possunt. Quoniam itaque methodus universalis, extrahendi radicem exactam ex æquatione quacunque data, desiderabatur, nec adeo facile erat eandem reperire; ad extractionem radicis per approximationem confugerunt Analystæ, & methodum ingeniosam jam dedit FRANCISCUS VIETA. Alii alio modo idem tentarunt; quod prolixe recenseri nostri jam non est instituti: neque enim nobis propositum est historiam Algebræ scribere, sed ea tantummodo enarrare, quæ scitu necessaria sunt lectori Elementorum nostrorum Analyseos, ut majore luce fruatur, nec quasi in tenebris versetur, ignorans, cur ea de extractione radicum ex æquationibus altioribus tradamus, quæ capite quinto continentur. Nos hic retinuimus methodum facillimam, (quam Arithmetici nostrates, *die Rechenmeister*, in Algebra numerosa *Cossicam mechanicam* appellarunt; & quam etiam adhibuit NEWTONUS, & RAPHSON in peculiari Tractatu multis exemplis

illuſtravit); ſed noſtro more captui tyronum magis accommodatam; qua radix æquationis reperitur in fractionibus decimalibus tam exacta, quantum deſideratur. Et quoniam HALLEIUS regulas duas univerſales inveſtigavit, alteram rationalem, alteram irrationalem, quæ merito commendatur; easdem eadem methodo inveſtigare docuimus, qua in exemplis ſingularibus uſi ſumus, & quæ breviori ac trita magis via ad easdem ducit, quam qua HALLEIUS ad easdem pervenit. Methodus hæc in praxi ſatisfacit, nec ea ulteriorem Algebræ perfectionem deſiderat. Neque enim in praxi deſiderantur numeri irrationales, quales prodeunt per inventas generales formulas radicum in æquationibus cubicis (§. 358 *Analyſ.*); ſed numeri rationales. Quando vero ex irrationali actu extrahenda radix; eam quærimus in fractionibus decimalibus, quales reperimus per methodum, de qua jam nobis ſermo eſt. Applicatio autem formularum irrationalium plerumque plus pareret laboris quam methodus approximandi. Immo ſi in formula, ſubſtitutis numeris pro literis, extrahenda foret radix altioris gradus; non inutiliter recurreremus ad methodum approximandi, qua ſtatim uti poteramus (§. 365 *Analyſ.*). Non tamen ideo damnamus, ſi quis in extrahendis radicibus ex æquationibus ſuperioribus ulterius progrediatur: facit enim ad perfectionem theoriæ, ſeu incrementum ſcientiæ, & ad Artem inveniendi locupletandam. Enimvero, cum de commoda methodo extrahendi radicem ex æquatione quacunque data, ſive exacte, ſive per approximationem, laborarent Mathematici; in naturam æquationum inquiſiverunt & quomodo eædem præparentur, ſicubi opus eſt, inveſtigarunt. Unde enata ſunt problemata iſta, quæ initio hujus capitis explicantur.

§. 189. Problemata iſta intellectu facilia ſunt ei, qui in anterioribus attentionem ſuam ſuumque acumen deſiderari minime paſſus; ut adeo opus non ſit quædam de iis moneri. Calculum in ſingulis adeo perſpicue repræſentavimus, ut in eodem verſantes levi ſaltem attentione opus habeant ad problematum ſolutionem intelligendam. Uſus autem eorum, quæ de natura æquationum docentur, elucescit ex problemate 165 (§. 351) de extrahenda radice rationali, ſi quam habet æquatio; id quod rariſſime accidit. Duplicem proponimus methodum. Altera nititur principio ſubſtitutionis; altera vero principio de natura æquationum, quod ſcilicet æquationes altiores prodeant per multiplicationem ſimplicium. Atque hæc poſterior ingenioſior eſt priori. Non amplius turbabit tyrones, quod alterum æquationis membrum hic ponatur o, modo in anterioribus fuerint ſatis attenti; quoniam per reductionem aliquoties prodit

dit talis æquationum forma. Quando primum tale quid occurrit, attoniti quasi hærent tyrones, quod aliquid nihilo æquale esse debere existiment, non advertentes ad diversitatem signorum, ut ipsis succurreret axioma, Si æqualia ab æqualia subtrahuntur, nihil relinquitur. Nimirum hic differentia nulla est: differentia autem nulla per fictionem quandam nihilo æqualis ponitur. Proprie enim loquendo ei, quod non est, nullum prædicatum positivum competere potest; juxta canonem tritissimum scholasticorum, Non entis nulla sunt prædicata. Æqualitas est prædicatum, quod quantitatibus convenit: quod vero nullum est, cum non sit in quantitatum numero, nec æquale dici potest alteri. Fingitur adeo nihil quantitatis esse aliquam quantitatis speciem; ut de eo prædicatum, quod nonnisi quantitatibus convenire potest, enunciari possit fiducia axiomatis, Quamlibet quantitatem æqualem esse sibimetipsi. Nugari videretur, qui extra usum in calculo talia proponeret; veluti si demonstrare vellet, nihilum æquale esse nihilo. Hac tamen demonstratione subsistit fictio adeo utilis in calculo algebraico. Simile quid obtinet, si alterum æquationis membrum fuerit quantitas privativa; ubi tyrones perspicaciores, ad diversitatem signorum in altero æquationis membro non attenti, vel saltem ignari, quantitates privativas excedere positivas, hærent, existimantes aliquid poni minus nihilo, seu quod aliquid est æquale esse debere ei quod nihilo minus est; cum tamen revera minus nihilo ponatur ei quod minus nihilo est æquale; quatenus, in calculo, fingimus quantitatis defectum per eam, quæ deficit, æstimabilem esse veram quantitatem. Fictiones istiusmodi plurimum habent utilitatis in calculo, nec iisdem carere possumus. Nodum in scirpo quærit, qui contra eas difficultates facessit. Ad fictiones recurrendum est etiam extra Mathesin, nisi nescire velis, quæ scitu maxime necessaria sunt. Ita, in Jure naturali, Civitatem fingimus instar personæ liberæ, quæ sui juris est, & cui per naturam suam certa competunt jura; immo individuum unum physicum in plura moralia dividimus, & individuum morale physico contradistinguimus, tanquam personam diversam ab eo; immo unum eundemque hominem distinguimus a se ipso, quasi duæ sint personæ, quarum una alteri obligatur, & uni in alteram competunt certa jura: qua fictione utitur ipse Apostolus, dum hominem novum veteri contradistinguit. Nec ignotæ sunt istiusmodi fictiones in Jure Romano. Exemplo sit postliminium; ut taceamus alia, ubi fictiones non adeo manifestæ sunt, alio loco a nobis commemorandæ. Quodsi dicas, in explicanda æquationum natura poni $x = -b$, adeoque quantitatem positivam æqua-

lem privativæ: id quod utique contradictorium ſit; cum quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſint, adeoque ratio æqualitatis, qualem ſupponit æquatio, inter eas intercedere nequeat (§. 24 *Analyſ.*). Enimvero cum, in æquationibus compoſitis, radix non minus quantitas negativa, quam poſitiva eſſe poſſit; ea autem deſignetur litera x; quamdiu valor ejus ignoratur, ſignum eidem adjiciendum dubium eſt: in caſu autem dubio ſigno + afficitur: id quod etiam in ſequentibus fiet, ubi utile eſt non attendi ſignorum diverſitatem. Quando itaque in formatione æquationum ſumitur $x = -b$, non ſupponitur, quantitatem poſitivam privativæ æqualem eſſe, ſed tantummodo ſumitur, eadem litera x indigitari poſſe non minus quantitatem poſitivam, quam negativam; cum ſigna primitiva ſint prorſus arbitraria; & quantitatem privativam ſubinde utiliter conſiderari inſtar poſitivæ, quando fictionem iſtiuſmodi fert natura rei, nec ea in errorem ſeducit.

§. 190. In reſolutione problematis 168 (§. 358 *Analyſ.*), quo ex æquatione cubica extrahi jubetur radix, ſingulare occurrit artificium, quo quantitas incognita x dividitur in duas partes indeterminatas y & z, & harum ope æquatio data transmutatur in aliam, quæ duas incognitas indeterminatas continet. Etenim hoc ipſo obtinetur, ut lege comparationis terminorum utraque determinetur, & ſic inveniatur quæſitum per partes. Nimirum, quia y & z indeterminatæ ſumuntur, ideo licet ponere $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ & $y^3 + z^3 = q$; non alia de cauſa, quam quia commodum accidit, ut per primam æquationem eruatur valor unius indeterminatæ z, qui in æquatione altera ſubſtitutus dat valorem ipſius y atque z determinatum. Æquatio $y^6 - qy^3 = -\frac{1}{27}p^3$ duas habet radices; quarum altera quod ſit $= y$, altera vero $= z$, ex eo liquet, quia ex æquatione prima $3y^2z + 3z^2y = py + pz$, reperitur $y = p : 3z$, perinde ac $z = p : 3y$, & valor ipſius y in altera $y^3 + z^3 = q$ ſubſtitutus dat æquationem $z^6 - qz^3 = -\frac{1}{27}p^3$, eandem cum anteriore. Manifeſtum enim eſt æquationem, quæ ducit ad valorem determinatum quantitatis cognitæ, duas habere debere radices, quarum una denotat y, altera vero z; etſi perinde ſit quam ipſi y, quam vero ipſi z tribuere velis; cum quantitates y & z pro arbitrio aſſumantur, ut pro majore & minore habere poſſis, quam volueris. Hoc artificio jam uſi ſumus in inveſtiganda regula tollendi ſecundum terminum ex æquatione data (§. 343 *Analyſ.*), ut nempe coëfficiens ſecundi termini propter indeterminatam t poni poſſit nihilo æqualis. Diverſa tamen in præſenti caſu ejus applicatio eſt.

§. 191. Limites æquationum eo modo inveſtigare docuimus, (§. 356 *Analyſ.*), qui in *Commentariis ad Geometriam*

metriam CARTESII proponitur. Habet enim hoc singulare ea methodus; quod Algebram, quæ tota nititur ratione æqualitatis, extendat ad rationem inæqualitatis, ubi inæqualia, mediante signo $>$ vel $<$, eodem modo inter se comparantur, quo in Algebra æqualia mediante signo $=$, & reductio per similia axiomata instituitur, quo eadem in Algebra fieri consuevit. Hanc ipsam vero methodum, etsi hactenus attentione sua indignam eam judicaverint Analystæ, etiam alibi usui esse posse, exemplo aliquo facili monstrare lubet. Ponamus quæri, qualis sit ratio, quam habent duæ quantitates inæquales ad eandem tertiam. Resolutio problematis ita sese habet:

Sit major $= x$ Data tertia $= a$
minor $= y$

erit
$$x > y$$
$$\overline{\qquad\qquad} \cdot a$$
$$ax > ay$$

Fiat $x : a = t : v$

erit $x = \frac{at}{v}$

adeoque $\frac{a^2t}{v} > ay$

$$\frac{at}{v} > y$$

$$\frac{t}{v} > \frac{y}{a}$$

Ergo ob $\frac{t}{v} = \frac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

hoc est $x : a > y : a$

Habemus adeo theorema: *Majus ad idem majorem rationem habet, quam minus*, istiusmodi analysi investigatum, qua problemata algebraice solvuntur. Non alio fine proponimus hoc problema, quam ut ideam quandam hujus methodi animo tyronum ingereremus. Consultum igitur erat, ut exemplum eligeremus facile, & ex anterioribus jam notum. Videbimus deinceps applicatione methodorum, quæ nobis innotescunt, ad exempla notissima & maxime vulgaria haud raro detegi maxime ardua: sit ita, quod methodorum inventores, ne ardua nullo fere negotio detexisse videantur, eas applicent ad exempla, quæ sublime quid spirant & intellectu difficilia deprehenduntur.

§. 192. Extractio radicis ex serie infinita (§. *366 Analys.*), etiam artificium quoddam singulare habet; quod consistit in diversa applicatione assumtionis quantitatum indeterminatarum lege comparationis determinandarum; quo supra jam usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), & in extrahenda radice ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*). Series enim assumtitia, qua exprimitur valor ipsius x, qui quæritur, coëfficientes habet

indeter-

indeterminatos, lege comparationis determinandos. Ut vero determinari possint, perinde ac superius lege substitutionis; æquatio proposita, cujus coëfficientes determinati sunt, transmutatur in aliam, quam coëfficientes indeterminati cum determinatis simul ingrediuntur; quemadmodum fecimus in extractione radicis ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*); etsi alio principio hic nitatur coëfficientium indeterminatorum determinatio, cujus ratio ex ipso contextu liquet, & quod affine est ei, quo eodem fine usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), quamvis ob aliam rationem. Patet hinc, quam utile sit ut artificia analytica, quibus in resolutione problematum utimur, inter se conferantur, quo pateat eorum, quæ eadem sunt, diversa applicatio. Quodsi enim in rationem applicationis inquisiveris; id non modo efficiet, ut eadem in casu eodem recurrente facilius memoriam subeat; verum etiam hoc ipso consequeris, ut eandem, prout casus exigit, ipsemet variare possis. Istiusmodi autem disquisitiones apprime necessariæ sunt ei, qui in Arte inveniendi generali proficere vult studio Algebræ, & intellectui conciliare gestit eam habitudinem, qua ad artificia heuristica diversimode applicanda opus habet. Problema, de quo jam loquimur, maximæ utilitatis est: continet enim methodum, quæ *Regressus serierum* nomine venit, & cujus maxima est utilitas in Geometria sublimiori; quemadmodum suo loco ostendemus. Equidem problema hoc tanta perspicuitare exposuimus, ut tyro in anterioribus cum laude versatus idem absque ulla difficultate intelligat, nisi calculi molestias fugiat; quodsi tamen quis ab iisdem abhorreat, idem tamdiu seponat, donec regressu serierum ad solvenda problemata opus habuerimus.

§. 193. Extractiones radicum ex æquationibus, de quibus diximus in capite præsente, usum tantummodo habent in solutionibus problematum arithmeticis. Quamobrem docendum quoque erat, quomodo æquationes altiores geometrice construantur. Per rectas & circulum eædem construi nequeunt: sed confugiendum hic est ad lineas curvas. Quamobrem cum de lineis curvis, præter circulum, nihil doceatur in Geometria elementari; nostrum erat ante docere, quomodo Algebra ad Geometriam sublimiorem, quæ de curvis agit, applicetur; ut ejus ope curvarum descriptiones, & proprietates, ac symptomata, hoc est, prædicata absoluta & conditionata, inveniantur. Applicationem hanc debemus CARTESIO, qui eam docuit in Geometria, sed non ad captum tyronum. Facile tamen reperiri poterat, si quis ad vulgaria animum attendere voluisset. Tota enim in

hoc

hoc consistit, ut curva definiatur per æquationem, & ex ea, adhibitis artificiis in Algebra usitatis, eliciantur curvarum constructiones, proprietates, & symptomata. Ecce igitur tibi facillimam ad hanc methodum, quæ inexhaustæ utilitatis est in Geometria sublimiori, viam. Constat ex elementis Geometriæ (§. 327 *Geom.*),
Tab. II. Fig. 17. semiordinatam PM esse mediam proportionalem, inter abscissam AP & complementum diametri PB; si utamur terminis in doctrina de Curvis receptis, & initio capitis sexti explicatis. Quare si sit diameter AB $=a$, abscissa AP$=x$, semiordinata PM$=y$, erit complementum diametri PB$=a-x$; consequenter

$$AP : PM = PM : PB$$
$$x : y = y : a-x$$

adeoque $y^2 = ax - x^2$

Habemus adeo æquationem, quæ circulum definit. Quodsi jam ponamus, nos nescire, qualis sit hæc curva; ea, quæ de eadem nobis innotescere possunt, hoc modo eruimus.

Sit $y = 0$
erit $ax - x^2 = 0$
$ax = x^2$
$a = x$

Patet itaque 1°. curvam secare rectam AB in B.

Sit $x = 0$
erit $y^2 = 0$
$y = 0$

Unde liquet 2°. curvam secare rectam AB in A.

Sit $x = \frac{1}{2}a$
erit $y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$
$= \frac{1}{4}a^2$
$y = \frac{1}{2}a$

Videmus itaque, 3°. si ex medio rectæ AB erigatur perpendicularis CD, æqualis AC, curvam transire per punctum D.

Quoniam eadem curva transit per A & B (*vi num.* 1 *&* 2); evidens est, 4°. eam concavitatem rectæ AB obvertere. Et quoniam patet, singula sese eodem modo habere debere, si semiordinatæ ex altera parte sumantur; porro liquet, 5°. curvam esse in se redeuntem. Quæratur jam magnitudo rectæ MC, ex puncto C, in medio rectæ AB assumto, ad extremitatem semiordinatæ PM, seu punctum in curva M ductæ.

Sit $AC = \frac{1}{2}a$ $MC = z$
$AP = x$
erit $PC = \frac{1}{2}a - x$
adeoque $PC^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$
$PM^2 = ax - x^2$ per naturam curvæ.

Ergo ob $MC^2 = MP^2 + PC^2$, $z^2 = \frac{1}{4}a^2$
$z = \frac{1}{2}a$

6°. Recta igitur ex puncto C in quodlibet peripheriæ punctum M ducta æqualis est rectæ AC, seu dimidiæ rectæ AB; consequenter rectæ omnes ex eodem puncto C in periphe-

riam ductæ æquales sunt (§. 87 *Arithm.*): quæ est proprietas circuli, per quam definiri solet in Geometria elementari.

Hinc vero porro 8° liquet, Curvam hanc describi, si recta CA circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ est definitio circuli realis.

Ponamus $y = \frac{1}{2}a$

erit $y^2 = \frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{array}\right\} = 0$

$x = \frac{1}{2}a$

Quoniam superius (*n.* 3) reperimus $y = \frac{1}{2}a$, si fiat $x = \frac{1}{2}a$; ideo patet, 9°. In nullo alio puncto, quam in C semiordinatam rectæ dimidiæ AB æqualem esse posse.

Si sit $PM = y$, $PC = v$, $CM = \frac{1}{2}a$ (*n.* 6); erit per theorema Pythagoricum:

$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$

adeoque $\frac{1}{4}a^2 > y^2$

$\frac{1}{2}a > y$

$y < \frac{1}{2}a$

Quamobrem 10°. ubivis extra centrum, semiordinata minor dimidia recta AB: consequenter cum minor sit semiordinata in centro erecta CD (*n.* 3), semiordinatæ autem sint chordarum dimidiæ; 11°. diameter chordarum maxima est.

Sit distantia semiordinatæ a centro $PC = v$, $PM = y$, erit

$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$ (*n.* 6).

Et si alia $PC = t$, PM alia $= z$,

erit $\frac{1}{4}a = z^2 + t^2$

Quare $z^2 + t^2 = y^2 + v^2$

sit $t > v$

erit $z^2 < y^2$

$z < y$

12°. Semiordinata itaque z tanto minor alia quacunque semiordinata y, quanto magis a centro distat; consequenter chordæ tanto minores, quanto a centro remotiores.

Sit $AB = a$, $AP = x$, erit PB $= a - x$, adeoque Tab. II. Fig. 18.

$AP^2 = x^2$

$PM^2 = ax - x^2$, ex natura Curvæ

$AM^2 = ax$

Similiter $PB^2 = a^2 - 2ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2$

$MB^2 = a^2 - x^2$

$AM^2 = ax$

$MB^2 + AM^2 = a^2 = AB^2$

Quoniam $AB^2 = AM^2 + PB^2$, triangulum AMB rectangulum est, consequenter 13°. angulus AMB in semicirculo rectus.

Et quia $AM^2 = ax$, $BM^2 = a^2 - ax$;

erit $a : AM = AM : x$

$a : BM = BM : a - x$

hoc est $AB : AM = AM : AP$

$AB : BM = BM : PB$

Est

Eſt igitur 14°. Chorda media proportionalis inter diametrum AB & ſegmentum adjacens.

Tab. II. Fig. 19. Quodſi quæratur recta TM ex puncto quocunque T intra circulum aſſumto in peripheriam ducta; ducatur, per centrum C & punctum T, recta AB, quæ erit diameter circuli, & ex puncto peripheriæ M demittatur perpendicularis MP, quæ erit ſemiordinata. Sit jam

$AC = CB = a \qquad AP = x$

$BT = b \quad$ erit $\quad PC = a - x$

erit $CT = a - b \qquad PT = 2a - b - x$

Porro

$PM^2 = 2ax - x^2$, ex natura circuli

$PT^2 = (2a - b^2) - 4ax + 2bx + x^2$

$$TM^2 = (2a-b)^2 - 2ax + 2bx$$
$$= (2a-b)^2 - 2(a-b)x$$
$$= TA^2 - 2CT.\ AP$$

Eſt adeo 15°. Quadratum rectæ TM æquale exceſſui quadrati rectæ TA ſupra rectangulum ex duplo diſtantiæ puncti T a centro C in abſciſſam AP puncto M reſpondentem. Hoc theorema in Elementis non extat: ex eo tamen conſequuntur, quæ in iis demonſtrantur. Nimirum quia 2CT conſtans eſt; decreſcente abſciſſa AP decreſcit quoque rectangulum ex AP in 2CT; & cum quadratum rectæ TA non minus conſtans ſit, quo minus fuerit rectangulum ex 2CT in AP, eo major evadet exceſſus quadrati rectæ TA ſupra hoc rectangulum; conſequenter eo majus erit quadratum rectæ TM, quippe eidem æquale, adeoque etiam ipſa recta TM. Et quando TM incidit in diametrum, ſeu punctum M in A, quadratum ipſius TM æquale evadit quadrato ipſius TA; conſequenter TA major eſt qualibet TM, adeoque maxima rectarum, quæ ex puncto T in peripheriam duci poſſunt. Incidimus adeo 16°. in theorema 63 (§. 303 *Geom.*)

Ante invenimus (*n.* 14) $AM^2 = AB.$ Tab. II. Fig. 18.
AP, hoc eſt, quod quadratum chordæ ſit æquale rectangulo ex diametro in abſciſſam. Quamobrem, cum creſcente abſciſſa AP creſcat arcus AM, creſcat etiam rectangulum ex diametro AB in abſciſſam AP; ideo patet 17°. quadratum chordæ majoris eſſe majus quadrato chordæ minoris; conſequenter chordam majorem ſubtendere arcum majorem, quam minor, ſeu chordam arcus majoris majorem eſſe, chordam minoris minorem.

Alia ex æquatione ad circulum deducuntur, in ipſa Analyſi præſertim infinitorum, qua in Geometria ſublimiori carere minime poſſumus. Ex hactenus dictis abunde patet, quomodo applicatione Algebræ ad ea, quæ ex EUCLIDE notiſſima ſunt, methodus definiendi curvas per æquationes, & ex iis deducendi earum geneſes ac conſtructiones, proprietates, aliaque ſymptomata, innoteſcere potuerit. De ſectionibus conicis APOLLONIUS ſimiliter demonſtravit theoremata, quorum ope per æquatio-

nes definiuntur, quemadmodum in hoc capite fecimus. Quamobrem apparuit, eandem methodum ad conicas quoque sectiones applicari posse. Atque sic enata est methodus tractandi curvas per æquationes, seu Algebram ad Geometriam sublimiorem applicandi. Hæc non eo fine a nobis adducuntur, ut inventorum laudi detrahamus; sed ut discamus, vulgarium meditationem ducere ad maxime ardua; & ea neglecta inventores sibimetipsis obesse, si quando per ambages quærunt, quæ obvia sunt recta via incedentibus; utque tyrones ideam hujus methodi animo concipiant, quæ in ejus applicatione ad altiora facem præfert. Qui recta via in inveniendo progreditur, ex iis, quæ cognita atque trita sunt, colligit quæ nondum patent, parum sollicitus, quamnam utilitatem sint habitura, quæ deteguntur. Sed de his dicemus, ubi Artem inveniendi ex instituto exposituri sumus.

§. 194. Diximus superius (§. 169), nondum invento calculo universali, Algebram numerosam jam applicari potuisse ad Geometriam, ut per eam detegerentur theoremata & problematum constructiones. Immo ipsa etiam applicatio ad Geometriam sublimiorem fieri poterat non sine successu. Dictis igitur fidem facere nostrum est uno alteroque exemplo. Ponamus ex. gr. quæri relationem rectarum AT & TE, ex eodem puncto T extra circulum dato ductarum; quarum altera AT circulum tangit in A, altera TE eundem secat. Tab. II. Fig. 20.

Sit diameter $BE = 1$, $TB = x$
erit $AC = \frac{1}{2}$, $TC = \frac{1}{2} + x$
sit porro $AT = 2$, $TE = 1 + x$

Quoniam AT perpendicularis ad AC (§. 308 *Geom.*), erit

$$TC^2 = AC^2 + TA^2 \text{ (§. 417 Geom.)}$$

adeoque $(\frac{1}{2})^2 + 2.\frac{1}{2}x + x^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2^2$

$$2.\tfrac{1}{2}x + x^2 = 2^2$$

sed $2.\frac{1}{2} = 1$, per cond. probl.
ergo $1x + x^2 = 2^2$
hoc est $(1 + x)x = 2^2$
sive $TE.TB = AT^2$

Quamobrem $TE : AT = AT : TB$

Habemus itaque duo theoremata: 1°. Quadratum tangentis, in hypothesi problematis, est æquale rectangulo ex secante in ejus portionem extra circulum. 2°. In eadem hypothesi tangens est media proportionalis inter secantem & ejus portionem extra circulum.

In Algebra speciosa diametrum appellamus a, tangentem b. Cum hæc signa sint primitiva, perinde est sive diametrum a, sive 1, & num tangentem b, an vero 2 dicas, modo in calculo universalitatem conserves, ut in locum 2 quemcunque numerum alium surrogare possis, sive rationalem, sive irrationalem, sive integrum, sive fractum, qui in dato casu exprimit rationem ad diametrum tanquam unitatem.

Ponas

Tab. I. Fig. 3. Analys. Ponamus porro problema 13 (§. 255 *Analyſ.*) ſolvendum eſſe per Algebram numeroſam, ſed univerſaliter, quemadmodum ſolvitur per ſpecioſam. Solutio hæc erit:

ſit $AB + BC + CA = 6$ $\quad AC = x$

Area $\triangle = 2^2$, erit $BC + BA = 6 - x$

$AC^2 = x^2$

Cum ſit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2 AB.BC$ (§. 216 *Arithm.*); erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB.BC$ (§. 91 *Arithm.*). Eſt vero $(AB + BC)^2 = 6^2 - 2.6x + x^2$ & $2AB.BC = 4.2^2$ (§. 392 *Geom.*). Quamobrem

$$x^2 = 6^2 - 2.6x + x^2 - 4.2^2$$

$$0 = 6^2 - 2.6x - 4.2^2$$

$$2.6x = 6^2 - 4.2^2$$

$$x = \frac{6}{2} - 2.\frac{2^2}{6}$$

Patet itaque hypothenuſam trianguli rectanguli x eſſe æqualem exceſſui ſemiperimetri $\frac{6}{2}$ ſupra tertiam proportionalem ad ſemiperimetrum $\frac{6}{2}$ & latus quadrati 2 areæ trianguli æqualis. Unde liquet, problema geometrice conſtrui, ſi ad ſemiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis quæratur tertia proportionalis, & hæc ex ſemiperimetro auferatur.

Æquatio pro circulo erat $y^2 = ax - x^2$, ubi a diametrum denotat, ſive igitur diametrum dicas a, ſive 1 aut 2, modo obſerves ea, quæ ad univerſalitatem calculi conſervandam præcepimus; ex æquatione $y^2 = 1x - x^2$, vel $y^2 = 2x - x^2$ eadem erues, quæ paulo ante ex altera eruimus (§. 194).

Immo nondum invento calculo litterali poterant quoque quantitates datæ exprimi literis, quibus in Geometria lineas indigitamus, veluti in exemplo primo.

Diameter $= BE$ $\quad TB = x$ Tab. II.

radius $= AC$ $\quad TC = AC + x$ Fig. 20.

tangens $= AT$ $\quad TE = BE + x$

Unde reſultat æquatio

$$AC^2 + 2AC.x + x^2 = AC^2 + AT^2$$

$$2AC.x + x^2 = AT^2$$

$$(BE + x)\,x = AT^2$$

h. e. $TE.TB = AT^2$

vel in problemate altero

Periph. $\triangle = AB + BC + CA$ $\quad AC = x$ Tab. I.

Area $\triangle = DE^2$ $\quad AC^2 = x^2$ Fig. 3. Analyſ.

$BC + CA = AB + BC + CA - x$

Unde reperitur ut ante æquatio:

$$x^2 = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x + x^2 - 4DE^2$$

$$0 = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x - 4DE^2$$

$$2(AB + BC + CA)x = (AB + BC + CA)^2 - 4DE^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA) - 2DE^2 : (AB + BC + CA)$$

 Simi-

Tab. II. Fig. 17. Similiter si diameter circuli dicatur AB, semiordinata PM, abscissa AP; æquatio ad circulum est $PM^2 = AB.AP - AP^2$: unde eadem deducuntur, quæ ex æquatione $y^2 = ax - x^2$ deduximus.

Talia monemus, ut appareat Veteribus plura in potestate fuisse, quam existimavere, propterea quod ad studium mathematicum non eam attentionem attulerunt, quam in superioribus commendavimus, ut methodos intimius perspiciamus, ea discernentes, quæ sunt legum methodi, ab iis, quæ characteristicæ tribuenda, & ut characteristicæ ubivis commodum faciamus usum: neque enim iidem characteres æque satisfaciunt in omni casu, sed alii aliis non sine utilitate haud raro substituuntur. Neque vero est, quod excipias, nos in calculo universali numeroso, & substitutis linearum appellationibus communibus, adhibere artificia ex characteristica, qua in Algebra speciosa utimur, petita; veluti dum potentias linearum designamus per exponentes, numeris vel literis majoribus quibus lineæ denotantur adscriptos instar apicum. Etenim hanc denotationem jam indicavit KEPLERUS in *Harmonica*, calculo literali adhuc ignorato, & per ea eadem patere poterat, quæ de natura numerorum cossicorum, quos vocat, tradidit STIFELIUS in *Arithmetica integra*, multo ante, quam VIETA de Arithmetica literali cogitaret, & HARIOTTUS atque CARTESIUS eandem ulterius perficerent. Et quamvis recentior characteristica commodior sit; ipsa tamen methodus per eam non variatur, quæ etiam absque omni characteristica subsistit: sit ita, quod, deficiente characteristica commoda, subinde tantæ suboriantur molestiæ, quas devorare non est cujusvis, & ea requiratur attentio, ut ab errore immunem te præstes, quam non quivis afferre valet. Hæc ignorare non potest, qui ad characteristicam, qua hodie in Arithmetica utimur, eam attentionem attulerit, quam in superioribus commendavimus; & quæ acumen istud, quo ea quæ sunt legum methodi, ab iis quæ characteristicæ debentur separantur, confert.

§. 195. Circulus per æquationem algebraicam definiri potest, quia punctorum omnium M ad diametrum AB constans quædam relatio est, quæ exprimitur per relationem semiordinatæ ad abscissam; demittendo scilicet ex puncto quolibet M perpendiculum PM in diametrum AB, ut abscindatur AP. Unde facile intelligitur idem succedere debere in aliis curvis ubi similis relatio obtinet. Quamobrem cum constet, APOLLONIUM de parabola, hyperbola, & ellipsi, seu sectionibus conicis, tale quid demonstrasse; statim prævidere licet methodum, qua in circulo usi sumus, in iisdem quoque adhiberi posse. Enimvero possunt puncta curvæ Tab. II. Fig. 18.

væ referri ad quamcunque aliam rectam positione datam: id quod cum usui sit in sequentibus, exemplo circuli hoc ipsum declarare lubet. Ducatur recta AL, quæ circulum in C tangat; erit ea ad radium GC perpendicularis (§. 308 *Geom.*). Ducatur quoque DA, quæ circulum tangit in D, adeoque ad radium DG perpendicularis (§. *cit.*); cum etiam CG sit perpendicularis ad GD (§. 143, 78 *Geom.*), erit AL diametro DE parallela (§. 258 *Geom.*), & AD ad eandem perpendicularis (§. 230 *Geom.*), adeoque semiordinata (§. 370 *Analyss.*). Ducatur semiordinata alia quæcunque PM, continuanda donec diametro DE in Q occurrat; erit MQ ad DE perpendicularis. Sit AC=DG=a, AP=x, PM =y; erit QM=$a-y$; adeoque per naturam circuli, cum sit

Tab. II. Fig. 21.

$$QM^2 = DQ. QE$$

erit, $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$

Quæ æquatio circulum definit respectu tangentis AL.

Fiat jam $x = 0$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 0$$
$$a - y = 0$$
$$a = y$$

hoc est, in origine abscissæ A semiordinata AD est radio circuli æqualis.

Sit $x = a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2a^2 - a^2$$
$$= a^2$$
$$y^2 - 2ay = 0$$
$$y - 2a = 0$$
$$y = 2a$$

hoc est, semiordinata CN diametro circuli æqualis, seu perpendicularis CN ad AC curvæ in N occurrit.

Sit $x = 2a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 4a^2 - 4a^2$$
$$= 0$$
$$a - y = 0$$
$$a = y$$

hoc est semiordinata LE radio circuli æqualis.

Quodsi quæratur recta GM, cum sit per theorema Pythagoricum

$$GM^2 = MQ^2 + QG^2$$

erit $GM^2 = 2a^2 - 2ay + y^2 - 2ax - x^2$

est vero ex natura curvæ

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$$

Ergo $GM^2 = a^2$

$$GM = a$$

Quare si ponamus, nos ignorare, ad quam curvam sit æquatio; patet hinc eam esse ad circulum.

Nimirum quando ex æquatione data eruuntur, quæ de curva cognosci possunt, tum semper supponitur, non constare, ad quamnam curvam sit æquatio. Quodsi semicirculus DNE ad rectam AL referretur, semiordinata PO foret y, adeoque QO=$y-a$. Quamobrem cum eadem prodiret, quæ ante æquatio; alterum ejus membrum $a^2 - 2ay + y^2$ duas habet radices $a-y$ & $y-a$: id quod indicio est, semiordinatam recta AC & minorem, & majorem esse posse; consequenter ex ipsa æquatione intelligitur

gitur, curvam a ſemiordinata ſecari in duobus punctis. Quoniam itaque in C eandem nonniſi in uno puncto N ſecat; id indicio eſt, quod in C eandem tangat. Similiter quia in A & L ſemiordinata nonniſi unum valorem habet; hinc conficitur, quod ſemiordinatæ AD & LE curvam ſimiliter tangere debeant. Unde liquet curvam eſſe in ſe redeuntem, & ejus puncta referri ad lineam, quæ tota extra curvam cadit, ab ea tamen non diſtat. Diſtantia enim a tota curva æſtimatur ex perpendiculari minima, quæ hic nulla eſt.

Suadendum omnino eſt, ut tyrones notent, quomodo curvæ agnoſcantur, & a ſe invicem diſtinguantur; nimirum relatione punctorum ad rectam quandam poſitione datam, & circulum referant ad varias rectæ poſitiones, ut totius methodi vim ac poteſtatem rectius ac intimius perſpiciant. Hoc enim pacto non modo nihil difficultatis habebit, quod in capite præſenti occurrit; verum etiam doctrina de Locis geometricis, quæ omnem rectæ illius poſitionem poſſibilem ſupponit, non perturbabit tyronem. Immo in genere notandum eſt, ſi ad maxime obvia & notiſſima applicentur methodi novæ, in quas incidimus; haud raro talia offerri, circa quæ hærent etiam exercitatiores, ubi in applicatione methodi ad nondum cognita occurrunt. Exemplum ſuppeditat æquatio, quam modo dedimus pro circulo $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$. Etenim ſi ſumis, eam explicare relationem quadrantis DMC ad rectam AC, & ponis AP = AC, ſeu $x = a$, per ea, quæ vidimus in æquatione præcedente (§. 193), prodire debere videtur $y = 0$. Unde miraris, ubi prodit $y = 2a$. Verum enimvero ubi conſideras, æquationem $a^2 - 2ay + y^2$ habere duas radices, alteram nimirum $a - y$, alteram $y - a$, & priori reſpondere QM, poſteriori autem QO; hinc diſces, per æquationem $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$ tam ſemicirculi ſuperioris DNE, quam inferioris DCE ad rectam AL relationem exprimi; conſequenter in puncto C, ubi valor unus ipſius PM ſive $y = 0$, etiam prodire debere valorem alterum ipſius $y = 2a$, recta nimirum PO in CN degenerante. Quodſi tale quid occurreret in tractatione æquationis, cui, quænam curva reſpondeat, adhuc ignoratur; unde hoc fiat, non adeo facile animadverteres, & multum omnino olei ac operæ perderes, antequam ex perturbatione eluctari valeres. Similiter ubi ponis $x = 0$ & $x = 2a$, prodit $a^2 - 2ay + y^2 = 0$, adeoque $y - a = 0$ & $a - y = 0$, quæ utraque æquatio dat eundem valorem nempe $y = a$. Unde vides, in contactu D & E, duas radices æquales habere æquationem; quemadmodum deinceps ſupponitur in methodo tangentium, & ſine quo principio CARTESIUS ad methodum ſuam tangentium non perveniſſet.

Non

Non addimus plura, cum hactenus dicta abunde sufficiant ad persuadendum utilitatem meditationis eorum, quæ nobis notissima sunt, ut eorundem ope detegantur alia, quorum alias cogitatio animum nunquam subiisset.

§. 196. Quodsi hanc methodum, quam adeo fœcundam experiris in circulo, etiam ad curvas alias, quas tractarunt Veteres, applicare volueris; non omnes promiscue per æquationes definiri posse animadvertes, ubi eodem modo puncta eorum refers ad rectam quandam positione datam. Non succedet in Spiralibus ARCHIMEDIS, nec in Quadratice DINOSTRATIS, quemadmodum sub finem capitis videbimus. Quoniam itaque ex iis, quæ de circulo diximus, & per sectiones conicas confirmantur, didiceris, quod æquatio curvam definiens supponat constantem relationem puncti cujuslibet ad eandem rectam positione datam; hinc utique patet, non dari posse æquationem ad curvam, cujus puncta ad rectam positione datam constantem relationem minime habent. Atque adeo non miraberis, nec hærebit aqua, ubi curva offertur, quæ per istiusmodi æquationem explicari nequit. Et patet ratio, cur CARTESIUS curvas distinxerit in algebraicas & non algebraicas, quarum illas vocat geometricas, has vero mechanicas; propterea quod existimavit, illas solas in Geometriam recipi posse, has vero ex eadem excludi debere; quod ignoravit æquationes differentiales, de quibus dicemus in Analysi infinitorum, & quarum ope non minus algebraice tractantur curvæ, quæ a CARTESIO mechanicæ appellantur, quam quas geometricas appellat. Et sic patet ratio divisionis Curvarum in algebraicas & transcendentes, quam tradimus (§. 377, 380 *Analys.*)

§. 197. Notandum vero est artificium, quo æquatio curvæ particularis reducitur ad generalem, quæ infinitas curvarum species sub se comprehendit: id quod fit exponentium indeterminatorum surrogatione in locum determinatorum; quo artificio jam usi sumus in anterioribus, veluti in theoremate generali de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analys.*). Probe quoque notandum est, quod in istiusmodi æquationibus observanda sit lex homogeneorum, quæ præcipit, ut termini singuli æquationum habeant dimensiones numero æquales, hoc est, ut unus valor prodeat, ductis tot rectis in se invicem, quot in se invicem sunt ducendæ, ut prodeat quilibet alter. Etsi enim in Geometria non detur magnitudo, quæ ultra solidum, quod trium dimensionum est & tribus rectis in se invicem ductis resultat, assurgit; in Algebra tamen fictione non inutili admittuntur hypersolida, quæ ductu quotlibet rectarum in se invicem in infinitum resultant. Nititur hæc fictio princi-

pio, quod inter duas lineas infinitæ cadere possint lineæ mediæ continue proportionales, quemadmodum ex genesi potentiarum in infinitum progredientium liquet; veluti si ponas numeros in progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. in infinitum, hoc est 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 &c. in infinitum, ubi inter 1 & 2^2 una, inter 1 & 2^3 duæ, inter 1 & 2^4 tres, inter 1 & 2^5 quatuor cadunt numeri medii continue proportionales, & sic porro in infinitum. Etsi enim hic numeri omnes, quorum ductu in se invicem resultant termini ulteriores, sint inter se æquales; constat tamen, vel ex Geometria elementari, (in qua v. gr. rectangulum reducitur ad quadratum eidem æquale, & parallelepipedum ad cubum sibi æqualem,) ea, quæ ductu linearum inæqualium in se oriuntur, reduci posse ad talia, quæ oriuntur ductu totidem æqualium in se invicem. Sufficiant hæc in gratiam tyronum dicta, ut ipsis aliqua lux affundatur in considerandis hypersolidis, quæ Algebra admittit. Inprimis autem attentionem meretur æquatio, quæ eminenter continet omnes æquationes ad algebraicas curvas. Etenim in eo latent tria artificia, nimirum 1°. quod æquationis alterum membrum sit nihilum, de quo artificio jam supra diximus (§. 189); 2°. quod terminus unus repræsentet in casu particulari plures, ut adeo coëfficientes explicandi sint non uno, sed diversis modis, 3°. quod in æquatione nulla habeatur ratio signorum, quæ in particularibus variant æquationibus, sed termini omnes afficiantur signo +, ne opus sit plures formare æquationes generales, ubi omnes particulares sub una comprehendi possunt, quod sane artificium maximi faciendum. Enimvero ut applicatio formulæ generalis manifesta evadat, lubet eam applicare ad circulum. Æquatio generalis est:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o$$

Æquatio ad circulum:

$$y^2 + ax - x^2 = o$$

Vides hic abesse xy, nec ullum adest membrum constans ex mere cognitis, adeoque $cy^r\ x^s + df = o$, consequenter formula generalis contracta hæc relinquitur:

$$ay^m + bx^n = o$$

Est igitur

$$\frac{ay^m = y^2}{}$$

adeoque $a = 1$
$m = 2$

Porro

$bx^n = + ax$ | $bx^n = - x^2$

adeoque $b = a, n = 1$ | $b = -1, n = 2$

Docet adeo hoc ipsum exemplum, quomodo terminus unus in generali comparetur cum pluribus in particulari, ut coëfficientes indeterminati in generali determinentur ex particulari. Patet etiam, quomodo signum + in formula generali non obstet, quo minus coëfficiens negati-

tus determinetur ex particulari, dum hic reperitur $b = -1$. Habet nimirum b in casu præsenti valorem duplicem, alterum positivum $+a$, alterum negativum -1.

§. 198. Qui quæ de circulo diximus probe perpendit, ei non hærebit aqua circa ea, quæ de sectionibus conicis aliisque curvis in præsenti capite, & de locis geometricis in sequente demonstrantur. Incepimus a parabola, quæ est sectionum conicarum simplicissima. Æquatio ejus $y^2 = ax$. Quodsi fiat

$$x = 0$$

erit $y^2 = 0$

$$y = 0$$

Tab. II. Fig. 21. Atque adeo patet 1°. in origine abscissæ A curvam secare rectam datam, ad quam refertur, AX.

Sit alia abscissa AP $= v$, eidem respondens semiordinata PM $= z$, erit $z^2 = av$.

Ponamus $v > x$

erit $av > ax$
adeoque $z^2 > y^2$

$$z > y$$

2°. Crescentibus adeo abscissis, semiordinatæ quoque crescunt; consequenter curva in infinitum continuari potest, & ab axe AX continuo magis magisque recedit.

Si fiat $x = a$

erit $y^2 = a^2$

$$y = a$$

3°. Quando igitur abscissa parametro æqualis, etiam semiordinata eidem æqualis est, consequenter si abscissa parametro æqualis, semiordinata & abscissa æquales sunt.

Sit $y = \frac{1}{2}a$

erit $ax = \frac{1}{4}a^2$

$$x = \frac{1}{4}a$$

4°. Si ergo semiordinata semiparametro æqualis, quarta diametri parte a vertice A seu origine sua distat.

Quodsi æquationem ad parabolam cum æquatione pro omnibus curvis algebraicis conferre volueris; cum hæc sit:

$$ay^m + bx^n + cy^r\ x^s + df = 0$$

pro parabola vero

$$y^2 - ax = 0$$

& in hac deficiat xy & terminus constans ex mere cognitis respondens ipsi df, æquatio generalis contrahitur in

$$ay^m + bx^n = 0$$

estque $ay^m = y^2 \quad bx^n = -ax$

adeoq; $a = 1, m = 2 \quad b = -a, n = 1$

Hæc addere libuit, ut appareat, eodem modo tractari posse æquationem ad parabolam, qua tractavimus æquationem ad circulum. Cetera enim patent per resolutionem problematum in hoc capite propositorum.

§. 199. De methodo tangentium, qua utimur problematis 181, 189, 208, (§. 410, 440, 491 *Analyſ.*), quædam adhuc annotanda ſunt. Tangentes curvarum facillime determinantur per calculum differentialem, quemadmodum in Analyſi infinitorum docemus. Quoniam vero ſectiones conicas referre minime licet ad diametrum, niſi præſuppoſita tangente, cui ſemiordinatæ ſunt parallelæ & quæ ex puncto contactus ducitur; ideo neceſſarium fuit tangentem determinari per Algebram communem. Adhibuimus itaque methodum CARTESII, quæ nititur hoc principio, quod in contactu duæ radices evadant æquales: id quod ſuperius in
Tab. II. Fig. 23. circulo reperimus (§. 195). Ponamus enim rectam TR ſecare curvam in M & N; evidens eſt, quod, ſi abſciſſæ AP & AQ dicantur x, eiſdem reſpondere duas ſemiordinatas PM & QN, per quas y in æquatione explicari poteſt. Ducatur alia tr, quæ eandem curvam ſecat in punctis m & n: habebimus denuo duas ſemiordinatas pm & qn, per quas explicatur y in æquatione data. Patet autem abſciſſam unam PM continuo creſcere, & alteram QN continuo decreſcere, donec punctis M & N in contactu coincidentibus, in æquatione data una alteri fiat æqualis. Ad hæc qui animum advertit, nullo negotio deprehendet, quomodo ad methodum iſtam pervenire licuerit. Patebit autem ſuo loco, ſubtangentem per hanc methodum prodire eandem in ſectionibus conicis, quæ invenitur per calculum differentialem. Etſi autem hæc methodus videatur univerſalis, ad tantas tamen in curvis altioribus calculi perplexitates deducit, quæ vix videntur ſuperabiles. Unde in ea perficienda plurimum deſudarunt Geometræ, donec tandem ope calculi differentialis obtentum fuerit quod quærebatur.

§. 200. In Ellipſi $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420 *Analyſ.*). Quodſi hic ponas

$$x = 0$$

erit $ay^2 = 0$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Quamobrem patet, 1°. in origine abſciſſarum curvam ſecare rectam poſitione datam, ad quam refertur.

Si fiat $x = a$

erit $ay^2 = a^2b - a^2b$
$= 0$

adeoque denuo $y = 0$

Unde liquet, 2°. curvam quoque ſecare rectam, ad quam refertur, ſi abſciſſa fit datæ a æqualis, adeoque concavitatem obvertere eidem rectæ: ex quo porro ſequitur, cum ex altera parte eodem modo ſeſe habeant, quæ modo reperimus, curvam eſſe in ſe redeuntem.

Fiat

Fiat $b = a$

erit $ay^2 = a^2x - ax^2$

$$y^2 = ax - x^2$$

3°. Æquatio adeo ad ellipſin degenerat in æquationem ad circulum, ut circulus pro ſpecie quadam ellipſeos haberi poſſit, nacturus nomen ellipſeos æquilateræ, niſi jam antea nomine circuli inſignita fuiſſet hæc curva.

Quodſi a ponatur infinita, erit in æquatione ad ellipſin

$$\frac{bx^2}{a} = 0$$

adeoque $y^2 = bx$

Cum adeo æquatio ad ellipſin degeneret in æquationem ad parabolam, ideo liquet 4°. In locum ellipſeos, cujus axis infinitus eſt, ſurrogari poſſe parabolam eandem cum ellipſi parametrum habentem.

Quodſi quis hæreat in infinitate axis elliptici, & in eo, quod hinc colligatur $\frac{bx^2}{a} = 0$; is evolvat, quæ in Ontologia de infinito mathematico demonſtravimus.

§. 201. Eodem modo in hyperbola quoque generalia quædam ex æquatione ejus colliguntur. Æquatio ad hyperbolam eſt: $ay^2 = abx + bx^2$, ſeu $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$.

Sit $x = 0$

erit $y^2 = 0$

$$y = 0$$

Patet ergo 1°. in origine abſciſſarum curvam ſecare rectam poſitione datam, ad quam ea refertur.

Sit $x = a$

erit $y^2 = ab + a^2b : a$
$= ab + ab = 2ab$

$$y = \sqrt{2ab}$$

Unde liquet 2°. ſi abſciſſa fuerit axi transverſo æqualis, ſemiordinatam fore mediam proportionalem inter axem transverſum & duplam parametrum.

Sit $x = b$

erit $y^2 = b^2 + \frac{b^3}{a}$

$$y = \sqrt{(b^2 + \frac{b^3}{a})}$$

Patet adeo 3°. ſi abſciſſa fuerit parametro æqualis, ſemiordinatam eſſe mediam proportionalem inter parametrum & compoſitam ex parametro & tertia proportionali ad axem transverſum & parametrum.

Sit alia abſciſſa v, alia ſemiordinata eidem reſpondens z; erit per naturam curvæ

$$z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$$

Quare si $v > x$

erit $bv > bx$

$$\frac{bv^2}{a} > \frac{bx^2}{a}$$

$$bv + \frac{bv^2}{a} > bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$y^2 > z^2$$

$$y > z$$

Patet itaque 4°. crescente abscissa crescere semiordinatam; adeoque curvam continuo magis magisque ab axe recedere; consequenter in infinitum continuari.

Quodsi æquationem pro hyperbola cum generali pro omnibus algebraicis conferre volueris; cum sit

$ay^m + bx^n + cx^r y^s + df = 0$

$ay^2 - abx - bx^2 = 0$

erit $cx^r y^s + df = 0$

$ay^m = ay^2$

$a = a, m = 2$

$bx^n = -abx \quad bx^n = -bx^2$

$b = -ab, n = 1 \quad b = -b, n = 2$

Reliqua in ipsa Analysi reperiuntur.

§. 202. Enimvero applicemus eandem methodum ad æquationem pro hyperbola intra asymptotos. Quoniam $xy = ab$,

erit $x = \frac{ab}{y}$

Fiat, $x = 0$

erit $\frac{ab}{y} = 0$

adeoque, $y = \text{infinit.}$

Patet itaque 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam.

Similiter cum sit $y = \frac{ab}{x}$

Si ponamus $x = \text{infinit.}$

erit $\frac{ab}{x} = 0$

adeoque $y = 0$

Unde liquet 2°. rectam, in qua sumuntur abscissæ cum curva non concurrere nisi intervallo infinito, seu ab eadem non distare nisi intervallo infinite parvo; quatenus ab quantitas ordinaria per infinitam divisa dat particulam infinite parvam, quæ respective nihilum est.

Sit jam alia abscissa v, semiordinata alia z; erit per naturam curvæ

$$z = \frac{ab}{v}$$

Ponamus $v > x$

erit $\frac{ab}{v} < \frac{ab}{x}$

adeoque $z < x$

Videmus ergo 3°. crescente abscissa decrescere semiordinatam; consequenter lineam curvam continuo magis magisque ad eam appropinquare rectam, in qua sumuntur semiordinatæ.

Quoniam itaque hæc cum curva non concurrit nisi infinito intervallo, aut potius ab eadem non distat nisi quantitate infinite parva, quando illa

illa in infinitum continuatur (*vi num.* 2); & in origine abſciſſarum ſemiordinata infinita (*vi num.* 1); curva continetur inter duas rectas, quæ in infinitum excurrunt, & ad quas curva continuo propius propiusque accedit, nunquam tamen eaſdem ſecat. Continetur adeo inter aſymptotos. Ex hoc exemplo apparet, quomodo ex æquatione colligatur, quod curva, quæ per eam definitur, habeat aſymptotos.

§. 203. Sed demus etiam exemplum in curva quadam ſuperioris generis, cujus æquatio perplexa videtur. Sit itaque $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, quam invenimus pro Conchoide prima ſive ſuperiore (§. 538 *Anal.*); erit

$$y^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2 - x^4 - 2bx^3 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

Fiat $x = 0$

erit $x^2 - 2bx = 0$

$$\frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} = \frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0} = \text{infin.}$$

adeoq; $a^2 - b^2 = 0$, reſpectu $\frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0}$

Quare $y^2 = \text{infin.}$

$y = \text{infin.}$

Patet itaque 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe infinitam, conſequenter curvæ aſymptotum.

Fiat $x = a$

$$\text{erit } y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2} + \frac{2a^2b}{a} + a^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$= b^2 + 2ab + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= 0$$

$y = 0$

Quando igitur 2°. abſciſſa fit ipſi a æqualis, ſemiordinata nulla eſt, adeoque curva rectam, in qua ſumuntur abſciſſæ, ſecat.

Quoniam y ex infinita nulla evadit, dum x ex nihilo degenerat in a; neceſſe eſt 3°. creſcente abſciſſa decreſcere ſemiordinatam.

$$\text{Quia } y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + 2\frac{a^2b}{x} + a^2 - x^{-2}2bx - b$$

$$= \left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x + b)^2$$

$$y = \sqrt{\left(\left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x+b)^2\right)}$$

Eſt igitur y latus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa componitur ex $\frac{ab}{x}$ & a, crus unum vero ex b & x. Unde liquet, 4°. Si ſemiordinata infinita dicatur regula, recta b diſtantia poli a regula, recta vero a diſtantia verticis a regula, quemadmodum termini in Conchoide recepti ſunt (§. 535 *Anal.*); ſemiordinatam eſſe crus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa componitur ex tertia proportionali ad abſciſſam (ejus origine in regula conſtituta), diſtantiam regulæ a vertice & ejuſdem

a po-

a polo distantiam, atque distantia ejusdem regulæ a vertice, crus vero alterum ex abscissa & distantia regulæ a polo.

Tab II. Fig. 24. Hinc 5°. ex data abscissa BP, distantia regulæ a polo BC, & a vertice BA, reperitur semiordinata PM, si ex P intervallo BA intersecetur regula in O, & recta PO producatur, donec perpendiculari CH in polo erecta in H occurrat; tandemque intervallo CH intersecetur PM ad AB perpendicularis in M.

Quoniam enim $PB = x$, $PO = a$, $BC = b$; erit $OH = \frac{ab}{x}$; consequenter $PH = \frac{ab}{x} + a$, trianguli rectanguli PCH hypothenusa. Quamobrem cum porro sit $CP = b + x$, erit $CH = \sqrt{((\frac{ab}{x} + a)^2 - (b + x)^2)} = y$, consequenter quia $PM = CH$; erit PM semiordinata quæsita. Quodsi fiat $CL = PB$ & $CN = BA$, ac LN ad BC perpendicularis; recta CN producta statim resecabit semiordinatam PM.

Manifestum itaque est, quomodo ex æquatione eruatur modus determinandi geometrice punctum curvæ respondens cuilibet abscissæ, quamvis æquatio primo intuitu videatur admodum perplexa. Ceterum in applicatione methodi generalis adhibentur varia artificia, ex anterioribus equidem nota, quæ tamen tyroni non statim succurrunt. Quamobrem hinc elucescit, quod jam sæpe inculcavimus, artem exercendam esse per exempla, non per regulas particulares: etsi particulares annotandæ sint, ubi occurrunt; ut tanto facilius succurrant, quando denuo iisdem opus habemus. Non addimus de conchoide alia, quæ ex ejus æquatione deduci poterant, ne simus justo prolixiores.

§. 204. Etsi ex dictis appareat, ductum curvæ hac methodo facillime indagari posse, ut de reliquis taceamus; non tamen existimandum est, idem in qualibet promiscue curva eadem facilitate succedere. Etenim si in æquationibus altioribus occurrunt termini, quos duæ indeterminatæ ingrediuntur, nec earum separatio in promptu est, quemadmodum vidimus in conchoide (§. 203); hærebit aqua. Sit ex. gr. $y^3 - axy = x^3$. Quodsi ponamus $x = a$, prodibit $y^3 - a^2y = a^3$, æquatio cubica affecta, ex qua radicis extractio difficilis & cujus constructio geometrica per inferiora demum patet. Similiter, quamvis per calculum algebraicum, quæ quæruntur, haud raro mira facilitate eruantur, quemadmodum supra vidimus in circulo (§. 193), & plurima capitis præsentis problemata loquuntur, quæ de sectionibus conicis proposuimus; subinde tamen calculus prolixus & intricatus evadit, prouti videre licet in probl. 193, 195, 209, (§. 449, 454, 492 *Analys.*)

§. 205.

§. 205. Nos sectiones conicas consideravimus in plano & æquationes assumsimus, quæ eas definiunt. Hinc vero nondum constat, curvas istas esse sectiones coni, nisi supponas theoriam sectionum conicarum a Veteribus traditam, tanquam cognitam. Quamobrem consultum esse duximus analytice demonstrari, sectione coni prodire has ipsas curvas, quas in plano consideravimus, & quarum descriptiones, proprietates aliaque symptomata ex æquationibus assumtis deduximus (§. 511 & seqq. *Anal.*). Poteramus æquationes, quas assumsimus, eruere ex proprietatibus, quas ex sectione coni derivavimus: sed cur hoc minime fecerimus, jam monuimus (§. 514 *Anal.*). Ex. gr. pro parabola ex sectione coni deduximus

$$y^2 : q^2 = x : z$$

ubi y & q denotant semiordinatas, x & z autem ipsis respondentes abscissas.

Quoniam etiam est

$$y^2 : x = q^2 : z$$

erit $y^2 : ax = q^2 : az$;

Quare si ponamus, constantem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$; evidens est fore etiam $q^2 = az$, atque adeo in omni puncto curvæ esse quadratum semiordinatæ æquale rectangulo ex abscissa in eandem rectam constantem. Posse autem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$ patet, quia a tertia proportionalis est ad abscissam & semiordinatam. Idem etiam hoc modo patere poterat. Si alternando esse debet $y^2 : x = q^2 : z$ (§. 173 *Arithm.*) cum ratio non sit nisi homogeneorum (§. 126 *Arithm.*) x & z denotare debent rectangula, quorum latus unum unius est x, latus unum alterius z, latus vero alterum unitas seu recta, quæ pro unitate sumitur (§. 375 *Geom.*), utique eadem utrobique (§. 178 *Arithm.*). Quodsi ergo hæc recta efficere debet rectangulum $1\ x$, æquale quadrato y^2, unitas ista degenerare debet in tertiam proportionalem ad x & y, quam fore eandem cum tertia proportionali ad q & z per modo demonstrata patet. Unde manifestum est, æquationem ad sectionem coni præsentem esse $y^2 = ax$, aut, si $a = 1$, $y^2 = x$. Notandum adeo hic est, si in æquationibus non appareat lex homogeneorum observata, termini pauciorum dimensionum coëfficientem esse unitatem, seu rectam quandam determinatam, quæ pro unitate sumitur. Cum autem quælibet recta pro unitate assumi possit, unitatem esse eandem non sumendum, sed demonstrandum est. Ita sumere licet $y^2 = x$, ubi coëfficiens ipsius x est 1; sumere quoque licet $q^2 = z$, ubi coëfficiens ipsius z est 1. Enimvero non licet sumere coëfficientes ipsarum x & z esse æquales; sed hoc demonstrandum, quemadmodum ex modo dictis claret. Nihil hic supponitur, quod non sit ex notione numeri rationalis integri manifestum, quem in communi Arith-

metica practica consideramus; modo ad communia perpendenda omnem attentionem afferamus: qua neglecta, haud raro hærent tyrones, ubi sumuntur quæ per ea patent, & ad ardua magis applicantur; nisi fide Mathematicorum tanquam vera admittere velint, quorum rationem minime capiunt.

§. 206. Id quoque notandum est, in æquationibus, per quas definiuntur curvæ, originem abscissarum non semper assumendam esse in aliquo curvæ puncto, etiam si recta, ad quam curva refertur, eandem secat vel tangit; sed eandem esse posse quodvis punctum aliud in eadem recta assumtum. Ita ex. gr. in circulo, si peripheriæ puncta referuntur
Tab. I. Fig. 25. ad diametrum AB, origo abscissarum statui potest in centro C, ut sit PC $= x$, PM $= y$ & radius AC $=$ MC $= a$. Quoniam enim $MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebimus $a^2 = y^2 + x^2$, adeoque $y^2 = a^2 - x^2$; quæ æquatio non minus circulum definit, quam altera, quam supra dedimus, & unde circuli genesin atque proprietates, cum aliis symptomatis, deduximus (§. 193). Atque ex hac æquatione eadem deducere licet, quæ ibidem ex altera deduximus, si tanquam data supponatur, ut adhuc ignoretur, ad quamnam curvam ea sit. Etenim si hic ponas

$$x^2 = 0$$

$$\text{erit} \quad y^2 = a^2$$

$$y = a.$$

Unde liquet 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse constanti a æqualem.

Si vero ponas $x = a$

$$\text{erit} \quad y^2 = a^2 - a^2$$

$$= 0$$

$$y = 0$$

Unde patet 2°. si abscissa fiat semiordinatæ, quæ in origine abscissarum est (*vi num.* 1), æqualis, curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

Quoniam $a^2 = y^2 + x^2$; ideo liquet, 3°. Hypothenusam trianguli rectanguli, cujus crura sunt abscissa & semiordinata, ad quodvis punctum curvæ esse eandem; consequenter cum hæc hypothenusa constanter ex origine abscissarum ducatur, rectas omnes ex origine abscissarum ductas ad curvam esse inter se æquales. Æquatio adeo nos deducit ad genesin circuli non minus, quam ad definitionem ejus nominalem; &, ubi definitio circuli ex elementis nota supponitur, hinc discimus, æquationem esse ad circulum. Immo potest origo abscissarum etiam extra centrum statui, veluti in L, ubi AL Tab. II. Fig. 15.
constans est, & abscissa LP. Sit enim AL$=b$, AB$=a$, LP$=x$, PM $=y$, erit AP$=b+x$, PB$=a-b-x$, consequenter ob

$$PM^2 = AP.\ PB$$

$$y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$$

Quod si

Quodſi hic ponas

$$x = 0$$

erit $y^2 = ab - b^2$

$$y = \sqrt{(ab - b^2)}$$

Unde liquet, 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe mediam proportionalem inter rectam quandam conſtantem b & differentiam ejus a conſtante alia a.

Quodſi fiat

$$x = a$$

erit $y^2 = ab - b^2 + a^2 - 2ab - a^2$
$= -ab - b^2$.

Patet itaque 2°. abſciſſam nunquam fieri poſſe ipſi a æqualem, ſed ſemper eadem minorem eſſe debere.

Sit $x = a - b$

erit $y^2 = ab - b^2 - 2ab + 2b^2 + a^2$
$- ab - a^2 + 2ab - b^2$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Patet adeo, 3°. ſi abſciſſa fiat differentiæ quantitatum conſtantium æqualis, curvam ſecare rectam poſitione datam.

Sit $x = \frac{1}{2} a - b$

erit $y^2 = ab - b^2 - ab + 2b^2 + \frac{1}{2}a^2 - ab$
$- \frac{1}{4}a^2 + ab - b^2$

$$y^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

Videmus itaque 4°. ſi abſciſſa fiat $\frac{1}{2}a - b$, ſemiordinatam eſſe $= \frac{1}{2}a$.

Quodſi ponamus

$$b = 0$$

erit $y^2 = ax - x^2$

Æquatio igitur degenerat in æquationem ordinariam pro circulo (§. 193).

Licet etiam originem abſciſſarum ſtatuere extra circulum, veluti in N, ut ſit, NP $= x$, adeoque ſi NA$=b$, AP $= x - b$. Et ſimiliter abſciſſas computare licet in aliqua a centro C diſtantia, ut earum origo vel ſit inter A & C, vel inter C & B. Hæc ſi notent tyrones, in doctrina de locis geometricis & conſtructione æquationum altiorum nihil prorſus ſentient difficultatis. Patebit etiam, quomodo ad formulas generales plana ſit via. Quæ vero hic annotamus de relatione curvarum ad rectam, quæ curvam in puncto quodam ſecat, eadem quoque locum habent, ubi eandem referre libuerit ad rectam extra curvam quomodocunque ſitam. Nec oleum atque operam perdunt tyrones, ſi in omni caſu poſſibili æquationem ad circulum inveſtigent, ut methodum definiendi curvas per æquationem intimius inſpiciant beneficio exempli omnium facillimi & notiſſimi, idem imitaturi in curvis aliis, quod in circulo fecere.

§. 207. Enimvero abunde ea documus, quæ in hac methodo lucem accendunt tyronibus, ne in tene-

bris palpitent ad magis ardua progressi, quemadmodum vulgo accidere solet. Sed dicenda quoque nonnulla sunt de lineis non algebraicis, quarum nonnullæ sub finem capitis definiuntur. Definimus Quadraticem DINOSTRATIS, per $ay = bx$, ubi x denotat arcum AN, a Quadrantem AB, b radium AC, & y portionem radii AP, quæ ad radium eandem rationem habet, quam habet arcus AN ad Quadrantem. Quamobrem etsi æquatio alias definiat triangulum rectangulum æquicrurum; consequenter in ea spectetur relatio rectæ, quæ hypothenusa est ad crus unum, in quo sumuntur abscissæ; præsenti tamen in casu æquatio, quæ eadem videtur, prorsus diversa est. Etenim in casu priori, quando est ad triangulum rectangulum æquicrurum, a & x denotant lineas rectas; in posteriori autem, quando ad Quadratricem est, a designat quadrantem, x arcum circuli quadrante minorem. Æquatio igitur algebraica non est; nisi cum in ea singulæ literæ denotent totidem rectas. Hoc tamen non obstante æquationes istiusmodi, quas curvæ lineæ ingrediuntur, tractari possunt eodem modo, quo ante tractavimus algebraicas: quod succedere ipsa præsens æquatio docere potest. Etenim

Tab VI. Fig. 67. Algeb.

Si fiat $x = 0$
erit $ay = 0$
$y = 0$

Atque adeo patet, quadratricem concurrere cum radio in origine abscissæ.

S $x = a$
erit $ay = ab$
$y = b$

Unde liquet, quamprimum x fit quadranti æqualis, rectam AP, quæ designatur per y, degenerare in radium.

Si $x = \frac{1}{2}a$
$ay = \frac{1}{2}ab$
$y = \frac{1}{2}b$

Evidens igitur est, dimidio quadranti respondere radium dimidium.

Eadem adeo eliciuntur, quæ per genesin Quadratricis manifesta sunt.

Quod vero etiam alia ignota hinc deduci possint, suo patebit loco (§. 55 *Anal. infin.*): id quod omnino notandum, ne nullum in usum æquatio ista data videatur.

Singulare quid habet æquatio, quod non exprimat relationem ipsius curvæ ad rectam positionem datam per se, sed relationem potius curvæ alterius, nimirum Quadrantis circuli, cujus ope determinatur punctum M; quod rectæ AP & arcui AN, hoc est duabus indeterminatis y & x respondet. Exprimit scilicet relationem arcus AN ad rectam AP, qualis esse debeat, ut ipsi AP respondeat punctum M in Quadratrice. Data enim hac relatione datur etiam punctum M.

Quo-

Quoniam vero $y = \frac{ab}{x}$, adeoque AP quarta proportionalis ad arcum AN, quadrantem AB & radium AC; determinatio puncti M dependet a rectificatione indefinita circuli, consequenter a circuli quadratura. Ceterum Quadratrix insinuat artificium reductionis constructionis curvarum ad curvas simpliciores, supposita harum quadratura vel rectificatione: neque enim in omnibus curvis rectificatio pendet a quadratura, prouti in circulo obtinet (*vi. theor.* 3. §. 128 *Anal.*), quemadmodum suo loco videbimus, ubi de quadratura & rectificatione curvarum agitur. Artificium hoc maximi momenti est in Analysi infinitorum ad Geometriam sublimiorem applicata, quemadmodum patet per problemata physico-mechanica, qualia in Elementis Mechanicæ occurrunt. Quamobrem consultum est, ut tyrones, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, tempestive annotent, quomodo inventa Veterum recentioribus Geometris insinuaverint artificia, aut saltem insinuare potuerint, siquidem attentionem suam deficere non fuerunt passi.

§. 208. Notandum adhuc est, posse etiam curvas referri ad curvas alias positione datas, quemadmodum referuntur ad rectas positione datas, ita ut abscissæ sumantur in curva positione data, quemadmodum sumuntur in recta positione data: quod ut facilius intelligatur, dabo exemplum. Sit AMO parabola *Apolloniana* seu primi generis. Producatur semiordinata PM in N, donec recta MN habeat ad arcum parabolicum AM eam relationem, quam habet semiordinata PM ad ejus abscissam AP; evidens est, si arcus AM $= x$, MN $= y$ & recta quædam constans $= a$, fore $y^2 = ax$. Æquatio hæc ab æquatione ad parabolam in eo differt, quod x denotet arcum parabolicum AM, cum in æquatione ad parabolam denotet rectam AP. Ceterum eadem ex æquatione hac deducuntur, quæ ex æquatione ad parabolam, nisi quod theoremata ingrediatur arcus parabolicus. Nimirum cum sit $y = \sqrt{ax}$; semiordinata MN est media proportionalis inter arcum parabolicum datum AM & rectam quandam datam constantem a, quæ tertia proportionalis est ad quemvis arcum parabolicum & ipsi respondentem semiordinatam. Et quemadmodum in parabola quadrata semiordinatarum habent rationem abscissarum, ita semiordinatæ curvæ ANR sunt in ratione arcuum parabolicorum ipsis respondentium. Hoc artificio jam usus est ARCHIMEDES in spiralibus qui eas retulit ad peripheriam circuli tanquam ad axem. Facile autem apparet, relationem semiordinatæ MN ad arcum AM exprimi posse per æquationem curvæ algebraicæ cujuscunque alte-

Tab. II. Fig. 22.

 rius.

rius. Ita si arcus AO$=a$, AM$=x$, & MN $=y$; curva AMR definiri potest per æquationem $y^2 = ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum (§. 193).

Si ponamus $x = a$

$$y^2 = a^2 - a^2$$
$$= 0$$
$$y = 0$$

Unde liquet punctum R cum puncto O coincidere, adeoque curvam AR parabolam AO secare in O.

Si fiat $x = \frac{1}{2}a$

$$y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$$
$$= \frac{1}{4}a^2$$
$$y = \frac{1}{2}a$$

Patet itaque, si arcus parabolicus AO bisecetur, fore MN arcui dimidio æqualem.

Ponamus ex adverso $y = \frac{1}{2}a$

erit $\frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}a^2$$
$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$$
$$x - \frac{1}{2}a = 0$$
$$x = \frac{1}{2}a$$

Unde manifestum est, in nullo alio puncto, quam in medio arcus AO arcum parabolicum AM rectæ MN æqualem esse.

§. 209. Præter sectiones conicas definivimus potissimum eas curvas, quæ a Veteribus fuerunt inventæ, & quas recentiores Geometræ addiderunt, antequam Algebra ad Geometriam sublimiorem applicaretur & doctrina curvarum amplificaretur. Veteres præter circulum, parabolam, hyperbolam & ellipsin consideraront conchoidem, cissoidem, quadratricem, atque spirales, & recentiores addiderunt logarithmicam & cycloidem, cui deinceps accessit epicyclois. Tenendum nimirum est, Veteres non animum advertisse ad curvas, nisi quatenus problematis geometricis solvendis inserviebant. Duo autem apud ipsos celebrabantur problemata; alterum scilicet de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas datas; alterum de quadratura circuli. In usum prioris problematis solvendi NICOMEDES invenit conchoidem, DIOCLES cissoidem: posterius autem problema per spirales solvere tentavit ARCHIMEDES, per quadratricem DINOSTRATES. Recentius quadratura circuli tentata per cycloidem, ad cujus imitationem, si genesin illius spectes, inventa epicyclois. Cum vero logarithmi essent inventi & tanta utilitate in Mathesin practicam recepti; in usum logarithmorum reperta est logarithmica, ad cujus imitationem deinceps excogitata logistica spiralis. Nostrum erat lineas curvas veteribus celebratas non prætermittere silentio, qui lectorem nostrorum Elementorum ad Matheseos universæ cognitionem manuducere intendimus; præser-

præſertim cum inventis recentioribus anſam dederint, quæ a Veteribus inventa fuerunt, quemadmodum jam hinc inde annotavimus. Logarithmica autem & cyclois uſum præclarum nactæ ſunt in problematis phyſico-mechanicis, prouti ſuo loco in Elementis Mechanicæ oſtendimus. Earundem itaque mentionem injicere debuimus. Habet quoque uſum prorſus eximium epicyclois in Mechanica practica, & aliis inventis recentioribus anſam dedit. Quamobrem nec hancce ſilentio præteriri fas erat. Quadratricem *Tſchirnhauſianam* & Lineam ſinuum, tangentium atque ſecantium non alio fine adjecimus, quam ut conſtaret, quomodo curvarum geneſes excogitari poſſint: quem in finem etiam adjecimus problemata ultima hujus capitis (§. 579 *& ſeqq. Anal.*). Ex duobus tamen ultimis (§. 581, 583 *Anal.*) ſimul diſcimus, quomodo curvæ ſuperiorum generum deſcribi poſſint ope curvarum generum inferiorum. Ecce igitur tibi rationem, cur haſce potiſſimum curvas in præſente capite conſideraverimus.

§. 210. Poſtquam oſtendimus, quomodo Algebra utamur in eruendis curvarum deſcriptionibus, proprietatibus, aliiſque ſymptomatis; ad earum uſum in conſtruendis problematis exponendum progredimur. Primum itaque docemus, quomodo problemata indeterminata conſtruantur. Atque eo fine capite ſexto agitur de locis geometricis. Doctrinam hanc invenere veteres Geometræ; ſed Recentiores ad eandem Algebram applicare cœperunt; ubi conſtabat interſectione duorum locorum conſtrui æquationes altiores. Problemata indeterminata, quemadmodum vidimus ſuperius cap. 2, ſect. 2, duas habent quantitates incognitas, quarum, una pro arbitrio aſſumta, determinatur altera; quemadmodum vidimus in curvis algebraicis aſſumta abſciſſa pro arbitrio determinari ſemiordinatam: id quod etiam obtinere, ſi recta quædam poſitione data referatur ad rectam aliam itidem poſitione datam, ex iis liquet, quæ in Geometria de lineis proportionalibus inveniendis demonſtrata ſunt. Ita in triangulo rectangulo ABC, habet PM ad AP rationem conſtantem ipſius BC ad AB; atque adeo ſumta AP pro arbitrio, per rectam AC determinatur PM. Dum itaque problema indeterminatum conſtruimus, omnes reperimus rectas poſſibiles, quæ eandem datam relationem ad ſe invicem habent. Unde ſi ad rectam poſitione datam applicentur parallelæ, & quæritur in recta poſitione data punctum, quod ſit origo unius indeterminatæ, atque linea ſecans omnes iſtas parallelas, ut ad ipſas reſpondentes portiones in linea poſitione data habeant eandem relationem datam; problemati ſatisfactum. Hinc vero patet, cur linea iſta dicatur Locus;

Tab. II. *Fig.* 16.

cus; quia nempe continet omnes lineas rectas, quæ in problemate in locum indeterminatarum substitui possunt; seu quia in ea sunt singula puncta, quibus terminantur rectæ, una indeterminatarum pro arbitrio assumta, determinandæ. Ex. gr. in triangulo rectangulo hypothenusa AC est locus omnium rectarum proportionalium cruribus AB & BC: etenim continuatis rectis AB & AC in infinitum, intra crura hujus anguli continentur omnes istæ proportionales, quarum una sumitur in AB, altera vero determinatur per rectam AC; & in recta AC sunt omnia puncta M, quibus terminantur indeterminatæ ad AB normales, ut fiant assumtis AP in data ratione proportionales. Ratio est relatio simplicissima, quam exhibet recta ad rectam aliam relata. Relationes vero ceteræ constantes repræsentantur per lineas curvas; qualis est in circulo, ut quadratum semiordinatæ sit æquale rectangulo ex segmentis diametri. Videmus adeo æquationes, quæ duas involvunt lineas incognitas, geometrice construi posse; quatenus eædem exprimunt relationem constantem, quam habent singula lineæ curvæ puncta ad rectam positione datam, seu quatenus eædem sunt æquationes ad curvam quandam lineam, quam definiunt. Atque ideo æquationes, quas ante diximus æquationes ad curvam, hic vocantur locales.

§. 211. Monuimus in anterioribus, curvam referri posse ad quamlibet rectam positione datam, sive ea curvam secet in vertice, sive in alio quocunque puncto, sive eandem non secet, sed tota extra eam cadat intervallo vel nullo, vel dato ab eadem distans, & sive axi fuerit parallela, sive ad eundem obliqua. Hinc determinantur omnes casus possibiles æquationum localium: quæ quomodo reperiantur, ex iis patet, quæ de circulo paulo ante ostendimus. Cum SLUSIUS æquationum localium usum in construendis æquationibus cubicis & biquadraticis docuisset; PHILIPPUS DE LA HIRE Algebram ad loca geometrica applicavit, & in omni casu æquationes locales ad rectam, circulum, & sectiones conicas investigare docuit: quod idem fecit OZANAMUS. Enimvero cum sic plures prodirent æquationes particulares ad eandem lineam; JOANNES CRAIGIUS æquationes generales investigavit ad sectiones conicas, quæ omnes particulares eminenter continent: cujus exemplum secutus HOSPITALIUS. Nobis quoque placuit generalia invenire theoremata construendi omnes æquationes locales ad rectam & sectiones conicas; cum per ea constructiones problematum indeterminatorum, via vere analytica, erui possint. Rem penitius examinanti constabit, non aliis hic opus esse artificiis, quam quæ paulo ante insinuavimus, cum de æquationi-

tionibus ad circulum ageremus. Theoremata generalia inveniuntur, si investigentur theoremata in casu maxime composito; in quo linea, ad quam refertur curva, ponitur esse ad axem obliqua, & origo abscissarum distare a vertice, vel centro curvæ, si quod habet, aliquo intervallo. Etenim si hic quædam lineæ constantes supponantur nullæ, in æquatione termini evanescunt, qui in eas ducuntur, sicque prodit æquatio in casu simpliciori. Hoc fieri debere observavimus superius, cum in circulo origo abscissarum statuere-
Tab. II. tur in L intra verticem A & centrum
Fig. 25. C. Vidimus enim si ponatur AL = o, æquationem in eo casu repertam $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$, degenerare in æquationem ad circulum $y^2 = ax - x^2$, in casu simplicissimo, quando origo abscissarum est in A. Enimvero non modo æquatio magis composita, hoc pacto, reducitur ad simpliciorem; verum etiam schema, quod exhibet constructionem illius æquationis, degenerat in schema, quod hujus repræsentat constructio-
Tab. VII. nem. Ex. gr. si fuerit LH = o, li-
Fig. 75. Algeb. nea DH incidit in DL, adeoque pars schematis, quæ relinquitur, casum istum repræsentat, in quo recta positione data DL, ad quam refertur curva AMB, est axi AS parallela. Quodsi porro fiat KD = o, relinquitur pars schematis, quæ repræsentat casum, in quo abscissæ computantur in axe ultra verticem continuato KS, & origo earum statuitur in aliqua a vertice distantia K. Denique si etiam ponatur AK = o, prodit schema casum ordinarium exhibens, in quo abscissæ sumuntur in axe AS, & origo abscissarum in vertice. Methodus adeo qua utimur, non modo æquationes locales omnes ad eandem curvam una æquatione includit, eodem artificio, quo æquationes omnes ad curvas algebraicas ad æquationem unicam generalem reduximus (§. 385 *Analys.*); sit ita quod ibidem aliud præterea artificium adhibendum erat, quo hic non habemus opus; quia ibidem æquationes omnes una formula comprehendendæ, non erant ejusdem gradus, quemadmodum in præsenti obtinet; sed etiam unico schemate omnium æquationum localium constructiones comprehendit. Quænam hæc sit prærogativa præ methodo communi, qua singuli casus sigillatim expenduntur; facillimo negotio animadvertet, qui, quæ de locis geometricis tradimus, cum iis conferre voluerit, quæ de iisdem docet DE LA HIRE, vel OZANAMUS.

§. 212. Unum adhuc superest, quod de theorematis hisce generalibus observandum, ne eorum applicatio turbet tyrones. In schemate nostro supponimus, originem abscissarum removeri ultra verticem, ita ut abscissa linea quadam data excedat abscissam ordinariam. Enimvero
vidimus supra, originem earundem Tab. II. Fig. 25.

etiam ſtatui poſſe ex parte altera, veluti in L, ita ut abſciſſa LP deficiat ab abſciſſa ordinaria linea quadam data AL. Similiter rectam axi parallelam, vel ad eum obliquam ponimus ultra eundem, ut augeat ſemiordinatam ordinariam PM recta quadam data; cum tamen etiam hæ lineæ ita duci poſſint ex parte oppoſita, ut ſemiordinata QM vel RM deficiat ab ordinaria PM, linea quadam data PQ, vel PR. Æquatio igitur localis generalis non videtur omnes æquationes particulares continere, nec ſchema illi reſpondens comprehendere omnia ſchemata, quæ harum conſtructionem exhibent. Dubium hoc ut tollatur, noſtrum eſt docere, qua ratione innotuerit, quomodo iidem quoque caſus in eo, ad quem computavimus æquationem, contineantur. Supra reperimus æquationem ad circulum, ſi origo abſciſſarum fuerit in L, $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$. Ponamus jam originem abſciſſarum eſſe in N, ut ſit NA$=b$, NP$=x$, ſitque AB$=a$, PM$=y$; erit AP$=x-b$, PB$=a+b-x$.

Ob PM^2=AP. PB
prodibit

$$y^2 = ax - x^2 + 2bx - ab - b^2$$

Æquationem hanc a ſuperiori non differre videmus niſi ſignis & hanc diverſitatem hinc oriri obſervamus, quod ibi abſciſſa ordinaria AP ſit $x-b$, hic vero $b-x$. Quodſi ergo æquationes iſtæ redigantur ad nihilum, quemadmodum in hac doctrina fieri ſolet; habebimus in eo caſu, ubi abſciſſarum origo in N,

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - ax + ab &= 0 \\ - 2bx + b^2 & \end{aligned}$$

in caſu autem oppoſito, ubi origo abſciſſarum in L,

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - ax - ab &= 0 \\ + 2bx + b^2 & \end{aligned}$$

Quare ſi duas haberes formulas, valor ipſius b in caſu particulari dato ſemper eliceretur poſitivus, cum in priori coëfficiens negativus comparandus eſſet cum negativo $-2b$, in poſteriori coëfficiens poſitivus cum $+2b$. Quodſi vero æquationem, quæ cum formula poſteriori conferri debebat, cum priori componis, adeoque quantitatem poſitivam cum negativa, neceſſe eſt ut valor ipſius b prodeat negativus. Si $-b$ ſubſtituas in locum $+b$ in æquatione altera; pro $+2bx$ habebis $-2bx$, pro $-ab$ vero $+ab$; ducendo ſcilicet $-a$ in $-b$: aſt b^2 retinet ſignum ſuum, quia $-b$ in $-b$ efficit $+b^2$. Atque ſic æquatio poſterior degenerat in priorem; ut adeo prior in utroque caſu adhiberi poſſit; modo notes, quoties in caſu particulari lege comparationis valor ipſius b elicitur negativus, toties ſumendam eſſe rectam eidem reſpondentem ex parte oppoſita, ut ſit AL$=b$. Idem cum eodem modo obtineat quoad diſtantiam parallelæ axi ab eodem PQ; manifeſtum eſt, cur una formula ſatisfaciat in caſu utroque, modo obſervetur, quod de valore negativo in

in æquationis particularis cum generali comparatione prodeunte annotavimus. Idem adhuc clarius patet in parabola. Etenim si fuerit SA $= b$, SP $= x$, adeoque AP $= x - b$; erit ex natura Parabolæ, si parameter fuerit a,

Tab. II. Fig. 11.

$$y^2 = ax - ab$$

seu $$y^2 - ax + ab = 0$$

Quodsi fuerint omnia ut ante, sed AL $= b$, adeoque AP $= b + x$, erit

$$y^2 = ax + ab$$

seu $$y^2 - ax - ab = 0$$

Hic denuo patet, æquationem posteriorem non differre a priori, nisi diversitate signorum in iis terminis, quorum coëfficiens est b; in priori enim habemus $+ ab$, in posteriori $- ab$. Quamobrem ubi in applicatione formulæ generalis, quæ ad casum priorem spectat, confers terminum negativum æquationis ad casum posterioremspectantis cum positivo, qui ex formula casus prioris sumitur; valor utique prodire debet negativus pro AL. Patet etiam hic, si in æquatione posteriori pro $+ b$ substituas $- b$, ducendo $- b$ in $- a$, prodire $+ ab$, adeoque æquationem posteriorem degenerare in priorem; quemadmodum ex adverso prior abit in posteriorem, si in priori substituas $- b$ pro $+ b$. Quodsi enim ducas $+ a$ in $- b$, prodibit $- ab$, quemadmodum habet formula posterior. Videmus adeo, quomodo innotuerit, eandem formulam subire posse vicem duarum, si valoris negativi quantitas sumatur ex parte opposita. Immo videmus, perinde esse, sive in formula generali abscissam & semiordinatam statuas ordinariis AP & PM majorem, sive minorem; ut adeo nulla ratio intrinseca fuerit electionis, sed tantummodo extrinseca: quod ideo monemus, ne quis in Philosophia hinc petat argumentum contra principium rationis sufficientis in electionis casu. Utimur eodem artificio, non sine maxima utilitate, in Analysi infinitorum seu calculo differentiali & integrali, quemadmodum suo loco videbimus; ubi ex eadem ratione valorem negativum sumimus pro magnitudine ex parte opposita sita. Absit itaque ut tibi persuadeas, hoc fieri ex natura quantitatum privativarum; & hinc colligas, quantitates privativas esse veras quantitates, seu in numero positivarum; cum satis constet eas non denotare nisi defectum quantitatis veræ, seu positivæ, per positivam, quæ deficit, æstimabilem; quemadmodum pecunia, quæ debetur, non est parata pecunia, quam habes, etsi per paratam pecuniam æstimetur, quæ solvenda, ut debitum tollatur. Nullæ revera sunt quantitates negativæ, etsi utiliter in usum calculi universalis fingantur. Cavendum omnino est, ne entia ficta Mathematicorum confundantur cum realibus in detrimentum scientiæ philosophicæ.

§. 213. Hinc simul patet ratio,

cur in casu particulari demonstraturi constructionem ex formula generali elicitam; eruendo ex hac æquationem ad construendum propositam; non utamur valoribus negativis, qui per comparationem cum formula generali prodeunt, sed iis substituamus positivos: id quod fieri non licebat, si per naturam quantitatum valor esset negativus. Valor negativus v. gr. rectæ AL nonnisi fictitius est; quatenus æquatio, unde elicitur, repræsentare fingitur casum, quem non repræsentat; cum revera non exhibeat nisi eum, in quo origo abscissarum est in N; propterea quod, hac fictione, eadem formula sufficere deprehenditur in utroque casu, quam absque ea nonnisi in uno adhibere liceret, nimirum quando origo abscissarum est in N. Extra hanc fictionem utique contradictorium est, quantitatem positivam esse æqualem privativæ; quemadmodum etiam in ipsa Analysi contradictionem inde colligimus, atque ex ea porro, notioni impossibilis convenienter, (§. 97 *Ontol.*) impossibilitatem inferimus. Habemus exemplum in æquatione ad circulum $y^2 + x^2 - ax + 2bx - ab + b^2 = 0$.

Tab. II. *Fig.* 25.

Quodsi enim ponas

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 + a^2 - a^2 + 2ab - ab + b^2 = 0$$

$$y^2 = -ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(-ab - b^2)}$$

Ex eo itaque, quod valor ipsius y^2 prodit negativus, qui producit pro y radicem imaginariam; infertur, impossibile esse, ut abscissa fiat diametro æqualis; recte omnino, cum idem per se pateat, ubi supponis notum esse, quod æquatio sit ad circulum, & origo abscissarum in L, cum abscissa major esse nequeat recta LB $= a - b$. Nimirum hic colligitur, hypothesin $x = a$ esse absurdam; quia hinc sequitur, quantitatem positivam esse æqualem privativæ, aut radici imaginariæ; quod absurdum esse supponitur.

§. 214. Ut usus formularum generalium in construendis æquationibus problematum indeterminatorum clarius elucesceret, aliquot exemplis eundem illustrare lubuit (§. 593 & seqq. *Anal.*). Patet per ea, ope istarum formularum, nos via vere analytica deduci ad problematum indeterminatorum constructionem, ac constructiones semper obtineri concinnas, quales in Geometria desiderantur; ut adeo non solius brevitatis gratia easdem prætulerimus methodo communi, qua usi sunt DE LA HIRE & OZANAMUS. Dedimus quoque exempla, (§. 597, 600 *Anal.*), quibus ostenderemus, quomodo, ex constructione locorum, deriventur æquationes locales; ut appareat ad quamnam curvam sit locus constructus. Quoniam vero id intendimus, ut, dum artificia Analyseos inculcamus, simul doceamus veritates mathematicas cognitu utiles; ideo selegimus constructiones curva-

curvarum, quas pro fornicibus commendant Architecti, ut constaret, eas esse ellipses *Apollonianas*. Æquationem primam (§. 597 *Anal.*) $y^2 + \frac{d^2x^2}{a^2} - \frac{d^2x}{a} = 0$ esse ad ellipsin, constare poterat ex collatione cum formula generali pro ellipsi (§. 588 *Analys.*). Quodsi consueto more hanc æquationem cum formula ista compares, deprehendes a esse axem majorem, d vero minorem ellipseos. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad 2n = 0$$

$$q = s$$

$$-\frac{2tp}{2m} = -\frac{d^2}{a} \qquad m^2 = p^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\frac{2d^2p}{a^2} = \frac{d^2}{a} \qquad m = \tfrac{1}{2}a$$

$$\frac{2p}{a} = 1$$

$$p = \tfrac{1}{2}a$$

Habemus adeo

$$a^2 : d^2 = a : t$$

$$t = \frac{ad^2}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

Quoniam parameter t est tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Analys.*); cum a sit axis major, erit d minor, & ob $p = \frac{1}{2}a$ abscissæ computantur a vertice.

Similiter æquationem alteram $y^2 + \frac{ddx^2}{a^2} - \frac{2ddx}{a} = 0$ esse ad ellipsin, ejus cum formula generali collatio prodit; & illius cum hac comparatione facta patet, quod a sit axis dimidius major, d vero dimidius minor. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad \frac{2tp}{2m} = \frac{2dd}{a}$$

$$\text{h. e. } \frac{d^2p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

$$p = a$$

$$m^2 = p^2 = a^2$$

$$m = a$$

$$a^2 : d^2 = 2a : t$$

$$t = \frac{2ad^2}{a^2} = \frac{2d^2}{a}$$

Quoniam a est dimidius axis major, & parameter t tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Anal.*), seu quarta ad dimidium axem majorem, minorem dimidium, & minorem integram (§. 124 *Analys.*); ideo patet, d esse axem minorem dimidium, & ob

$y = a$ originem abfciffarum effe in vertice ellipfeos.

§. 215. Utraque æquatio localis, etfi ex diverfis conftructionibus eruatur, eadem eft; nifi quod in pofteriori a & d denotent femiaxes, in priori autem integros axes conjugatos. Forfan non inconfultum erit hic docere, quomodo conftructio utraque eruatur ex æquatione ordinaria ad ellipfin. Æquatio hæc eft $y = bx - \frac{bx^2}{a}$, in qua b parametrum, a vero axem majorem denotat. Quoniam parameter eft tertia proportionalis ad axem majorem a & minorem d (§. 423 *Anal.*); erit $b = d^2 : a$. Quodfi ergo in æquatione ordinaria hunc valorem in locum ipfius b furroges; habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} - \frac{d^2 x^2}{a^2}$$
$$= \frac{d^2 ax - d^2 x^2}{a^2}$$

Quare

$$a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2$$
$$a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Patet adeo femiordinatam in ellipfi effe quartam proportionalem ad axem majorem, minorem & femiordinatam circuli fuper axe majore defcripti eidem cum femiordinata ellipfeos abfciffæ refpondentem. Quamobrem cum pro a & d fumi etiam poffit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124 *Anal*); igitur patet, fi fuper axe majore defcribatur femicirculus & in P erigatur perpendicularis PN, ductaque ex centro C radio CN

Tab. II. Fig. 26.

in eum transferatur CR femiaxi minori æqualis, ac tandem ex R demittatur perpendicularis RM; fore punctum M in ellipfi: quæ eft ipfa conftructio SERLII ex æquatione ordinaria elicita. Cum enim fit MR parallela ipfi PC; erit (§. 268 *Geom.*)

$$NC : RC = NP : PM$$
$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Poteramus itaque conftructionem *Serlianam* ellipfeos jam ex æquatione ordinaria elicere in fuperioribus, cum doctrinam de ellipfi traderemus. Etfi autem æquatio ex altera conftructione elicita eadem fit cum anteriore; ex ea tamen non minus deduci poterat conftructio altera. Etenim fit ellipfis ADB, cujus axis major AB, femiaxis minor EF. Defcribatur, radio CD, femicirculus EDF, & erecta perpendiculari PM ducatur axi AB parallela MN, ex N vero demittatur perpendicularis NQ, quæ erit ipfi PM æqualis. Si fit $AC = a$, $DC = d$, $AP = x$, erit æquatio ad ellipfin $y^2 = \frac{2addx - d^2 x^2}{a^2}$, adeoq;

Tab. III. Fig. 27.

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$$

Sit jam $EQ = z$, erit $QF = 2d - z$, adeoque $QN^2 = PM^2 = y^2 = 2dz - z^2$. Habemus itaque

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : 2dz - z^2$$

adeoque (§. 124 *Anal.*)

$$a^2 - 2ax + x^2 : a^2 = d^2 - 2dz + z^2 : d^2$$
$$a - x : a = d - z : d$$
$$x : a = z : d$$
$$x : z = a : d$$

hoc

hoc eſt, AP : EQ = AC : EC

Quare ſi ad ſemiaxem majorem, & minorem ellipſeos, atque abſciſſam AP pro arbitrio aſſumtam, quæratur quarta proportionalis; erit ea abſciſſa EQ, cui reſpondet ſemiordinata QN in circulo ſemiordinatæ ellipſeos PM æqualis.

Quodſi diſplicet reſolutio per analyſin rationum; analogiam, qua nititur conſtructio, per Algebram quoque reperire licet. Etenim

$$\frac{2ad^2x - d^2x^2}{a^2} = 2dz - z^2$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x}{a^2} = z^2 - 2dz$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2}{a^2} = z^2 - 2dz + d^2$$

$$\frac{ad - dx}{a} = d - z$$

$$\frac{dx}{a} = z$$

Habemus itaque, ut ante:

$$a : d = x : z$$

Notanda hic ſunt artificia, quibus conſtructiones ex æquatione ordinaria eliciuntur. Nimirum in æquatione ordinaria ſubſtituimus valorem parametri, quam ex eadem elicuimus, ut eandem ingrediantur nonniſi lineæ in ipſa contentæ. Ita enim prodibat æquatio, cujus in analogiam reſolutione conſtructio prior erat manifeſta. Ex eadem æquatione in analogiam reſoluta prodit quoque altera; ſubſtituendo valorem quadrati ſemiordinatæ ellipſeos ex circulo circa axem minorem deſcripto. Equidem prævidere non licet, quid per ſubſtitutionem ſit proditurum; non tamen ideo ea negligenda eſt. Ubi enim veritatem quærimus; tentanda ſunt omnia, donec incidamus in theoremata & conſtructiones problematum. Principii ſubſtitutionis magna vis eſt in Analyſi: efficit enim æquationem dependentem a pluribus veritatibus, ut jam ex ea per reductionem eadem erui poſſint, quæ ex iiſdem more Veterum ratiocinando colliguntur.

§. 216. Enimvero ut intelligant Tab. III.
tyrones, idem artificium etiam in aliis Fig. 28.
curvis adhiberi poſſe, lubet hoc ipſum applicare ad hyperbolam. Pro hyperbola æquatio ordinaria eſt $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$. Eſt etiam hic, ſi axis conjugatus $= d$, parameter $b = \frac{d^2}{a}$.

Quodſi ergo hunc valorem in æquatione ordinaria ſubſtituas, habebis

$$y^2 = \frac{d^2x}{a} + \frac{d^2x^2}{a^2}$$

$$= \frac{d^2ax + d^2x}{a^2}$$

Quare $a^2 : d^2 = ax + x^2 : y^2$

$$a : d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

Quodſi

Quodſi ergo ex centro hyperbolæ C erigas CD $= \frac{1}{2}d$, & ſuper BP, abſciſſa AP pro lubitu aſſumta, deſcribas ſemicirculum ſecantem perpendicularem in A erectam in N, & PN $= \sqrt{(ax+x^2)}$ transferas ex B in L, tandemque in L erigas perpendicularem LI, occurrentem rectæ per B & D ductæ in I; erit LI ſemiordinata y abſciſſæ AP reſpondens. Quamobrem, ſi fiat recta PM ad BP perpendicularis = LI; erit punctum M in hyperbola. Cum in praxi non opus ſit ſemicirculum deſcribi, ſed ex medio BP, tantummodo interſecanda recta AN in N, & intervallum PN ex B in L transferendum; quodvis in hyperbola punctum M hoc modo facillime determinatur, ut conſtructio pro non ineleganti haberi poſſit. Notent igitur hic tyrones, quod ad artificia, quibus in ſolutionibus problematum utuntur Autores, animum attendere debeant, eadem ſtatim adhibituri ad alia, quantum ipſis datur. Nec inconſultum erit, ut Autores, qui de ſectionibus conicis commentati ſunt, evolvant, & ubi theoremata & problemata elegantia occurrunt, ea analytice inveſtiganda ſibi proponant. Ad hoc ſtudium ut eos incitaremus, iiſdemque viam, qua eundum, commonſtraremus, ea in medium proferre libuit, quæ de ellipſi & hyperbola dicta ſunt. Unicum adhuc addendum. In hyperbola æquilatera $a=d$, adeoque $y=\sqrt{(ax+x^2)}$, conſequenter PM=PN. Quamobrem punctum M in eadem nullo fere negotio determinatur, ſcilicet ſi ex medio BP, intervallo $\frac{1}{2}$ BP, interſecetur AN in N, & intervallo PN interſecetur PM in M; ut adeo non opus ſit, niſi in A erigi perpendicularem infinitam.

§. 217. Nos non progredimur ultra loca ſolida, in quibus acquieverunt Veteres: neque enim hæc doctrina ultra hoſce limites multum promota. NEWTONUS enumeravit lineas tertii ordinis, ſeu curvas ſecundi generis, quarum æquationes ad tres dimenſiones aſcendunt. Eam eſſe completam demonſtravit STIRLINGIUS, ſimulque oſtendit, quomodo, æquatione curvæ tertii ordinis data, inveniatur locus, hoc eſt, ſpecies curvarum dignoſcatur, ad quam eadem eſt. Enimvero hæc non ſunt ad captum tyronum, in quorum uſum conſcripſimus Elementa noſtra; neque adhuc ea ratione pertractata, ut eadem facilitate intelligantur, qua a nobis propoſita capiuntur. Neque etiam opus eſt, ut hac doctrina ſis inſtructus, ubi ea, quæ in ſequentibus tradimus, intelligere volueris; immo eadem ignorata non impeditur progreſſus in Analyſi recentiorum, qua Geometria ad naturam applicatur. Hoc non eo fine monemus, ut præclaris inventis laudem ſuam detrahamus; ſed ne tyrones remorentur progreſſum ad ulteriora; affectantes ſcientiam eorum, quorum ignorantia eidem

dem

eadem minime obſtat. Monitum igitur noſtrum exigit præſens inſtitutum. Ultra enumerationem linearum tertii ordinis, ſeu curvarum ſecundi generis, nemo adhuc progreſſus. Atque adeo doctrina de ſpeciebus curvarum algebraicarum tanto adhuc intervallo diſtat a perfectione ſua, quanto ab eadem diſtare Algebram monuimus. Abunde tyronibus ad altiora adſpirantibus ſufficiunt ea, quæ de locis geometricis tradidimus. Et ubi ad artificia, quibus in doctrina hac explananda utimur, animum attulerint attentum, ut eadem animo diſtincte comprehendant; iiſdem plurimum juvabuntur in altioribus, quæ deinceps ſequuntur. Hoc auxilio methodus comparationis æquationum particularium, in quibus coëfficientes indeterminatarum ſunt determinati, cum aſſumtitiis, in quibus coëfficientes iſti indeterminati ſunt, familiaris redditur. Ejus autem in Analyſi multus eſt uſus.

§. 218. Doctrinam de locis geometricis non ſolum propoſuimus in uſum conſtructionis problematum indeterminatorum, cujus ideo dedimus aliquot exempla; ſed & in uſum conſtructionis æquationum altiorum, præſertim cubicarum & biquadraticarum. Quamobrem capite ſeptimo docemus primum in genere, quomodo æquationes ſuperiores conſtruantur, & mox in ſpecie, quomodo conſtruantur æquationes cubicæ & biquadraticæ. Methodus autem, qua hic utimur, tota huc redit, ut conſtruantur duo loca, quorum interſectione determinatur radix æquationis, ſeu linea recta, quæ eidem reſpondet. Invenit eandem SLUSIUS. Etſi enim non deſint, qui eam jam CARTESIO perſpectam fuiſſe contendunt; certo tamen, quod affirmant, probare minime poſſunt; cum alia quoque via in regulam ſuam incidere potuerit, quam in Geometria pro conſtruendis æquationibus cubicis & biquadraticis, per parabolam & circulum, præſcribit. Quemadmodum vero inventa Veterum profuerunt Recentioribus ad invenienda ſua, quibus ad ulteriora progreſſuris uſui ſunt inventa anteriora; ita dubium non eſt, quin Veterum quoque inventa facem protulerint SLUSIO ad methodum ſuam conſtruendi æquationes cubicas & biquadraticas inveniendam. Etenim cum Veteres multum deſudarent in duabus lineis EF, GH, mediis continue proportionalibus inter duas datas AB, CD, inveniendis; MENECHMUS via vere analytica pervenit ad ſolutionem problematis tantopere celebrati, ope interſectionis duarum parabolarum. Atque in hac ipſa conſtructione continetur idea ejus methodi, quam SLUSIUS primus reperit: id quod ut appareat, analyſis MENECHMI paulo diſertius explicanda. Quoniam GH tertia proportionalis ad AB & EF, itidemque CD tertia proportionalis ad EF & GH; habemus Tab. III. Fig. 29.

$AB:EF = EF:GH \quad EF:GH = GH:CD$

$EF^2 = AB.\,GH \quad GH^2 = CD.\,EF$

Patet itaque, quadratum primæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex data prima AB in quæsitam alteram, seu mediarum continuæ proportionalium secundam; quadratum vero secundæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex datarum altera in primam quæsitarum seu continue proportionalium. Quoniam in parabola quadratum semiordinatæ est æquale rectangulo ex parametro in abscissam; igitur patet si, parametro data una AB, describatur parabola; secundam quæsitarum GH fore in numero abscissarum, & eidem respondentem semiordinatam fore primam quæsitarum EF: contra si, parametro data altera CD, describatur parabola; secundam quæsitarum GH fore in numero semiordinatarum ejusdem, & eidem respondentem abscissam fore primam quæsitarum. Quamobrem patet eandem rectam esse abscissam in parabola una & semiordinatam in altera, & quæ in una semiordinata est, eandem esse abscissam in altera. Obtinet hoc si duæ parabolæ, AMR & AMO, circa axes AD & AE, ad angulos rectos junctos, describantur; in puncto enim intersectionis semiordinata PM parabolæ AMR æqualis est abscissæ AQ parabolæ alterius AMO, & vicissim semiordinata QM parabolæ AMO æqualis est abscissæ AP parabolæ AMR. Patet itaque si rectæ datæ sumantur pro parametris parabolarum AMR & AMO; rectas AP & PM fore duas medias continue proportionales inter duas istas rectas datas. Hic est modus inveniendi duas lineas medias continue proportionales inter duas datas. Quod si $AB = a$, $CD = b$, $EF = x$, $GH = y$; erit

Tab.III. Fig. 29.

$$x^2 = ay \qquad y^2 = bx$$

$$\frac{y^4}{b^2} = ay \qquad \frac{y^2}{b} = x$$

$$y^4 = ab^2 y$$

$$y^3 = ab^2$$

Unde liquet, æquationem cubicam $y^3 - ab^2 = 0$ construi per duo loca $x^2 - ay = 0$, & $y^2 - bx = 0$; quorum intersectione determinatur semiordinata PM, quæ radici æquationis $y^3 - ab^2 = 0$ respondet. Constructio adeo MENECHMI insinuat ideam methodi SLUSIANÆ.

§. 219. Inventum MENECHMI ansam quoque dare poterat inveniendæ regulæ *Cartesianæ*, qua æquationes cubicæ & biquadraticæ construuntur. Nimirum cum ex illo constet, æquationem cubicam construi per duas parabolas, quarum mutua intersectione determinatur radix; in Arte inveniendi autem tentaminibus multa relinquantur; facile animum subit cogitatio tentandi, num circulus

Tab.III. Fig. 30.

culus quoque per verticem parabolæ ductus in puncto intersectionis extra verticem determinet radicem æquationis cubicæ. Sit itaque centrum circuli, per verticem parabolæ A descripti, in C; si ex eo in axem parabolæ demittatur perpendicularis CD, evidens est per rectas AD & DC determinari & centrum C, & radium AC. Sit itaque PM $= y$, parameter $= a$, AD $= b$, DC $= c$. Demittatur ex C perpendicularis CR ad semiordinatam PM; erit RM $= y - c$, & ex natura Parabolæ AP $= \frac{y^2}{a}$ (§. 391 *Analyſ.*), adeoque DP $=$ CR $= \frac{y^2}{a} - b$. Quoniam $AC^2 = AD^2 + DC^2$ & $CM^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $AC^2 = b^2 + c^2$ & $CM^2 = \frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} + b^2 + y^2 - 2cy + c^2$, consequenter ob $CM^2 - AC^2 = 0$

Tab. III. Fig. 31.

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} - 2cy = 0$$
$$+ y^2$$

$$y^3 - 2aby - 2a^2 c = 0$$
$$+ a^2 y$$

Patet itaque, intersectione circuli per verticem parabolæ transeuntis & parabolæ, construi posse æquationem cubicam, in qua secundus terminus deficit.

Ut jam determinetur valor ipsius b, seu rectæ AD, & valor ipsius c, seu rectæ DC; sit æquatio alteri æquivalens

$$y^3 - py - q = 0$$
$$\text{erit } -2ab + a^2 = -p$$

$$b - \tfrac{1}{2}a = \frac{p}{2a}$$

$$AD = b = \frac{p}{2a} + \tfrac{1}{2}a$$

$$\text{Similiter } \quad -2a^2 c = -q$$

$$DC = c = \frac{q}{2a^2}$$

Quodsi cum CARTESIO sumas parametrum pro unitate, & fiat in axe AH $=$ semiparametro, erit

$$HD = \tfrac{1}{2}p$$
$$DC = \tfrac{1}{2}q$$

hoc est, recta HD est æqualis coëfficienti dimidio termini tertii, & DC coëfficienti dimidio quarti, secundo deficiente; quemadmodum habet regula CARTESII.

Non aliis hic utimur artificiis, quam quibus usi sumus in determinanda tangente sectionum conicarum juxta methodum CARTESII (§. 410, 440, 491 *Analyſ.*). CARTESIO itaque constructio MENECHMI, qua utitur in inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas, ansam dare potuit inveniendi regulam construendi æquationes cubicas, in quibus secundus terminus deficit; & artificia ipsi familiaria, quibus hic utitur, animum avertere potuerunt ab idea con-

ſtructionis per combinationem duorum locorum in conſtructione MENECHMI contenta, ad quam eundem advertit SLUSIUS; ut adeo certo aſſeverari non poſſit, methodum *Sluſianam* cognitam jam fuiſſe CARTESIO, & eadem hunc perveniſſe ad regulam ſuam. Quicquid ſit, utile tamen eſt tyronibus perpendiſſe, quomodo inventum MENECHMI analytice expenſum, & ideam conſtructionis æquationum ſuperiorum per combinationem duorum locorum, & anſam inveniendi regulam conſtruendi æquationes cubicas, in quibus ſecundus terminus deficit, ad biquadraticarum conſtructionem deinceps extenſam, præbere potuerit; ſiquidem ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Quoniam ex qualibet æquatione ſecundus terminus auferri poteſt (§. 343 *Analyſ.*) & hoc pacto æquationes cubicæ omnes reducuntur ad tres caſus (§. 345 *Analyſ.*); regula CARTESII, quæ ſecundum terminum deficere ſupponit, omnibus omnino æquationibus cubicis conſtruendis ſufficit; etſi haud difficile ſit eandem quoque extendere ad eas æquationes, quæ ſecundum terminum habent, quemadmodum operoſe oſtendit BAKERUS; nos brevius docuimus (§. 622 *Anal.*). Cur vero methodum *Sluſianam* præferamus regulæ *Carteſianæ* a BAKERO extenſæ, rationem reddimus in ſcholio probl. 245. (§. 608 *Analyſ.*).

§. 220. Notandum vero eſt, quod conſtructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum vere analyticas tradiderimus; ut adeo in iis induſtriam ſuam utiliter exerceant, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Tanta autem perſpicuitate doctrinam hanc expoſuimus, ut, qui in anterioribus induſtriam ſuam deſiderari non fuerunt paſſi, nihil prorſus difficultatis ſentiant. Inprimis autem hinc diſcere licet, quomodo tollatur omnis difficultas, quæ ex nimis longa rerum meditandarum ſerie naſcitur. Quamobrem huc animum advertant, quotquot meditationibus longis adſueſcere voluerint. Quod qui faciunt, hunc utique percipient fructum, ne longitudine meditationum defatigentur. Id tantummodo adhuc monemus tyrones, ut, ubi locus conſtruendus, formula generalis, cum qua particularis data conferenda, ex ſuperioribus exſcribatur, & eidem æquatio localis conſtruenda ſubſcribatur, ut termini comparandi ſibi invicem reſpondeant. Ex. gr. in problemate 245 (§. 607 *Anal.*) locus ad circulum eſt $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Formulæ igitur generali ea ita ſubſcribitur, quemadmodum hic factum eſſe vides:

$$\begin{array}{llllll} y^2 - \frac{2rxy}{q} & + \frac{r^2x^2}{q^2} & - ny & + \frac{2nrx}{q} & + n^2 & = 0 \\ & + \frac{s^2x^2}{q^2} & & - \frac{2psx}{q} & - m^2 & \\ & & & & + p^2 & \\ y^2 \quad * & + x^2 & - cy & + bx & * & = 0 \\ & & & - ax & & \end{array}$$

Loca vacua replentur ſtellula, ut appa-

appareat, quinam termini ſint nihilo æquales in caſu particulari dato. Hoc nimirum pacto ſtatim videmus, quinam coëfficientes ſint invicem comparandi, & quinam poni debeant nihilo æquales; ne ex confuſione oriatur error. Quamvis vero, prolixitatis evitandæ gratia, non omnia combinavimus loca, quorum æquationes ex æquatione cubica vel biquadratica elicuimus; qui tamen ingenium & induſtriam ſuam exercere voluerint, hoc non inutiliter facient. Ubi vero, comparatione æquationum particularium, cum formula generali facta, valores omnes linearum ad conſtructionem loci requiſitarum fuerunt determinati; oculi convertendi ſunt in ſchema formulæ generali reſpondens & delendæ lineæ, quarum valores reperti ſunt nihilo æquales: ita enim relinquitur ſchema æquationi particulari reſpondens. Quamobrem ſi lineis remanentibus adſcribas valores modo repertos; ſtatim videbis, quomodo locus ſit conſtruendus. Et ubi ſchemata duobus locis reſpondentia inter ſe confers; illico patebit, quomodo unum alteri ſit imponendum, ut lineæ, quæ utrobique eædem ſunt, ſibi mutuo congruant; conſequenter quomodo æquatio data ſit conſtruenda. Hac via ſi incedere volueris, non modo aberit moleſtia, quæ ex nimis diu continuanda meditatione ſuboritur; verum etiam conſtructione ad finem perducta voluptate perfundetur animus, quæ ſtudium Matheſeos continuo magis magiſque tibi commendabit, & ardorem in eodem progrediendi accendet. Inprimis etiam ſenſum evidentiæ acquires; ſtatim poſthac animadverſurus, ubi diſtincte perceptis quædam permiſcentur, quæ adhuc confuſe percipiuntur: id quod inprimis uſui eſt extra Matheſin, ubi confuſe perceptorum cum diſtincte perceptis commixtio magis nocet, quam in Matheſi; præſertim iis in caſibus, in quibus intellectus ab imaginatione avocandus totus, ut veritatem liquidam perſpicias. Hoc etiam obtinebis, ne nimia feſtinatione te præcipites; & ut inter multos ſtrepitus attentionem conſerves; eamque interrumpere poſſis, quotieſcunque volueris, certo ſemper tramite progreſſurus, quando viſum fuerit; quemadmodum viator recta via incedens ab eadem minime aberrat, nec iter jam emenſum repetere tenetur, ubi gradum ſiſtit, quotieſcunque libuerit. Neque verendum eſt, ut diuturna meditatione defatigetur animus & ſanitati corporis inſidiæ ſtruantur. Non opus eſt, ut in hiſce afferendis multum ſtudii collocemus, quamvis ad ſingula demonſtranda a priori principia ſuppeditet Pſychologia noſtra. Qui enim dictis obediens fuerit, in ſeipſo experietur, veritati conſentanea eſſe, quæ dicimus non loquentes niſi experta.

§. 221. Quoniam idem problema multis modis conſtrui poteſt, cum

 v. gr.

v. gr. eidem æquationi cubicæ satisfaciat non modo cujusvis loci solidi cum loco ad circulum, verum etiam cujusvis loci solidi cum quovis loco solido combinatio; quæri omnino poterat, quænam curvæ sint ceteris præferendæ. CARTESIUS æquationes cubicas & biquadraticas non construit nisi per parabolam & circulum; etsi non ignoraverit, easdem quoque construi posse per ceteras sectiones conicas, atque circulum. Videtur utique hoc fecisse, quod æquatio parabolæ & circuli sit simplicior æquationibus ceterarum sectionum conicarum. Cum enim vitium ἀγεωμετρησίας ipsi sit, si æquatio construatur per lineas superioris cujusdam generis, quæ construi potest per lineas generis inferioris, veluti si æquatio cubica vel biquadratica construatur per curvas secundi generis, cum construi possint per curvas primi generis; ex ejusdem omnino generis curvis eas præferre debuit, quæ per æquationes simpliciores definiuntur. Recte autem monuit NEWTONUS, in constructione problematum geometricorum non respiciendum esse ad æquationes curvarum, sed potius ad earum descriptionem; ita ut hæ præferantur aliis, quæ sunt facilioris descriptionis. Unde ad construenda problemata solida adhibet conchoidem, etsi ea sit tertii generis. Immo non improbat, si quis ad datum angulum in data ratione secandum utatur cycloide, quæ motu rotæ, vel circuli, super recta facillime describitur; etsi ea per nullam æquationem algebraicam definiri possit. Etsi autem æquationes cubicæ ac biquadraticæ omnes per circulum & parabolam construi possint; non tamen ideo consultum est, ut non aliis etiam sectionibus conicis in istis æquationibus construendis utamur. Etenim ubi problemata algebraice solvimus, haud raro incidimus in æquationes locales alterius sectionis conicæ, quam parabolæ; ut adeo sua veluti sponte sese offerat ad constructionem; cum parabola demum anxie quærenda esset; &, per aliam sectionem conicam quam parabolam, haud raro multo concinnius construi potest. Quædam adeo lineæ quibusdam problematis videntur quasi propriæ, ita ut destinentur eorundem constructioni; quia pariunt elegantem, & simpliciorem, si linearum rationem habeas, ex quibus datis quæsita determinanda; cum constructiones ceteræ evadant intricatiores, & schemata pariant confusa, si omnes constructiones subsidiariæ eidem simul inferendæ, nec curva supponatur tanquam data, nec lineæ ex coëfficientibus terminorum reperiundæ tanquam jam repertæ.

§. 222. Apud Veteres celebrabantur problemata, de inveniendis lineis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, & de trisectione anguli. Cum enim per Geometriam elementarem facillime invenia-

veniatur media proportionalis inter duas datas, & angulus non minus facile bifecetur, per folas rectas & circulum, feu per Geometriam elementarem; Veteres primum horum problematum folutiones interfectione rectarum & circuli quoque tentarunt, fed fruftra. Unde ad conftructiones per alias lineas curvas confugiendum tandem erat. Quamobrem noftrum quoque erat, ut, conftructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum illuftraturi, horum inprimis problematum rationem haberemus. Diftinxerunt vero ideo Veteres problemata in plana, folida, & linearia. Plana appellarunt, quæ per rectas & circulum conftrui poffunt, quia hæ lineæ fupponuntur in plano defcriptæ; folida, ad quorum conftructiones adhibendæ funt fectiones conicæ, quæ, cum per coni dati fectionem prodeant, tanquam in folido datæ fupponuntur. Cumque præter rectam, circulum, & fectiones conicas, lineas alias in Geometriam recipere nollent; problemata plana & folida fola geometrica appellarunt, quemadmodum etiam lineas iftas folas geometricas dixerunt. Per alias vero lineas conftruenda problemata, mechanica vocarunt; ipfafque, quarum ope conftruuntur, lineas mechanicas nuncuparunt. Aft CARTESIUS, connubium Arithmeticæ cum Geometria introducens, cum videret fectiones conicas per æquationes definiri poffe algebraicas, & præter eas dari curvas innumeras alias, quæ per iftiufmodi æquationes definiuntur; hafce omnes illis æquiparavit & in Geometriam recipiendas effe intulit; in numerum mechanicarum rejectis, quæ æquationes iftiufmodi refpuunt. Invento autem calculo differentiali; cum curvæ, CARTESIO mechanicæ dictæ, non minus per æquationes differentiales definiantur, quam ceteræ per ordinarias, & ad conftructiones problematum utiliffimorum adhibeantur, quemadmodum in Mechanicis videbimus; his quoque aditus, in Geometriam factus. Unde multo amplior evafit fpeculationum geometricarum campus, qui a Veteribus intra nimis arctos limites coërcebatur. Sane inventa longe præclariffima ex Mathefi exularent, fi recentiores Geometræ veftigiis, vel Veterum, vel CARTESII, infiftere voluiffent.

§. 223. Non omnia problemata per rectam & circulum conftrui poffe, inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium inter duas datas, & trifectio anguli docuit; & ex æquationibus algebraicis, ad quas ducunt folutiones problematum, patet ratio. Quemadmodum enim æquationum quadraticarum conftructio pendet ab invenienda una linea media proportionali inter duas alias quomodocunque datas; ita conftructio cubicarum fupponit duas medias continue propor-

tionales, constructio biquadraticarum tres inveniendas & ita porro. In æquationibus puris hoc ipsum obvium est; in affectis non minus ostendi potest. Sufficiat nobis in gratiam tyronum id ostendisse in æquationibus puris. Æquatio quadratica pura est $x^2 = ab$. Patet hic esse

$$a : x = x : b$$

adeoque constructurus æquationem invenire debet mediam proportionalem inter a & b.

Æquatio cubica pura est

$$x^3 = a^2 b$$

---

adeoque $x^4 = a^2 b x$

$a^2 : x^2 = x^2 : bx$

Sit $bx = y^2$

erit $x : y = y : b$

& $a^2 : x^2 = x^2 : y^2$

$a : x = x : y = y : b$

Igitur $a. x. y. b$ sunt continue proportionales. Æquationem ergo cubicam puram constructurus, invenire debet duas medias continue proportionales inter datas a & b, quarum prima x est radix æquationis cubicæ puræ

Similiter æquatio biquadratica pura est

$$x^4 = a^3 b$$

Quare $a^3 : x^3 = x : b$

$= x^3 : bx^2$

Sit $bx^2 = y^3$

erit $a^3 : x^3 = x^3 : y^3$

$a : x = x : y$

& $x^2 : y^2 = y : b$

$= y^2 : by$

Sit $by = z^2$

erit $x^2 : y^2 = y^2 : z^2$

$x : y = y : z$

& $y : z = z : b$

Habemus adeo

$$a : x = x : y = y : z = z : b$$

consequenter $a. x. y. z. b$ sunt continue proportionales; & æquationem biquadraticam puram constructurus, invenire debet tres medias continue proportionales inter duas datas a & b, quarum prima x est radix æquationis. Intersectio rectæ & circuli nonnisi unam exhibet lineam mediam continue proportionalem inter duas. Quamobrem si plures inveniendæ supponuntur, sola rectæ ac circuli intersectione obtineri minime possunt. Hinc duarum inventio deduxit MENECHMUM ad intersectionem duarum parabolarum, quemadmodum vidimus supra (§. 218).

§. 224. Forsan autem non inutile erit, si hic exemplo aliquo ostendamus, quomodo inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium ad æquationes cubicas affectas deducat; ne quæ de extremis quomodocunque datis diximus obscura videantur, nec satis a tyronibus intelligantur. Sit igitur problema tale: *Data quatuor quantitatum continue proportionalium prima & differentia quartæ a secunda; invenire singulas.* Resolutio hæc erit.

Sit Quant. I $= a$ Quant. II $= x$

Differ. II & IV $= b$ III $= y$

erit IV $= x - b$

& per

& per conditionem problematis

$$a : x = x : y \qquad a : x = y : x - b$$

$$x^2 = ay \qquad xy = ax - ab$$

$$\frac{x^2}{a} = y \qquad y = \frac{ax - ab}{x}$$

adeoque

$$\frac{x^2}{a} = \frac{ax - ab}{x}$$

$$x^3 = ax^2 - a^2b$$

$$x^3 - ax^2 + a^2b = 0$$

Videmus itaque constructionem æquationis cubicæ affectæ dependere ab inventione duarum mediarum proportionalium inter duas extremas, quarum prima simpliciter datur, altera autem per differentiam a prima mediarum. Ad constructionem vero sese offerunt æquatio ad parabolam $x^2 - ay = 0$, & æquatio ad hyperbolam intra asymptotos $xy - ax + ab = 0$. Cum vero etiam sit $x : y = y : x - b$ adeoque $y^2 = x^2 - bx$, consequenter $y^2 - x^2 + bx = 0$; loco hyperbolæ intra asymptotos offert etiam sese hyperbola æquilatera.

Eodem modo ex sequente problemate liquet, quomodo inventio unius mediæ proportionalis ducat ad æquationem quadraticam affectam. Scilicet, *data quantitatum continue proportionalium prima & differentia tertiæ a secunda, invenienda sit secunda.* Sit itaque

Quantitas I $= a$ Quant. II $= x$
Differ. II & III $= b$ erit III $= x - b$
adeoque per conditionem problematis

$$a : x = x : x - b$$

$$x^2 = ax - ab$$

$$x^2 - ax + ab = 0$$

Non sine ratione addimus exemplum æquationis quadraticæ affectæ, propterea quod harum æquationem constructionum reduximus ad inventionem linearum reciprocarum (§. 265 *Anal.*); ne existiment tyrones veritati consentaneum non esse, quod eadem pendeat ab inventione mediæ proportionalis inter duas extremas quomodocunque datas. Poterant casus omnes æquationum cubicarum per inventionem duarum, casus vero omnes æquationum biquadraticarum per inventionem trium mediarum continue proportionalium illustrari; siquidem prolixioribus esse licuisset.

§. 225. Doctrina de numeris irrationalibus illustratur problemate 259 (§. 630 *Anal.*), in quo ostendimus, quomodo numerus irrationalis quicunque per lineam exprimatur; ut intelligatur, cur Veteres quantitates irrationales non in numeris, sed in continuo considerarent, unde oriuntur, adeoque eas ad Geometriam retulerint. Attentionem denique meretur usus constructionis æquationum ad curvas datarum, per combinationem locorum; cum hoc

pacto, ope curvarum inferioris generis, construi possint curvæ superioris; quemadmodum, ope parabolæ & circuli, construximus parabolam cubicam & circulum secundi generis. Etsi enim hæ constructiones sint molestiores, quam ut in usum recipiantur; sufficit tamen quod per easdem in curva, quæ descripta supponitur, quodvis punctum datum ad examen revocari possit, num rite fuerit determinatum; & saltem ex possibilitate constructionis pateat curvæ possibilitas.

§. 226. Satis ostendimus, quomodo in Elementis nostris Analyseos finitorum versari debeat, qui artem hanc intimius perspicere sibique familiarem reddere voluerit; quamvis longe plura annotare poteramus, si singula accuratius perpendenda proponere visum nobis fuisset, nec acquiescere voluissemus in speciminibus, quæ in aliis imitari poterit attentione sufficiente usus. Restat igitur ut doceamus, quomodo in Analysi infinitorum sit versandum. Initio tyrones non scrupulosiores esse debent in notione quantitatis infinite parvæ expendenda; modo notent eas non in se esse nihilum, sed tantummodo respectu aliarum pro nihilo haberi: quo facit scholion def. 2 (§. 5 *Analys. infin.*). Quodsi enim difficultates quædam supersunt, quæ assensum remorantur; eædem in progressu evanescent: tollentur autem penitus, ubi ea perpenderis, quæ in Metaphysicis de ente infinito Mathematicorum imaginario demonstrantur (§. 796 *& seqq. Ontol.*) Dudum Mathematici ex differentiis quæsivere quadrata & cubos; quemadmodum docuimus in applicatione calculi literalis ad Arithmeticam (§. 81 *& seqq. Anal.*). Inventum hoc ansam dedit LEIBNITIO investigandi methodum ex differentiis colligendi terminos seriei cujuscunque continue crescentis, vel decrescentis; cum ignoraret, id jam in literas fuisse relatum a D. MOUTON, Canonico Lugdunensi, ex observatione FRANCISCI REGNALDI, Lugdunensis; quemadmodum constat ex epistola LEIBNITII ad OLDENBURGIUM scripta, quæ legitur in *Commercio epistolico* D. JOANNIS COLLINS *& aliorum de Analysi promota*, jussu Societatis Regiæ Britannicæ in lucem edito, p. 32 *& seqq.* Calculum adeo differentialem primum exercuit in numeris, ubi differentiæ sunt finitæ, seu assignabiles. Cum deinde opus præclarum *de Quadratura circuli & sectionibus conicis* GREGORII A S. VINCENTIO, ab HUGENIO sibi commendatum, legeret, in quo differentiæ magnitudinum infinite parvæ considerantur, quarum summæ exhibent ipsas magnitudines; hæc observans in calculum differentialem incidit, de quo hic nobis sermo est; methodo *Cavaleriana*, qua felicissime usus GREGORIUS A S. VINCENTIO, ad calculum perducta. In hoc calculo

culo omnia pendent a differentiatione rectanguli xy. Quamobrem ad eam omnem attentionem afferre debent tyrones; ne in ceteris supersit ulla difficultas. Etenim si supponas, quomodo differentiale rectanguli xy inveniatur; nullo negotio cetera erues per Algebram communem; quemadmodum ostendimus tum in ipso problemate primo *num.* II. *& seqq.* tum in problemate secundo atque tertio. Constat lineam generari motu continuo puncti ab uno termino ad alterum, qualis est motus liquidi fluentis; unde a NEWTONO appellatur *Fluxus.* Constat etiam superficies istiusmodi motu linearum; solida vero motu superficierum gigni. Quodsi ergo ad genesin magnitudinum animum advertas; per ea, quæ ab EUCLIDE & ARCHIMEDE demonstrata sunt (§. 5 *Anal. infin.*), animadvertes, magnitudines crescere vel decrescere, per incrementa, vel decrementa inassignabilia, quæ ipsæ sunt quantitates infinite parvæ, cum quibus hic nobis negotium est, a NEWTONO, ad genesin magnitudinum respiciente, *Fluxiones* appellatæ; quemadmodum ipsas magnitudines, quæ hoc modo crescunt vel decrescunt, *Fluentes* vocat. Unde quantitatem differentiare, stylo *Newtoniano*, est invenire fluentis datæ fluxionem. Ut hæc rectius intelligantur; perpendant velim tyrones, si recta quædam AB, juxta ductum alterius rectæ AC, motu sibi semper parallelo atque æquabili, moveatur deorsum, dum interea punctum quoddam, motu quomodocunque accelerato, in ipsa recta AB, a termino A versus alterum B, progreditur; punctum describet lineam curvam AM, recta vero spatium curvilineum APM. Quodsi ponamus rectam ex P pervenire in p adeoque abscissam AP augeri incremento Pp; evidens est, eodem quo hoc accidit momento, semiordinatam PM augeri incremento mR, arcum AM incremento Mm, & spatium curvilineum APM incremento PpmM. Arcus adeo AM differt ab arcu Am, arculo Mm; semiordinata PM a semiordinata pm, particula mR; spatium curvilineum, sive area APM, ab area Apm, particula PpmM; dum differentia abscissæ AP ab abscissa Ap est Pp. Unde, stylo *Leibnitiano*, si in tempusculo infinite parvo incrementum Pp est inassignabile; hoc ipsum incrementum Pp dicitur differentiale abscissæ Ap, mR differentiale semiordinatæ PM, Mm, differentiale arcus AM, & tandem PpMm differentiale areæ APM: stylo autem *Newtoniano*, Pp abscissæ, mR semiordinatæ, Mm arcus, PpMm areæ, fluxio est. Atque adeo patet, cur calculus differentialis seu methodus fluxionum in Geometria sublimiori tantæ sit utilitatis: id quod ex ejus applicatione clarius elucescet. Incrementa abscissæ Pp generantur motu æquabili; adeoque æquali tempore, sive tempusculo, æqualia sunt: ast cum in-

Tab. III. Fig. 32.

 cremen-

crementa ſemiordinatæ *m*R eodem tempuſculo generentur motu inæquabili, & incrementa lineæ curvæ ſive arcus M*m*, atque areæ P*pm*M, motu mixto ex æquabili & inæquabili, ſingula inæqualia eſſe debent. Unde liquet in hoc calculo magnitudinis unius incrementum ſumi ut æquale, dum reliqua inæqualia ſunt, quæ ſimul generantur. Non autem neceſſe eſt, ut abſciſſa ponatur creſcere per incrementa æqualia; ſed ſumi etiam poſſunt momentanea incrementa magnitudinis alterius tanquam æqualia, quo caſu abſciſſa creſcit per inæqualia incrementa. Ponamus enim rectam AC æquabiliter moveri, motu ſibi ſemper parallelo, juxta ductum rectæ AB; dum interea punctum motu continuo accelerato in illa deſcendit; patet incrementa Q *q*, ſive R*m*, eodem tempuſculo æqualia eſſe debere; dum interea incrementa S*m*, ſive P*p*, inæqualia gignuntur. Hactenus dicta qui perpendit, is non modo animadvertet calculum differentialem niti methodo genetica, & rigorem acquirere ex demonſtratis ab EUCLIDE & ARCHIMEDE (§. 5. *Anal. infin.*); verum etiam, in applicatione hujus calculi ad Geometriam ſubliEmiorem, nihil deprehendet obſcuritatis.

Tab.III. Fig. 33.

§. 227. Ope calculi differentialis, tangentes curvarum facillime determinantur; hancque methodum, non modo ad omnes curvas algebraicas extendi patet ex formula generali, quam dedimus (§. 32 *Anal. infin.*), verum etiam eandem ad alias curvas, quæ mechanicæ non ſunt, applicari poſſe, exemplo ſpiralium, cycloidis, logarithmicæ & quadratricis DINOSTRATIS docuimus. Non opus hic eſt perplexis longiſque calculis; nec methodum hanc irrationales quantitates remorantur; ut adeo nihil in eadem deſiderari poſſit. Tota nititur ratione differentialium ſemiordinatæ ac abſciſſæ, quæ ſunt inter ſe in ratione ſemiordinatæ ad ſubtangentem; quemadmodum in reſolutione probl. 4 (§. 20 *Anal. infin.*) demonſtravimus. Quoniam enim quantitatibus proportionalibus infinite parvis ſubſtitui poſſunt aliæ finitæ; valor ſubtangentis, qua tangens determinatur, ex quantitatibus aſſignabilibus componitur. Artificio hoc uſus eſt BARROWIUS in ſua Tangentium methodo: quod ut appareat, exemplo parabolæ *Apollonianæ* perfacili docere lubet. Sit QN $=y$, AQ $=x$, PT $=t$. Sit ſemiordinata alia PM, & ei reſpondens abſciſſa AP, differentia earundem ſemiordinatarum adeo exigua, quantum deſideratur, & differentia abſciſſarum MR exiguæ parvitatis. Sit PQ $=$ MR $=e$, NR $=a$; erit PM $=y-a$, AP $=x-e$. Si parameter parabolæ fuerit p; habebimus Tab.III. Fig. 34.

$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$
$$\& \quad y^2 = px$$

adeoque $-2ay + a^2 = -ep$

$$2ay = ep \text{, ob } a^2 = 0$$

Eſt

Est vero $e : a = t : y$
& $e : a = 2y : p$

adeoque $t : y = 2y : p$

$t = 2y^2 : p$

Nemo non videt, si pro a substituas dy, & pro e ponas dx; prodire $2ydy = pdx$ & $t = \frac{ydy}{dx}$. Unde resultat $t = \frac{2y^2}{p}$: Methodus itaque *Barrowiana* tangentium a præsenti, quam proponimus, non differt; & calculus, quo utitur BARROWIUS, non differt a calculo differentiali, nisi characteristica. Hæc sane ratio est, cur JACOBUS BERNOULLI primum existimaret calculum differentialem LEIBNITII non differre a *Barrowiano*; & Dn. DE TSCHIRNHAUSEN contenderet, calculum differentialem *Barrowiano* ortum suum debere; præsertim cum LEIBNITIUS, ubi eundem in Actis Eruditorum primum publicavit, non nisi ad methodum de maximis & minimis, quæ specialis casus est methodi tangentium, applicaret. Enimvero cum usus calculi differentialis in problematis magis arduis solvendis conspiceretur; aliter de eodem sentire cœperunt Geometræ, ipse etiam HUGENIUS, qui sibi persuadebat, aliis methodis detecta tantummodo aliter exprimi hoc calculo.

Tab.III. Fig. 35. §. 228. Methodus *Barrowiana* nititur artificiis CARTESII in determinanda tangente curvarum, & principiis Geometriæ indivisibilium CAVALLERII, atque Algebræ ordinariæ. Etenim si curva AMNO secatur recta TO, erit NR : MR = PM : TP, quemadmodum demonstravimus in resolutione probl. 4. (§. 20). Quamobrem si sit NR $= a$, MR $= e$, PM $= y$, TP $= t$; erit $a : e = y : t$, & ex. gr. ex natura parabolæ, cujus parameter p,

$$y^2 = px$$
$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$

$$-2ay + a^2 = 0 - ep$$

Quod si semiordinatæ PM & QN continuo propius ad se invicem accedant, ut differentiæ semiordinatarum NR & abscissarum MR, sive PQ, tandem degenerent in partes infinite parvas, seu momentanea incrementa; recta MN degenerat in arculum cognominem, TN degenerat in tangentem & TP in subtangentem. Tum vero ex principiis Geometriæ indivisibilium $a^2 = 0$ respectu $2ay$, & ep; & $y - a$ atque y habentur pro æqualibus in contactu. Unde habemus:

$$-2ay = -ep$$
seu $2ay = ep$
& $a : e = (y : t)\, p : 2y$

quemadmodum ante (§. 227).

Ad methodum *Barrowianam* si applicatur vera characteristica infinitesimarum, seu quantitatum infinite parvarum, sine qua algorithmus infinitesimalis non subsistit, qui est ipse sic dictus calculus differentialis; prodit

prodit methodus tangentium, quam hic applicamus. Ope autem hujus calculi, non modo expedita redditur, verum etiam extenditur, ut ultimum suum complementum ab eodem accepisse dicenda sit. Obiter hic annotamus, quando quæstio est de inventore calculi differentialis, id potissimum quæri, quinam primus Algorithmum quantitatum infinite parvarum invenerit, & in solvendis problematis exercuerit; cum antea adhiberetur calculus literalis communis, & vi principiorum Geometriæ indivisibilium, termini quidam expungerentur respectu ceterorum evanescentes. Similis quodammodo est hæc quæstio alteri communi, qua quæritur, quinam sit inventor veræ characteristicæ numerorum & Algorithmi communis, quo hodie utimur in Arithmetica, tanta calculi commoditate & amplitudine. Habuere Veteres numerorum signa, sed parum apta. Usi iisdem sunt in Arithmetica practica. Non tamen ideo dici potest, quod habuerint veram numerorum characteristicam, & Arithmeticam practicam talem, qualem nunc habemus; nec quisquam hodie inventis notis numericis, quorum significatus ex ipsa numerorum natura deductus, aliis quam hisce signis uti vult: quemadmodum nec hodie inventa vera characteristica quantitatum infinite parvarum, qua calculus infinitesimalis in Analysin introductus, ut per modum Algorithm. exerceri possit, quisquam calculum literalem communem adhibere mavult in solvendis problematis, quorum solutio a quantitatibus infinite parvis pendet. Equidem ex ore ipsius Dn. de Tschirnhausen hausi, quod contenderet, se per Algebram communem eadem præstare posse, quæ per calculum differentialem adeo feliciter eruuntur; nec calculum hunc esse veram methodum, sed tantummodo veræ methodi compendium; qualia complura, immo, ut ipse confidenter admodum loquebatur, infinita excogitari possint, hocque sese ostensurum in secunda parte Medicinæ Mentis; nunquam tamen dictis fidem fecit, quin potius morti vicinus Schedas suas Manuscriptas Vulcano tradidit, ne publicum statueret, quo successu in vera, quam pollicebatur, methodo detegenda fuerit versatus, & quousque fuerit progressus. Constat autem ex iis, quæ dedit in Actis Eruditorum, quod nimia in se ipsum confidentia de iis, quæ animo versabatur, locutus fuerit, quasi a se jam essent inventa; etsi re penitius examinata impossibilia deprehenderentur. Ostendi in Arithmetica, calculum numerosum ita institui posse, ut conservetur universalitas, quemadmodum in literali, & hoc pacto inveniri per calculum numerosum, quæ per literalem eruuntur. Ostendi superius, quomodo Algebra numerosa ad solvenda problemata geometrice applicari possit, ut prodeant formulæ algebraicæ geometrice

metrice construendæ (§. 194). Immo ostendi, quomodo, retenta communi linearum designatione, regulæ Algebræ ad solutiones problematum geometricorum applicari potuerint (§. *cit.*). Ecquis vero dixerit, si quis hoc fecisset, ante inventam Arithmeticam literalem, eum jam habuisse Algorithmum universalem & Algebram speciosam? Immo si hanc methodum ad tractandas curvas adhibuisset; ecquis dixerit, eum habuisse methodum CARTESII tractandi curvas per æquationes algebraicas? Habuisset similem quandam methodum, sed non eandem; ut adeo in multis paria præstare potuisset, ast non eadem facilitate. Ars characteristica differt a methodo, &, pro illius diversitate, hæc prorsus aliam induit formam; ita ut non modo facilius præstentur, quæ fieri debent, verum etiam plura in potestate sint, quam si alia characteristica adhiberetur. Patebunt hæc clarius, ubi Ars inveniendi ad formam artis fuerit redacta, quemadmodum Logica; & qui ad diversitatem methodorum, prouti hæ per Artem characteristicam modificantur, animum adverterit, prouti in hac commentatione inculcamus, eadem perspiciet. Talia autem observasse non tantum proderit ei, qui Artem inveniendi ad formam artis reducere voluerit; sed etiam ei, qui in Mathesi addiscenda ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut methodos, quæ ipsi innotuerunt, limare, iisdemque omnem suam amplitudinem tribuere possit, quam suscipere valent; ne a casu expectandum sit, quod artis est, usu facultatum huc requisito non occasione sponte oblata, sed ex scientia determinato; nec tentaminibus subjiciatur, quod certa lege regitur. Nihil hic asserimus, quod non obvium sit ei, qui in Mathesi addiscenda præscripto a nobis modo fuerit versatus. Multa hic annotare poteramus, siquidem prolixioribus esse liceret, nec a præsenti instituto digressio longior videretur aliena.

§. 229. Notandum vero est, formulas algebraicas, quæ pro subtangente prodeunt, geometrice esse construendas, siquidem tangentem curvæ actu ducere volueris. Omittimus istas constructiones, brevitatis gratia; propterea quod in Analysi finitorum satis perspicue docuimus, quomodo istiusmodi formulæ construantur. Tyronibus tamen, quorum est exercere artem, eædem negligendæ non sunt. Ex. gr. subtangens ellipsis est $\frac{ax-x^2}{\frac{1}{2}a-x}$ (§. 25 *Anal. infin.* Est itaque

$$\tfrac{1}{2}a-x : a-x = x : PT$$
h. e. PC : PB = AP : PT Tab. III. *Fig.* 36.

Quodsi ergo fiat PQ = PC & PR = PB, ductæque rectæ AQ agatur parallela TR; erit

PQ : PR = AP : PT
h. e. PC : PB = AP : PT

adeo-

adeoque ſubtangens PT rite determinata, conſequenter TM tangens quæſita.

Quoniam ſubtangens pro omnibus ellipſibus in infinitum

$$\frac{(m+n)(ax-x^2)}{ma-mx-nx} = \frac{ax-x^2}{ma:(m+n)-x}$$

habemus:

$$\frac{ma}{m+n} - x : a - x = x : PT$$

Patet itaque non abſimili modo tangentem pro omnibus ellipſibus in infinitum determinari poſſe. Et quia pro circulo eadem ſubtangentis formula reperitur, quæ pro ellipſi *Apolloniana*; & pro infinitis circulis eadem formula, quæ pro ellipſibus infinitis; niſi quod iſthic $n = 1$; eodem etiam modo tangens omnium circulorum in infinitum determinatur. Immo cum formula ſubtangentis hyperbolarum a formula ſubtangentis ellipſeos non differat niſi ſignis; tangens etiam hyperbolarum in infinitum non abſimili modo determinatur. Subtangens curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$, eſt

$$\frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay} = \frac{y^3 - \frac{1}{3}axy}{x^2 + \frac{1}{3}ay}.$$

Habemus itaque

$$x^2 + \tfrac{1}{3}ay : y^2 - \tfrac{1}{3}ax = y : PT$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x = y : PT$$

Tab. III. Fig. 37. Quantitates $\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$ & $\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$ concinna admodum conſtructione reperiuntur hunc in modum. Fiat $CA = \frac{1}{3}a$; ſitque $AP = x$, $PM = y$. Erigatur in A perpendicularis AN ipſi PM æqualis, ſeu conſtruatur parallelogrammum rectangulum APMN. Ducta recta CN erigatur ad eandem perpendicularis NR. Erit $PR = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$. Eſt enim

$$CA : AN = AN : AR$$

$$\tfrac{1}{3}a : y = y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } PR = AR - AP = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x.$$

Fiat porro AO=CA, ductaque OP erigatur PS ad eandem perpendicularis occurrens ipſi NA ultra rectam CP continuatæ in S. Erit $NS = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$. Eſt enim $AO : AP = AP : AS$

$$\tfrac{1}{3}a : x = x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } NS = SA + AN = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y.$$

Quodſi curva ſupponatur data ſeu in plano deſcripta, datis jam NS & PR ſubtangens nullo negotio determinatur.

§. 230. Quoniam normalis ad tangentem perpendicularis; tangens quoque determinatur per normalem; conſequenter etiam per ſubnormalem, per quam normalis determinatur. Subinde ſubnormalis per conſtructionem faciliorem reperitur; adeoque præſtat tangentem determinare

minare per normalem, quam per subtangentem. Exemplum habemus in circulo, ubi radius ad tangentem perpendicularis; quemadmodum per præsentem quoque methodum calculo eruitur (§. 38 *Anal. infin.*); vi cujus subnormalis reperitur distantiæ semiordinatæ a centro æqualis; adeoque datur, data abscissa, cum subtangens eandem requirat constructionem, quam Ellipsis exigit (§. 229). Enimvero subinde etiam subnormalis postulat constructionem magis compositam quam subtangens; subinde utraque eadem simplicitate gaudet. Illius exemplum præbet ellipsis; hujus vero curva, ad quam est æquatio $y^3 - x^3 = axy$. Etenim in Ellipsi est (§. 40 *Anal. infin.*).

Tab. III. Fig. 38.

$$ax - x^2 : y^2 = \tfrac{1}{2}a - x : PH$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PH$$

Fiat itaque AQ = PM = y, & in Q erigatur perpendicularis QN rectæ per A & M ductæ in N occurrens; erit QN $= \frac{y^2}{x}$.

Est enim

$$AP : PM = AQ : QN$$

$$x : y = y : \frac{y^2}{x}$$

Continuetur PM in O, donec PO = QN, & ex centro C ducatur recta RC ipsi OB parallela, erit PR subnormali æqualis. Est enim

$$PB : PO = PC : PR$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PR$$

Quare si fiat PH = PR, habebis subnormalem, eritque HM normalis quæsita. Hanc constructionem si cum ea conferre volueris, quam pro subtangente dedimus (§. 229); patebit eam esse magis compositam. Subnormalis curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$ reperitur

$$= \frac{x^2y + \tfrac{1}{3}ay^2}{y^2 - \tfrac{1}{3}ax}$$

Habemus itaque

$$y^2 - \tfrac{1}{3}ax : x^2 + \tfrac{1}{3}ay = y : PH$$

$$\frac{y^2}{\tfrac{1}{3}a} - x : \frac{x^2}{\tfrac{1}{3}a} + y = y : PH$$

Analogia hæc ab altera, quam pro subtangente elicuimus (§. 229), non differt, nisi quod termini in ratione priori invertantur; consequenter constructio eadem fere manet, nec simplicior est pro subnormali, quam pro subtangente.

§. 231. Methodus determinandi asymptotos curvarum nititur principio reductionis. Asymptoti enim considerantur instar tangentium in puncto a vertice infinito intervallo distante, ut abscissa eidem respondens sit infinita; consequenter axis a habeat ad eandem rationem inassignabilem; adeoque fiat respective nihilum. Hanc suppositionem a veritate non recedere, tyrones inde intelligunt, quod in hac hypothesi errantur eædem quantitates linearum, per quas asymptoti determinantur, quas supra in Analysi finitorum aliter demonstravimus. Novarum enim me-

thodorum examina haberi debent, ſi applicentur ad jam nota. Ceterum attendant tyrones ad differentiam, quæ inter abſolute nihilum, ſeu nihilum verum, & inter reſpective nihilum, ſeu quod reſpectu quantitatis alterius pro nihilo habetur, intercedit. Etenim ſi qua quantitas per abſolute nihilum multiplicatur, nihilo æqualis eſt: ſed quæ ducitur in reſpective nihilum non evadit nihilo æqualis. Hinc (§. 47 *Anal. infin.*) in valore $ax : (a+2x)$, recta a non quidem auget valorem rectæ $2x$, ut adeo ſit $a+2x=2x$; attamen non efficit ax nihilo æquale; ſed hoc factum ſpectatur tanquam quantitas a infinities ſumta, quia a quantitas finita, x infinita. Idem patet in æquatione $ay^2=bx(a+x)$, quæ, quia a reſpective nihilum, reducitur ad æquationem $ay^2=bx^2$. Unde ſimul liquet, ſi ſumatur $ay^2=abx+bx^2$, cur infinitum primi gradus abx habeatur pro nihilo, reſpectu infiniti ſecundi gradus ay^2 & bx^2; quippe quod infinitum primi gradus infinities ſuperat, quemadmodum infinitum primi gradus quantitatem finitam. Non nego, hæc in numerum fictionum referenda eſſe; ſunt tamen toleranter vera, ut cum JUNGIO loquamur, & in calculo, quemadmodum fictiones aliæ, utiliter adhibentur. Cavendum itaque, ne in præjudicium veritatis talia in Phyſicam inferantur principia, ex qua imaginaria exulare debent; quippe ubi in veras phænomenorum cauſas inquirimus.

§. 232. Attentionem quoque peculiarem meretur problema 7 (§. 49 *Anal. infin.*) in quo ſubtangens & ſubnormalis in conchoide determinatur. Curva hæc ex numero algebraicarum eſt: unde ſemiordinatæ ejus ſumi poſſunt ad axem AB normales. Habet vero eadem etiam polum C: unde pro ſemiordinatis Tab. I. Analyſ. infin. Fig. 5. quoque haberi poſſunt rectæ CM ex polo C ad punctum curvæ M ductæ. Quamobrem duplicem explicamus methodum determinandi ejus tangentem & normalem. Prima eadem eſt, qua utimur in curvis algebraicis ceteris; niſi quod valor ipſius dx non ex æquatione ad curvam, ſed aliis artificiis eruatur; ne formulæ pro ſubtangente & ſubnormali prodeant nimis perplexæ, conſtructionem minus concinnam parientes. Formula autem pro ſubnormali expeditior eſt, quam pro ſubtangente, adeoque in conſtructione præferenda. Cum enim ſit ſubnormalis $= t + \frac{z^2-az}{v} = t + \frac{(z-a)z}{v}$; erit

$$v : z = z-a : \frac{z^2-az}{v}$$

$$PB : MC = QC : \frac{z^2-az}{v}$$

cui ſi addatur PC $= t$; prodibit ſubnormalis. Formula ſubtangentis $\frac{v(z^2-t^2)}{z^2-az+tv} = \frac{z^2-t^2}{\frac{z^2-az}{v}+t}$

reſol-

refolvitur in hanc analogiam:

$$\frac{z^2 - az}{v} + t : z + t = z - t : PT$$

Atque adeo patet, fi formula fubtangentis conftruenda, ante inveniendam effe fubnormalem. Data autem fubnormali, datur etiam tangens, ut adeo ulteriori conftructione non habeamus opus. Altera methodus nititur hypothefi femiordinatarum in puncto quodam concurrentium, quam ideo addere vifum eft, ut idea ejus animo ingeneretur ad alia profutura.

§. 233. Notanda vero funt artificia, quibus fubtangens determinatur in iis curvis, quarum femiordinatæ in puncto quodam coëunt. Nimirum quia, in curvis algebraicis, fubtangens intercipitur inter tangentem & femiordinatam; in puncto communi concurfus excitatur perpendicularis, tangentem, cui occurrit, fecans, quemadmodum videre eft in methodo altera pro conchoide & in methodo pro fpiralibus. In cycloide fubtangens determinatur per interfectionem tangentis cycloidis & tangentis circuli genitoris; quia portio illa tangentis intercipitur inter femiordinatam & tangentem cycloidis, etfi ad illam non fit perpendicularis; ut adeo hic a fignificatu termini tantifper recedatur, quem is in curvis algebraicis habet; quemadmodum etiam non retinetur fignificatus prorfus idem femiordinatæ, ubi eædem in puncto quodam concurrunt. Nimirum definitiones terminorum inventæ funt pro curvis algebraicis; deinceps per analogiam quandam aptantur ad curvas alias termini, ut in iifdem proprias fibi nancifcantur definitiones. Abfit itaque, ut tibi perfuadeas, ipfos Geometras alere fignificatum terminorum vagum. Ita fubtangentem cycloidis definire licet per portionem tangentis circuli, in puncto interfectionis circuli & femiordinatæ cycloidis, inter femiordinatam & tangentem cycloidis interceptam; & cum definitiones nominales fint arbitrariæ, utique hoc facere licet. Nec ideo dicere licet, quod vocabulum *Subtangens* varios habeat fignificatus. Subtangens enim cycloidis non eft fubtangens curvarum fimpliciter ita dicta. In quadratrice DINOSTRATIS, abfciffa fumitur in circulo genitore, & portio radii quadratricem fecantis pro femiordinata. Quoniam hic recta ad femiordinatam perpendicularis cum tangente in puncto contactus concurrit, quæ adeo extra ipfum eam non fecat, ideo neceffarium fuit, ut eo, quem explicavimus (§. 55 *Anal. infin.*) modo determinaretur. Ad hoc animum probe advertere debent tyrones, ne notione fubtangentis confundantur, ubi ipfimet tangentes in curvis non algebraicis determinare voluerint.

§. 234. Methodus de maximis & minimis nititur principio reductionis: maximæ enim & minimæ applicatæ redu-

reducuntur ad caſum tangentium. Et ſimiliter applicatio hujus methodi ad problemata particularia eodem principio nititur; quatenus quantitatum ſeries ad certum quendam terminum continuo creſcentium vel decreſcentium, deinceps rurſus decreſcentium vel creſcentium exponitur per ſemiordinatas curvæ cujuſdam algebraicæ, in qua ſemiordinatæ eandem conſtantem relationem habent ad abſciſſas, quæ convenit quantitatibus creſcentibus vel decreſcentibus. Ex. gr. Si linea recta ita ſecanda, ut rectangulum ex ſegmentis ſit maximum eorum, quæ hac ratione conſtrui poſſunt; conſtans relatio quantitatis continuo creſcentis uſque ad terminum maximum exprimitur per factum ſegmentorum in ſe invicem. Quamobrem ſi ſegmentum minus ſumas pro abſciſſa; problema hoc reducitur ad circulum, in quo maxima ſemiordinata determinanda.

§. 235. Ut ideam calculi ſummatorii, qui vulgo integralis dicitur, animo concipiant tyrones; repetendum eſt ex ſuperioribus, magnitudines creſcere per momentanea incrementa. Nimirum ſi tempuſculo quodam abſciſſa augetur incremento P*p*, ſemiordinatæ accedit incrementum *m*R, arcui incrementum M*m* & areæ incrementum P*pm*M. Unde ſi abſciſſa AP $= x$, conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis ſucceſſivis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dx, ita ut ſumma omnium dx ſive $\int dx = x$; Similiter ſemiordinata PM $= y$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dy, ita ut ſumma omnium dy ſive $\int dy = y$; Arcus AM $= v$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis, quorum unumquodque dv, ita ut $\int dv = v$; & area APM conſtare concipitur ex innumeris iſtiuſmodi areolis, quarum unaquæque, quemadmodum oſtendimus, exprimitur per ydy, ita ut ſumma omnium iſtarum areolarum ſive $\int ydy$ ſit areæ æqualis. Calculo adeo ſummatorio quæritur ſumma omnium incrementorum momentaneorum, ut habeatur magnitudo, cujus incrementum indefinite datur. Quamobrem ſi valor incrementi exprimatur per relationem, quam habet ſemiordinata ad abſciſſam; per ſummationem reperitur valor ſemiordinatæ, arcus, & areæ curvæ datæ. Ex. gr. in parabola $dy = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx$. Quare $\int \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx = a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$ eſt ſemiordinata parabolæ. Similiter in circulo $dy = \frac{1}{2} (a - 2x)\, dx\, (ax - x^2)^{-1:2}$. Quare $\int \frac{1}{2} (a - 2x)(ax - x^2)^{-1:2} dx = (ax - x^2)^{1:2} = \sqrt{(ax - x^2)}$ eſt ſemiordinata circuli. Et in hyperbola intra aſymptotos $dy = ax^{-2} dx$. Quare $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ eſt ſemiordinata hyperbolæ intra aſymptotos. Patet adeo per calculum ſummatorium reſtitui quantitatem variabilem, cujus differentia-

Tab. III. Fig. 32.

rentiatione prodiit magnitudinis elementum, seu momentaneum in ejus genesi incrementum. Unde Angli methodum fluxionum inversam vocant, quia ex data fluxione reperitur fluens, quemadmodum per directam ex fluente fluxio. Regressus autem iste non ubivis obvius est. Unde hodienum Mathematicorum ingenia exercet. Constabit autem ex problematis physico-mechanicis, qualia exempli loco in Mechanica dabimus, solutiones problematum sæpe nos deducere ad æquationes differentiales, quarum integratione detegitur natura curvæ; vel, ubi hoc fieri nequit, ope æquationum differentialium curvæ construuntur. Ope igitur hujus calculi multa in potestate sunt, ad quæ alias non pateret aditus. Ceterum tyrones ad exemplum trianguli, quod primo loco (§. 101 *Anal. infin.*) exhibuimus, animum probe attendant; ut non modo idea methodi quadrandi curvas in eodem nascatur, verum etiam dubium evanescat, quasi ex neglectu trianguli characteristici oriri debeat in summatione error assignabilis: quod ubi fieret, impossibile erat, ut prodiret area trianguli tanta, quantam esse debere demonstratur in Elementis Geometriæ. Præstantia autem hujus calculi inde elucescit, quod paucis lineis non modo exhibeatur quadratura parabolæ *Apollonianæ*, sed & omnium parabolarum, & curvarum ipsis agnatarum in infinitum; cum methodo *Archimedea* difficillime eruatur tantummodo prior.

§. 236. Cum nobis proposuerimus exemplis potius docere regulas, quam earum multitudine obruere memoriam tyronum, præceptis omnibus in unum locum congestis, antequam ad exempla accedatur; quæ de quantitate in summatione adjicienda tenenda sunt, exemplo quadraturæ segmenti parabolici inculcare lubuit (§. 107 *Anal. infin.*): ita enim ratio, cur adjicienda veniat, clarius percipitur, manifestior in casu particulari, quam si generalis detur. Ratio nimirum generalis est, quod in differentiatione, cum differentiale quantitatum constantium sit $= 0$; quantitates constantes in composita variabilibus adjectæ evanescant; ita ut idem sit differentiale quantitatum $x + a$ atque x, & quantitatum $x - a$ atque x. Est enim & $d(x+a) = dx$, & $d(x-a) = dx$ & differentiale ipsius $x = dx$. Unde in summatione, summæ adjiciendum, quod in differentiatione evanuit. Quomodo vero appareat, utrum aliqua quantitas constans sit adjicienda, nec ne; & num ea, quæ adjicienda venit, signum habere debeat positivum, an privativum; in exemplo particulari multo clarius elucet, quam si idem generaliter doceri deberet. Vidimus Tab. II. in doctrina de locis geometricis, Fig. 22. initium abscissæ non modo statui posse in vertice A, ubi cum abscissa evanescit etiam semiordinata, eva-

evanescit arcus, evanescit spatium curvilineum, abscissa, semiordinata, & arcu contentum; verum etiam in puncto L infra verticem, vel in puncto N ultra eundem. Per hoc ipsum vero non variatur elementum abscissæ Pp, quod in omni casu idem est. Ne igitur in summatione obscurum sit, quod de quantitate adjicienda hic præcipitur; probe perpendant velim tyrones, quæ in scholio (§. 108 *Anal. infin.*) habentur. Inventores talia non animadverterunt, nisi ubi animum ad solutionem particularium applicarunt; neque enim methodi repertæ sunt, nisi dum solutiones problematum tentatæ ad easdem deduxerunt inventores. Quamobrem qui Analysi, tertii cognitionis gradus acquirendi gratia, operam navat, eadem via incedere debet, quam calcarunt Inventores; utut evitentur avia, in quæ haud raro inciderunt, cum in terris adhuc incognitis versarentur, antequam in viam regiam pervenirent. Ea quoque de causa, non dedimus nisi particularium problematum solutiones; etsi facillimum fuisset generales huc transcribere. Neque enim existimandum est, generales solutiones fuisse particularibus priores; sed illæ potius ex his enatæ sunt. Plerumque majoris artis est solvere problemata in casu particulari, quam universaliter.

§. 237. Quadraturam parabolarum omnium, immo curvarum aliarum eisdem agnatarum in infinitum, nullo negotio dari per calculum integralem patet (§. 103, 105 *Anal. infin.*). Curvæ autem ceteræ, quas deinceps quadramus, tum etiam segmenta parabolica, quæ quadrantur, reducuntur ad parabolas; sive elementum per se non integrabile, juxta canones generales, reducatur ad integrabile, terminis finitis aut nonnisi uno constans; sive resolvatur in seriem infinitam, quæ terminos numero infinitos habet. Etenim in casu priore, area curvæ reducitur ad areas tot parabolarum, quot sunt termini; in casu posteriori autem ad areas parabolarum infinitarum; quemadmodum, in Geometria elementari, figurarum rectilinearum, & ipsius circuli areæ reducuntur ad areas triangulorum. Ex. gr. ubi segmentum parabolicum, cujus elementum est $dx\sqrt{(ab+ax)}$ quadrare jubemur, $dx\sqrt{(ab+ax)}$ reducimus ad $2v^2 dv:a$. Quodsi dv sumatur pro differentiali abscissæ & v pro abscissa, erit $\frac{2v^2}{a}=z$, adeoque $v^2=\frac{1}{2}az$. Unde liquet segmentum parabolicum quadrandum reduci ad parabolam externam, cujus parameter est $\frac{1}{2}a$, seu dimidio parametri parabolæ æqualis, cujus segmentum quadrandum. Similiter patet aream curvæ CARTESII (§. 111 *Anal. infin.*) esse differentiam arearum parabolæ externæ *Apollonianæ*, ad quam $x^2=bz$, & parabolæ externæ secundi generis, ad quam $x^3=b^2v$. Non absimili modo patet, in elemen-

elemento hyperbolæ intra aſymptotos $dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ &c. in termino primo ſemiordinatam eſſe $= 1$, in ſecundo $= x$, in tertio, ſi $1 = a$, eſſe $x^2 = ay$, in quarto $x^3 = a^2y$, in quinto $x^4 = a^2y$ &c. conſequenter terminum primum eſſe elementum parallelogrammi rectanguli, ſecundum elementum trianguli æquicruri, tertium parabolæ externæ *Apollonianæ* ſeu primi generis, quartum elementum parabolæ externæ ſecundi generis, quintum elementum parabolæ externæ tertii generis & ita porro in infinitum. Quadratura igitur hyperbolæ reducitur ad quadraturam parallelogrammi rectanguli, trianguli æquicruri & infinitarum parabolarum. Inde eſt quod hyperbolæ & circuli quadraturam per infinitas parabolas demonſtraverit GUIDO GRANDUS. Equidem, data hyperbolæ area intra aſymptotos, datur etiam area interna inter axem & curvam interjacens; placuit tamen (§. 123 *Anal. infin.*) etiam oſtendere, quomodo area interna quadretur. Enimvero patet quadraturam areæ intra aſymptotos eſſe ſimpliciorem quadratura internæ, in qua $\sqrt{ax}$ ducenda eſt in ſeriem infinitam.

§. 238. Exemplo circuli docuimus (§. 124 *Anal. infin.*) quadraturam non uno modo abſolvi poſſe. Quadravimus enim circulum, ex dato ſinu verſo, ex dato ſinu complementi, & ex tangente. Notanda hic ſunt artificia, quibus progreſſus terminorum in infinitum redditur conſpicuus: id quod inprimis oſtendimus in quadratura *Newtoniana*. Artificia etſi eadem ſint, quibus jam in Analyſi infinitorum uſi ſumus; ſcilicet ut in numeris conſervetur univerſalitas calculi, & ut terminus ſequens efficiatur dependens ab antecedente; applicatio tamen eorundem non ſtatim cuivis ſuccurrit. Unde memini quoſdam ſeriem *Leibnitianam*, aut, ſi mavis, *Gregorianam*, pro circulo prætuliſſe *Newtonianæ*, quæ tamen citius convergit, ſeu celerius appropinquat; quod illa conſtantem ſervet legem, in hac vero termini nulla certa lege progrediantur; etſi *Newtoniana* non modo manifeſtam legem admittat, qua termini in infinitum progrediuntur, verum etiam hoc habeat, ut terminus quilibet ſequens ex proxime antecedente inveniri poſſit. Id potius attentionem tyronum meretur, quod quadratura *Newtoniana* exhibeat quadraturam ſegmentorum circuli, *Leibnitiana* vero quadraturam ſectorum; atque adeo hæc inſinuet ideam quadrandi ſectores curvarum, quæ centrum habent, animo jam obverſata ARCHIMEDI, dum circuli aream ad aream trianguli reduxit; quemadmodum clariſſime docuit KEPLERUS in *Stereometria dolii Auſtriaci.* Notandum porro eſt, quod docuit LEIBNITIUS in *Actis Eruditorum* An. 1682, p. 45, cum termini $\frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}$, &c. itemque termini $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}$,

$\frac{1}{11}$,

$\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{19}$, &c. progrediantur in progreſſione harmonica; aream circuli eſſe differentiam duarum ſerierum progreſſionis harmonicæ. Præterea, ſi binos quoſque terminos ad eandem denominationem reducas; quia $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$, $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}=\frac{2}{99}$, $\frac{1}{13}-\frac{1}{15}=\frac{2}{195}$, $\frac{1}{17}-\frac{1}{19}=\frac{2}{323}$ &c. area circuli, quadrato diametri exiſtente 1, erit $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}+\frac{2}{195}+\frac{2}{323}$ &c. in infinitum. Jam ſi diameter circuli $=1$, erit ſemidiameter $=\frac{1}{2}$, adeoque quadratum inſcriptum $=\frac{1}{2}$ (§. 21 *Trigon.*). Quoniam itaque quadratum circumſcriptum eſt inſcripti duplum, ſi quadratum inſcriptum fuerit $\frac{1}{4}$, erit circumſcriptum $\frac{1}{2}$, adeoque area circuli $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{39}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}$ &c. in infinitum (§. 181 *Arithm.*). Statim patet 3, 35, 99 eſſe numeros quadratos unitate mulctatos, nempe $4-1$, $36-1$, $100-1$; & inter quadratum 4 & 36 interjacere tres numeros quadratos 9, 16, 25; ſimiliterque inter 36 & 100 interjacere tres 49, 64, 81. Quodſi ſeriem pro circulo continues, & cum numeris in Tabula quadratorum numerorum compares; videbis eam conſtante hac lege progredi, ut denominator fractionis ſit quartus quiſque numerus excerptus ex ſerie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, numeratore ſemper exiſtente unitate. Quando vero quadratum inſcriptum $\frac{1}{4}$, radius eſt $\sqrt{\frac{1}{8}}$ (§. 21 *Trigon.*), adeoque diameter $=2\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{4}{8}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Hæc ideo monemus, ut diſcant tyrones dari etiam artificia particularia legem progreſſionis terminorum in infinitum detegendi, præter generalia, de quibus diximus ante: quamvis iſtiuſmodi quoque artificiis jam uſi fuerimus in inveniendo generali theoremate pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Anal. infin.*). Neque enim inutile eſt eadem artificia variis exemplis illuſtrari.

§. 239. Quemadmodum vero quadraturæ curvarum per ſeries infinitas reducuntur ad quadraturam infinitarum parabolarum; ita quoque curvarum aliarum quadratura ad quadraturam circuli atque hyperbolæ reduci ſolent: id quod non uno modo fieri ſolet. Exemplum habemus in ellipſi (§. 126 *Anal. infin.*), ubi ratio areæ ellipticæ ad aream circuli ſua veluti ſponte ſeſe offert. Exempla alia præbent cyclois, ciſſois, ſpiralis *Archimedea*. Non ſine ratione addidimus hanc reductionem, cum eadem utamur in altioribus; prouti ſuo loco conſtabit in Mechanicis, ubi problemata phyſico-mechanica ſolvuntur. Probe autem notandæ ſunt hæ reductiones iis, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, ut vim principii reductionis per omnem Artem inveniendi utiliſſimi rectius percipiant. Ceterum eodem inſtituto, (§. 147 *Anal. infin.*) rectificationem parabolæ reducimus ad quadraturam hyperbolæ: id quod ideo attentionem meretur, ut diſcamus ſubinde ſummationem

nem ejusdem elementi dependere, & a quadratura curvæ, & a rectificatione arcus cujusdam. Habet enim hoc usum non contemnendum in methodo tangentium inversa, ubi æquationes differentiales construere jubemur, supposita curvæ cujusdam quadratura, vel rectificatione arcus. Exempla occurrunt in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvimus. Quodsi enim tempestive animum advertamus ad talia, quæ in progressu usum præclarum habent; quæ alias difficilia videntur, facilia evadunt, nec perturbatur animus, quando applicantur ea, quorum idea nobis jam familiaris evasit; præsertim cum haud raro insolita, nondumque perspecta videantur, quæ ex anterioribus nota esse poterant, si attentione sufficiente in iisdem usi fuissemus.

§. 240. Rectificatio curvarum, perinde ac inventio sectorum ellipticorum & hyperbolicorum, interdum requirit calculos admodum prolixos. Ne igitur prolixitate tyrones reddderentur perplexi, & a solutione problematis deterrerentur; calculos integros admodum distincte explicatos exhibuimus. Consulent autem sibi tyrones, si initio generalem quandam ideam solutionis animo concipiant; veluti quod in rectificatione arcus elliptici (§. 172 *Anal. infin.*) primum quæratur valor ex æquatione ad curvam, deinde tam ex numeratore, quam denominatore, in valore isto emergente, extrahatur radix per theorema *Newtonianum*, & tandem series pro numeratore emergens dividatur per seriem, quæ emergit pro denominatore. Hoc pacto enim, in usum solutionis problematis, problema unum resolvitur quasi in plura, quorum unumquodque sigillatim solvi potest. Circa divisionem attentionem meretur artificium, quo calculus a perplexitate liberatur, ut distincte singula ipsis oculis exhibeantur: quod non modo facit ad facilius evitandum errorem, qui in calculum perplexum facile irrepit, defectu attentionis; verum etiam omnem molestiam aufert, qua attentio turbatur. Distincta perceptio intellectus est: unde qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navant, non modo nostro more singula distincte sibi repræsentare, verum etiam ad diversa artificia, quibus eo fine hinc inde utimur, animum sollicite advertere tenentur. Ceterum ne quis aliorum libros evolvens, in quibus eorundem Problematum solutio occurrit, existimet, paucis ibidem explicari, quæ a nobis tanta prolixitate expediuntur; monendum esse duco, autores plerosque scribere peritis, non tyronibus, quorum utilitati nos velificamur; adeoque multa omittere, quæ a lectore supplenda sunt, siquidem veritatem assequi voluerit. Unde non modo tyrones, verum etiam haud raro exercitatiores multum temporis

fallunt, antequam multo labore ab altero dicta assequantur. Nobis vero, qui tempus rerum omnium pretiosissimum existimamus, propositum est, ut sine omni temporis dispendio sciendi cupidos ad scientiam perducamus; cumque aliorum felicitati omni modo studere nos jubeat philosophia nostra, id quoque agendum esse arbitramur, ut in discendo omnem a discentibus molestiam arceamus.

§. 241. Inprimis autem in doctrina de rectificatione curvarum attentionem meretur methodus, qua, ex quantitate per seriem data, invenitur series pro quantitate variabili, ex qua formantur seriei prioris termini; veluti dum ex arcu dato sinus quæritur. Etenim arcus datur per seriem infinitam, cujus termini formantur ex sinu, & sinus quæritur in serie, cujus termini formantur ex arcu. Nititur ea methodo extrahendi radicem ex serie infinita, quam eum in finem explicavimus in Analysi finitorum. Inventa est a NEWTONO; quemadmodum constat ex literis ad LEIBNITIUM datis, quæ leguntur apud WALLISIUM, volumine tertio Operum, diciturque Regressus serierum. Subinde tamen artis est applicare methodum extrahendi radicem ex æquatione infinita in regressu serierum. Exempli loco est problema 56, (§. 163 *Anal. infin.*), quo ex dato arcu invenitur sinus versus. Solutio igitur problematis istius attentionem meretur, ut artificium, quo hic utimur, in aliis casibus similibus adhiberi possit. Neque enim sufficit, ut intelligantur, quæ docentur, si quis ad tertium cognitionis gradum adspirat; sed artificia quoque analytica addiscenda in usum futurum, cum regulas doceamus per exempla. Ad hactenus dicta qui animum attendit, in ceteris sese satis attentum atque acutum præbebit, ut plura moneri non sit opus. Immo si quis ea attentione in discenda Mathesi uti voluerit, quam tantopere inculcamus; acumen singulare acquiret, quo facile, nullo quasi negotio, discernet artificia in solutionibus problematum adhibita, eorundemque a se invicem dependentiam animadvertet: id quod utile erit iis, qui, studio Matheseos ac in specie Algebræ, in Arte inveniendi generali proficere student ad recte philosophandum necessaria.

§. 242. Circuli rectificatio etiam deduci potest ex quadratura circuli. Quoniam enim area circuli prodit ducta peripheria in quartam diametri partem (§. 429 *Geom.*), peripheria prodit, si seriem, quæ exprimit aream circuli, dividas per $\frac{1}{4}$. Inde est, quod, si diameter fuerit 1, pro quadrante eadem prodeat series $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ &c. (§. 158 *Anal. infin.*), quam pro circuli area repereramus, quadrato diametri existente 1. Etenim si seriem per $\frac{1}{4}$ dividere volueris, Numeratores terminorum ducendi sunt in 4, (§. 243 *Arithm.*).

Notan-

Notandum adhuc est, ex formulis indefinitis erui posse adhuc alias formulas pro circulo integro, vel ejus peripheria integra, si valor ipsius x non explicetur per diametrum 1, sed per sinum, sinum versum, cosinum, vel tangentem alicujus arcus: quo in casu sæpius prodit series magis convergens, cum priori modo inventa minus convergeret & contra. Ex. gr. Si tangens fuerit x, pro arcu prodit $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c.

Tab. III. Fig. 39. Ponamus arcum x esse $30°$. Si fuerit radius $CA = CB = 1$, erit sinus $BI = \frac{1}{2}$ (§. 15 *Trigon.*), consequenter ob $IC^2 = BC^2 - BI^2$ (§. 417 *Geom.*) $IC^2 = \frac{3}{4}$. Quamobrem cum sit

$IC : IB = CA : AD$ (§. 26 *Trigon.*)

& $IC^2 : IB^2 = CA^2 : AD^2$ (§. 124 *Anal.*)

erit $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 : AD^2$

sive $3 : 1 = 1 : AD^2$ (§. *cit.*)

Unde reperitur $AD = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Quodsi hunc valorem pro x substituas, cum sit

$$x^2 = \tfrac{1}{3} \qquad \tfrac{1}{3}x^2 = \tfrac{1}{9}$$
$$x^4 = \tfrac{1}{9} \qquad \tfrac{1}{5}x^4 = \tfrac{1}{45}$$
$$x^6 = \tfrac{1}{27} \qquad \tfrac{1}{7}x^6 = \tfrac{1}{189}$$
$$x^8 = \tfrac{1}{81} \qquad \tfrac{1}{9}x^8 = \tfrac{1}{729}$$
$$x^{10} = \tfrac{1}{243} \qquad \tfrac{1}{11}x^{10} = \tfrac{1}{2673};$$

series $x\,(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{11}x^{10}$ &c.) degenerat in sequentem $\sqrt{\frac{1}{3}}\,(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673}$ &c.) quæ exprimit arcum 30 graduum. Si vero diameter fuerit 1, eadem exprimit arcum 60 graduum. Quamobrem si seriem hanc ducas in 6, hoc est, si $\sqrt{\frac{1}{3}}$ multiplices per 6, cum sit $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; pro area circuli habebis

$$2\sqrt{3}\,(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673} \text{ \&c.})$$

Quodsi porro binos quosque terminos reducere volueris ad eandem denominationem, erit

$$-\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} = \frac{-45 + 9}{405} = -\frac{36}{405} = -\frac{12}{135}$$

$$-\tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} = \frac{-729 + 189}{189 \cdot 729} = \frac{-81 + 21}{21 \cdot 729} = -\frac{60}{21 \cdot 729} = -\frac{20}{7 \cdot 729} = -\frac{20}{5103}$$

Si adhuc addas terminum seriei sequentem $+\frac{1}{9477}$; eodem modo reperies

$$-\tfrac{1}{2673} + \tfrac{1}{9477} = -\tfrac{28}{104247}.$$

Unde series pro circulo resultat $2\sqrt{3}\,(1 - \frac{12}{135} - \frac{20}{5103} - \frac{28}{104247}$ &c.)

Quodsi eandem seriem dividas per 4, & factorem $2\sqrt{3}$ per 4 multiplices; habebis pro circulo

$8\sqrt{3}\,(\frac{1}{4} - \frac{3}{135} - \frac{5}{5103} - \frac{7}{104247}$ &c.

seu $\sqrt{192}\,(\frac{1}{4} - \frac{3}{135} - \frac{5}{5103} - \frac{7}{104247}$ &c.)

Est vero $135 = 15 \cdot 9$

$5103 = 63 \cdot 81$

$= 63 \cdot 9^2$

$104247 = 143 \cdot 729$

$= 143 \cdot 9^3$

Quamobrem ſeries pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\tfrac{1}{4} - \frac{3}{15.9} - \frac{5}{63.9^2} - \frac{7}{143.9^3}\ \&c.\right)$$

Unde patet lex progreſſionis in infinitum. Etenim numeratores progrediuntur ſecundum numeros impares; denominatores componuntur ex binis factoribus, quorum unus ſumitur ex progreſſione geometrica, cujus terminus primus 9, & exponens rationis eidem æqualis; alter vero per ſaltum excerpitur ex ſerie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, quorum radices ſunt 4. 8. 12. &c. hoc eſt, progrediuntur in progreſſione arithmetica, cujus terminus primus eſt 4 & differentia terminorum eidem æqualis.

Niſi formulam abbreviare voluiſſemus reductione binorum terminorum diverſis ſignis præditorum ad eandem denominationem; lex progreſſionis in infinitum manifeſtari quoque poterat in formula

$$2\sqrt{3}\left(1 - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673}\ \&c.\right)$$

reſolvendo denominatores in ſuos factores. Cum enim ſit

$$45 = 5.\ 9$$
$$189 = 7.\ 27$$
$$729 = 9.\ 81$$
$$2673 = 11.\ 24$$

erit pro circulo ſeries, ſi diameter = 1

$$\sqrt{12}\left(\frac{1}{1.1} - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.9} - \frac{1}{7.27} + \frac{1}{9.81} - \frac{1}{11.243}\ \&c.\right)$$

Una hic ſeries factorum progreditur ſecundum numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. altera vero in progreſſione geometrica, cujus exponens rationis 3, nimirum 1. 3. 9. 27. 81. 143.

§. 243. Patet hinc non temere eſſe judicandum, utrum ſeries aliqua citius appropinquet altera, nec ne, & num conſtante quadam lege progrediatur. Neque enim eadem formula indefinita in omni caſu particulari æque appropinquat, & lex progreſſionis ſæpius latet, atque in caſu particulari non eadem eſt, quæ in univerſali. Liquet etiam ad detegendam legem progreſſionis facere Arithmeticam, ſeu numerorum ſcientiam, quæ ſubinde etiam compendia ſummationis quotlibet terminorum ſeriei ſubminiſtrat; ut adeo inutile exiſtimare minime debeat ſtudium, quod in ſpeciebus numerorum certa lege progredientibus & in iis ſummandis collocatur; ſit ita quod hodie Geometria magis excolatur Arithmetica, immo Geometriæ ad Mechanicam applicatæ magis habeatur ratio, quam puræ. Apparet etiam uſui formularum minime obſtare, quod irrationalitati obnoxiæ ſint; & in caſu particulari formulam ab irrationalitate liberam eidem implicari poſſe citra ullum incommodum, immo uſum ejus per hoc fieri poſſe expeditiorem. Hæc probe notanda ſunt, ne judicium de formulis diverſis præcipitemus, quando de

unius præ altera prærogativa agitur. Etsi itaque jam in superioribus (§. 238) de transmutatione seriei *Leibnitianæ*, seu *Gregorianæ*, pro circulo in alias quædam monuerimus; non tamen piguit plura in eam rem dicere (§. 241), tum ut intelligatur, ex eadem formula, per transmutationem communi Arithmetica nixam, varias deduci posse alias, tum ut constet, hoc non inutiliter fieri, ubi eædem ad praxin sunt transferendæ; tum ut excitaremus attentionem eorum, & juvaremus eorundem acumen, qui de seriebus infinitis ad usum aptandis forsan commentari decreverint. Neque enim inutilem operam sumeret, si quis hoc argumentum pro dignitate tractaret; ne inanes viderentur speculationes, quæ certum sui pollicentur usum. Nec est quod excipias talia peritis nullum facere negotium. Nam quibus sese commendat usus, ii non semper, immo rarissime adeo periti sunt, ut talia per se assequantur.

§. 244. Ut hæc rectius intelligantur; lubet exemplo quodam docere, quomodo per series infinitas inveniantur approximationes in numeris quantalibet exactitudine, prouti plures vel pauciores terminos summare libuerit. Resolvuntur autem termini singuli in fractiones decimales per divisionem; quemadmodum fecimus in extractione radicum ex æquationibus per approximationem (§. 363 *Anal. finit.*). Ne autem in numero cyphrarum quoto præfigendis aberres; tenendum est, tot præfigendas esse cyphras, quot numeratori cyphræ adjiciendæ, ut prima divisio succedat. Ex. gr. si fractio fuerit $\frac{1}{8}$, divisio non succedit nisi unitati adjecta cyphra. Quoto igitur præfigitur cyphra una, ut constet deficere integra, seu locum integrorum esse vacuum, & fractionem incipere a partibus decimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{40}$, divisio inchoari nequit, nisi numeratori 1 adjectis duabus cyphris. Unde liquet quoto præfigendas esse duas cyphras: id quod indicio est, fractionem decimalem incipere a partibus centesimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{112}$, divisio non potest inchoari, nisi tribus cyphris numeratori 1 adjectis: quoto igitur præfiguntur tres cyphræ, & fractio decimalis incipit a millesimis. Similiter si fractio fuerit $\frac{5}{1152}$; quoto denuo adjiciendæ sunt cyphræ tres & fractio incipit itidem a millesimis. In casu tamen particulari dantur compendia singulos terminos per divisionem in fractiones decimales resolvendi, quando scilicet alii ex aliis jam inventis inveniri possunt. Quamobrem sumamus seriem pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{15.9} - \frac{5}{63.9^2} - \frac{7}{143.9^3} \&c.\right)$$

quam ex *Leibnitiana* deduximus (§. 242). Patet ex 192 extrahendam

 esse

eſſe radicem in fractionibus decimalibus (§. 274 *Arithm.*), continuata operatione ad tot loca, quot viſum fuerit. Quodſi hanc dividas per 4, habebis $\frac{1}{4}\sqrt{192}$, conſequenter numerum, a quo ſumma terminorum ſigno negativo affectorum ſubtrahenda venit. Dividatur jam eadem radix per 9, 9^2 ſive 81, 9^3 ſive 729, &c. ut habeatur $\frac{1}{9}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^3}\sqrt{192}$, &c. aut, quod perinde eſt, quotus anterior ſemper per 9, pro obtinendo proxime ſequente. Porro numerus $=\frac{1}{9}\sqrt{192}$ multiplicetur per 3, & factum dividatur per 15, ita prodibit numerus reſpondens $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$. Similiter numerus $=\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$ multiplicetur per 5 & factum dividatur per 63, ut prodeat numerus $=\frac{5}{63.\,9^2}\sqrt{192}$; atque ita porro. Quodſi enim terminos hoſce, in unam ſummam collectos, ſubtrahas a numero $=\frac{1}{4}\sqrt{192}$, relinquetur numerus peripheriæ circuli reſpondens, poſita diametro 1. Cum ſit $\sqrt{192} = 13.856406460551018348219$; erit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.464101615137754587055$ & porro, $\sqrt{192}$ per R deſignata & $\frac{1}{9}$R per A, $\frac{1}{9^2}$R per B, $\frac{1}{9^3}$R per C, $\frac{1}{9^4}$R per D & ita porro, ſive $\frac{1}{9}R=A$, $\frac{1}{9}A=B$, $\frac{1}{9}B=C$, $\frac{1}{9}C=D$ & ita porro,

I. 5

1.53960071783900203869 1	=	A
171066746426555782076	=	B
19007416269617309119	=	C
2111935141068589902	=	D
234659460118732211	=	E
26073273346525801	=	F
2897030371836200	=	G
321892263537355	=	H
35765807059706	=	I
3973978562189	=	K
441553173576	=	L
49061463730	=	M
5451273748	=	N
605697083	=	O
67299676	=	P
7477741	=	Q
830860	=	R
92318	=	S
10257	=	T
1139	=	V
126	=	X
14	=	Y

Quodſi jam ſit $a = \frac{3}{15}$, $b = \frac{5}{63}$, $c = \frac{7}{143}$, $d = \frac{9}{255}$, $e = \frac{11}{399}$ &c. continuata ſerie juxta legem progreſſionis, ut porro inveniantur valores f, g, h, &c. ſitque A. $a = \frac{3}{15 \cdot 9} \sqrt{192}$, B. $b = \frac{5}{63 \cdot 9^2} \sqrt{192}$, C. $c = \frac{7}{143 \cdot 9^3} \sqrt{192}$ &c. prodibit

307920143568700407738	=	A. *a*
13576725906869506514	=	B. *b*
9304329642470011145	=	C. *c*
745388873318325584	=	D. *d*
64693084243259 50	=	E. *e*
5894827017475 39	=	F. *f*
55498666127130	=	G. *g*
5349138299252	=	H. *h*
524749292768	=	I. *i*
52191088058	=	K. *k*
5248435654	=	L. *l*
532582107	=	M. *m*
54452235	=	N. *n*
5602939	=	O. *o*
579685	=	P. *p*
60260	=	Q. *q*
6290	=	R. *r*
659	=	S. *s*
69	=	T. *t*
7	=	V. *v*
9	=	X. *x*
	+	Y. *y*
3225089615479613485592		Summa,
3.46410161513775458705 5		
3.14159265358979323846 3		Periph. Circ.

Series hæc cum numeris LUDOLPHI prorſus conſentit : notæ enim ultimæ non habetur ratio , quia accurata non eſt , ſaltem dubia , propterea quod ignoratur, qualis ſit proditurus , ſi calculus produceretur. Equidem calculus hic videtur admodum prolixus ; quod ſi tamen quis eundem conferre voluerit cum calculo LUDOLPHI in Libro *de circulo & adſcriptis*, facile intelligit, quanto *Ludolphinus* ſit operoſior & moleſtior. Immo ſi quis ſeriem *Leibnitianam* in fractiones decimales reſolvere vellet, multo prolixiore calculo haberet opus, antequam peripheriam circuli ad tot loca produceret.

§. 245. Quamvis autem ex allato exemplo abunde perſpiciatur, quomodo ſeriebus infinitis ſit utendum; non inconſultum tamen exiſtimamus alterum adhuc addere exemplum. Si ſinus arcus ſit *y*, ſinus totus ſeu radius circuli 1 ; erit arcus

$= y + \frac{1.1}{2.3} Ay^2 + \frac{3.3}{4.5} By^2 + \frac{5.5}{6.7} Cy^2 + \frac{7.7}{8.9} Dy^2 + \frac{9.9}{10.11} Ey^2$ &c. in infinitum. Sit y sinus arcus 30°; erit is $= \frac{1}{2}$; adeoque series degenerat in sequentem $\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3.4} A + \frac{3.3}{4.5.4} B + \frac{5.5}{6.7.4} C + \frac{7.7}{8.9.4} D + \frac{9.9}{10.11.4} E$ &c. in infinitum; consequenter si diameter fuerit 1, eadem series exprimit arcum 60°. Quodsi ergo terminum primum ducas in 6, & qui hinc prodit 3, in $\frac{1.1}{2.3.4}$ coëfficientem secundi, ut habeas $\frac{1}{8}$, obtinebitur series pro circulo $3 + \frac{1}{8} + \frac{3.3}{4.5.4} B + \frac{5.5}{6.7.4} C + \frac{7.7}{8.9.4} D + \frac{9.9}{10.11.4} E$ &c. Neque enim hic opus est, ut termini singuli multiplicentur per 6; quia sequentem semper ingreditur proxime præcedens; adeoque primus, qui est sextuplus primi in anteriore serie, terminos omnes sequentes. Non igitur alia re opus est, quam ut $\frac{1}{8}$ resolvas in fractionem decimalem 1250000000000000, ut habeas terminum secundum; hunc porro ducas in $\frac{3.3}{4.5.4}$ sive $\frac{9}{80}$, hoc est, multiplices per 9 & dividas per 80, ut obtineas tertium 140625000000000; tertium vero ducas in $\frac{5.5}{6.7.4}$, seu multiplices per 25, & dividas per 168, ut prodeat quartus 2092633928571428; & ita porro. Quodsi enim terminos omnes addas, aggregatum erit peripheria circuli, cum numeris *Ludolphinis* consentiens. Sane si quatuor saltem terminos addis, posita diametro 10000, prout hic factum esse vides,

$$\begin{aligned} 3.0000 &= A \\ 1250 &= B \\ 140 &= C \\ 20 &= D \end{aligned}$$

Summa 3.1410

habebimus pro peripheria 3141, cum nota ultima non sit accurata. Reperitur adeo ratio diametri ad peripheriam ut 1000 ad 3141 cum *Ludolphinis* numeris consentiens. Nisi adeo fractiones decimales ad multa loca extendere volueris, sed in paucis numeris acquiescas, quemadmodum fecere ARCHIMEDES, PTOLOMÆUS, alii; exiguo tantum calculo opus est. Similiter brevi calculo iidem numeri inveniri poterant ex serie præcedente. Cum enim sit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.46410$ &

$$\begin{aligned} 1.53960 &= \tfrac{1}{9}R = A \\ 17106 &= \tfrac{1}{9}A = B \\ 1900 &= \tfrac{1}{9}B = C \\ 211 &= \tfrac{1}{9}C = D \end{aligned}$$

reperietur ut ante (§. 244)

30792 = A. *a*
1357 = B. *b*
93 = C. *c*
7 = D. *d*.

32249 Summa
346410 = $\frac{1}{4}\sqrt{192}$

314161 Peripheria circuli, in qua quatuor numeri 3141, ut ante, cum *Ludolphinis* consentiunt.

§. 246. Quod si resolutio serierum infinitarum hic data probe perpendatur; nullus dubito fore ut, in seriebus ad usum aptandis, nihil posthac supersit difficultatis. Inprimis autem hinc perspicitur, quantum intersit, ut lex progressionis in infinitum sit manifesta; ne multo labore demum investigandi sint termini, quibus habemus opus, & ut termini sequentes inveniantur ex antecedentibus; sive id fiat per dependentiam eorundem a se invicem in formula generali, quemadmodum in exemplo altero (§. 245), sive id singulari quadam ratione contingat in casu particulari, quemadmodum in exemplo primo (§. 244). Intelligimus etiam quanta, in tractandis altioribus, attentione opus sit ad maxime vulgaria, ne ea eidem sese subducant, & per ambages incedamus, ubi brevior ducit ad scopum via. Ex. gr. notissimum est ex communi Algorithmo fractorum, si $\frac{1}{9}$ dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{9^2}$; si $\frac{1}{9^2}$ porro dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{9^3}$ & sic porro in infinitum. Enimvero, si in exemplo primo huc animum minime advertas, & $\sqrt{192}$ sive 13. 85640646055102 18348219 dividere velis per 9, per 9^2 sive 81, per 9^3 sive 279 & ita porro, operoso calculo invenies numeros A, B, C, D &c. qui, continua divisione antecedentis per 9, multo facilius eruuntur. Immo si quis una divisione terminum quemcunque resolvere vellet, v. gr. secundum $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$ sive $\frac{3}{135}\sqrt{192}$, multiplicando scilicet 13. 85640 &c. per 3, & factum dividendo per 135; in ambages multo longiores incideret; adhuc longiores futuras, si terminus quilibet reduceretur ad pure irrationalem & ex eo extraheretur radix, veluti si fieret $\frac{3}{135}\sqrt{192} = \sqrt{\frac{1728}{18225}}$ atque inde extraheretur radix. Non existimandum est, talia inutiliter moneri: nisi enim ad ea animum reflectamus, ubi obvia sunt, attentioni nostræ sese subducent, ubi magis latent. Illustria dare poteramus exempla, nisi nostrum foret ab invidiosis abstinere, quæ nulla necessitas imperat. Ad vitandam itaque ἀβλεψίαν sedato opus est animo; ne appetitus influat in determinationem operationum intellectus, in qua nullæ ipsius sunt partes. Distinctæ notiones

nullibi

nullibi negligendæ ſunt, ubi earum participes fieri poſſumus; præſertim ſi quis philoſophari conſtituit, & ad vitæ perfectionem tanquam ad ſcopum tendit. Diximus inſuper, quam difficile ſit de prærogativa formulæ unius præ altera ſtatuere, niſi utriuſque reſolutione obſervatis omnibus, quæ obſervari poſſunt, facta. Sane ſi formula poſteriore utaris pro circulo, & terminos reſolutos ſibi invicem legitime ſubordines, & idem facias cum priori; videbitur poſterior priori longe anteponenda. Enimvero ſi totam operationem in caſu priori conferas cum tota in altero; præſertim ubi diviſionem per novenarium tranſmutes in ſubſtractionem (§. 116 *Arithm.*); longe aliter ſenties. Nolo addere plura, ne videar in levioribus commendandis nimius; præſertim iis, qui, cum in calculis conſeneſcere decreverint, nec ſtudii Matheſeos utilitatem extra Matheſin quærant, illorum fructum proſpicere nequeant.

§. 247. In capite de cubatione ſolidorum & complanatione ſuperficierum tantummodo notandum eſt, quomodo elementa ſolidorum & ſuperficierum eorundem inveniantur; & quomodo per calculum ſummatorium, eruta ſoliditate vel ſuperficie corporis rotundi, inveſtigentur per calculum literalem theoremata praxi inſervientia. Inprimis hic attentionem meretur, quomodo ſolidum unum transformetur in aliud ipſi æquale. Ea cum facilia ſint, pauca tantummodo ſpeciminis loco exhibuimus, cum unusquiſque per ſe plura addere poſſit.

§. 248. Methodus tangentium inverſa maximæ utilitatis eſt in ſublimioribus, atque ideo maximam quoque meretur attentionem. Ejus ſaltem primas lineas duximus; ut naſcatur methodi hujus idea in animis tyronum; ne hæſitent in problematis, quæ in Mechanica traduntur. Duo autem hic præ ceteris notanda ſunt; primum quomodo conſtructio æquationum reducatur ad quadraturam curvarum ſimpliciorum & earundem rectificationem, ut appareat, quomodo ſolvantur problemata, ſuppoſita quadratura curvæ vel rectificatione arcus; deinde quomodo ex æquatione differentiali ad logarithmicam deducatur modus differentiandi quantitates, quas logarithmi ingrediuntur (§. 243 *Anal. infin.*). Hujus enim uſus inſignis eſt in inveniendis logarithmis, tam numerorum vulgarium, quam ſinuum, atque tangentium; quemadmodum capite ſexto docetur. Eodem quoque artificio nititur calculus exponentialis, quem integra ſectione tertia expoſuimus, & conſtructio curvarum exponentialium, ope logarithmicæ, atque quantitatum, quas logarithmi ingrediuntur; cujus exempla dedimus capite altero hujus ſectionis. Hinc vero elucet inſignis lineæ logarithmicæ utilitas, quam nemo prævidere poterat, iis probe notanda, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Ratio-

nem jam dedimus in superioribus (§. 176).

§. 249. Artificia, quibus utimur in investigando modo differentiandi differentialia (§. 297 *Anal. infin.*), eadem sunt, quæ ante adhibuimus ad investigandas regulas differentiandi quantitates finitas, & quæ jam nobis innotuere in calculo literali, ubi algorithmum fractorum ex algorithmo integrorum, & algorithmum irrationalium ex algorithmo rationalium deduximus; ut adeo hinc appareat, quomodo quæ vulgaria videntur, haud raro prosint ad altiora; & quam utile sit ad artificia, quibus utimur in facilioribus, animum attendere, ne impervia nobis videantur magis ardua. Cum Methodus determinandi puncta flexus contrarii curvarum non minus utilis sit, ad ductum curvarum repræsentandum, quarum præter æquationem nihil novimus, quam methodus de maximis & minimis, & methodus determinandi puncta, in quibus curva rectam positione datam secat, quam in superioribus illustravimus; illa vero a calculo differentiali pendeat; eandem quoque exemplis nonnullis illustrare lubuit. Etsi enim curva integra nondum construi possit; ope tamen punctorum, quæ per eas methodos determinantur, ductum ejus imaginari licet. Exempla occurrent in Mechanica.

§. 250. In doctrina de evolutione curvarum, quam capite tertio proponimus, notatu maxime dignum est, quod cyclois sua evolutione seipsam describat (§. 350 *Anal. infin.*), cum hoc faciat ad perfectionem motus penduli, quo horologia automata ad maximam perfectionem perducuntur, quemadmodum in Mechanicis demonstratur. Sane ea ipsa permovit HUGENIUM, ut de evolutione curvarum cogitaret, sicuti ex egregio Mathematici summi *Tractatu de horologio oscillatorio* intelligitur. Notandum præterea, quod inserviat rectificationi curvarum, & ipsam curvedinem curvæ discernat; ut arcus circuli osculatoris pro arcu curvæ alterius in praxi substitui possit (§. 331 *Anal. infin.*). Applicatio calculi differentialis in hoc argumento nihil habet, quod non sit ex anterioribus manifestum. Hoc tamen adhuc attentionem meretur, quod determinatio radii osculi, seu evolutæ, interdum faciat ad theoremata selecta eruenda, quemadmodum exemplo logarithmicæ docemus (§. 332 *Anal. infin.*

§. 251. Arithmetica infinitorum, invento calculo differentiali & summatorio, non amplius eum habet usum quem habere poterat, si is nondum fuisset inventus. Eam tamen prætermittendam esse non duximus; ne quod sit inventum, celebre inter recentiores Mathematicos nomen adeptum, quod a nobis non illustretur. Etsi autem pauca tantummodo de ea tradidisse videamur, plura tamen

men dedimus, quam in prolixo opere ISMAELIS BULLIALDI continentur. Eam illustrare voluerat JOANNES CHRISTOPHORUS STURMIUS in *Mathesi enucleata*; sed cum esset artificiorum recentiorum ignarus, quod sibi proposuerat non perfecit. Quæ de termino ultimo seriei continuatæ evanescente notanda sunt, satis perspicue exposuimus (§. 345 *Anal. infin.*), ut plura eam in rem annotari minime sit opus. Ratio, cur usum Arithmeticæ infinitorum extendi quasi in infinitum licuerit ultra terminos, intra quos a BULLIALDO coërcetur, in summatione potentiarum & numerorum pyramidalium consistit, quam in Analysi finitorum universali quadam ratione absolvimus (§. 200 *& seqq.* & §. 216). In Arithmetica enim infinitorum semiordinatæ curvarum spectantur tanquam in certa numerorum serie progredientium, veluti potentiarum dati cujusdam gradus in curvis parabolici generis (§. 349, 350 *Anal. infin.*). Unde analysi ad analysin Veterum propius accedente, quadraturæ curvarum quadrabilium deducuntur in Arithmetica infinitorum. Atque hoc artificium heuristicum notari meretur.

CAPUT V.

De Studio Mechanicæ.

§. 252. MEchanica a Veteribus inventa fuit in usum machinarum: Veteres enim laudabili exemplo in theoria semper respiciebant ad usum in praxin; quippe cum in omni theoriæ genere intendenda sit praxis, quemadmodum in Philosophia sedulo inculcamus. Primas ejus lineas duxit ARCHIMEDES in libris de æquiponderantibus, nec ultra eos terminos progressi sunt Mathematici usque ad GALILÆUM. Quoniam machinæ omnes ex paucis quibusdam machinis simplicibus componuntur, quas potentias mechanicas appellare solent, nos machinas simplices diximus; in Mechanica non considerarunt nisi machinas simplices, vectem, axem in peritrochio, trochleam, cochleam, planum inclinatum & cuneum, quarum theoriam amplissimam, sed nimis diffusam dedit VARIGNONIUS in opere posthumo. Considerarunt autem machinas hasce simplices in statu æquilibrii, in quo nonnisi adest conatus ad motum, quam vim mortuam vocat LEIBNITIUS; propterea quod sublato æquilibrio, dum potentia motrix augetur, nascitur motus diversæ celeritatis, pro diverso illius incremento, seu excessu potentiæ

motricis supra pondus movendum. Inde est quod, in agitandis machinis, non modo potentiæ motrices conferantur cum pondere movendo; verum etiam ipsæmet ad pondus ipsis æquale, & resistentiæ in motu machinarum superandæ ad pondus æquivalens reducuntur; quatenus potentiæ cuilibet motrici, quoad effectum, substitui potest aliquod pondus, vi gravitatis, qua ad descensum urgetur in machinam agens, seu eandem animans; & resistentiis superandis substituere licet pondus eandem potentiam motricem requirens, si elevari debet. Atque hæc probe notanda sunt tyronibus, ut & mentem Veterum plenius assequantur, & in applicatione theoriæ machinarum simplicium ad praxin, hoc est, ad machinas compositas explicandas nihil sentiant difficultatis. Patet hinc, quod LEIBNITIUS asseruit, Veteres nonnisi vis mortuæ notionem habuisse. GALILÆUS in *Dialogis de motu* ulterius primum progressus, & motum gravium descendentium, & projectorum explicare cœpit, non infeliciter: eum vero in finem præmisit theoriam motus æquabilis. Attingit etiam nonnulla de motu pendulorum, sed quasi obiter. Accuratius vero, & data opera, in eundem inquisivit HUGENIUS in Tractatu *de Horologio oscillatorio*, & theoriam inprimis centri oscillationis superaddidit. Occasione motus pendulorum idem incidit in vim centrifugam, quam in circulo ad examen revocavit, adjectis in fine Tractatus de horologio oscillatorio theorematis de vi centrifuga, quorum demonstrationes demum publici juris factæ sunt in posthumis. Inde NEWTONUS vires centrales, tam centripetas, quam centrifugas considerare cœpit etiam in curvis aliis, præsertim centripetis, & ad explicandum motum Planetarum theoriam transtulit, in *Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis*. CARTESIUS, in *Principiis Philosophiæ*, leges motus ex percussione explicare aggrediebatur, sed non satis feliciter, cum ad veritatem liquidam pertingere non potuerit. Postea vero WALLISIO, CHRISTOPHORO WREN & HUGENIO negotium felicius cessit; quorum ille leges motus corporum non elasticorum, hi vero corporum elasticorum bene explicarunt. Quoniam autem motus corporum diminuuntur propter resistentiam medii, in quo moventur; in eandem quoque inquirere cœpit WALLISIUS; deinde vero hoc argumentum ulterius prosecutus est NEWTONUS in Principiis modo laudatis. Denique, cum calculus differentialis esset inventus, & a Geometris præclaris, quos inter eminent BERNOULLII fratres, ad solutionem problematum physico-mechanicorum transferretur; descensus & ascensus corporum in lineis curvis expendi cœpit. Atque sic tandem latissimus

evaſit Mechanicæ campus, qui arctis nimium limitibus a Veteribus includebatur. Nos igitur Elementa Mechanicæ daturi, quæ ſatisfacerent, non minus inventorum antiquorum, quam recentiorum rationem habuimus. Hæc probe notanda ſunt, ut idea quædam Mechanicæ animo concipiatur, definitio rectius intelligatur, nec quiſquam miretur, ubi viderit, in Elementis noſtris Mechanicæ longe alia pertractari, quam quæ vulgo in libellis hujus nominis reperiuntur.

§. 253. Qui ſolam praxin mechanicam curæ cordique habent, ii, prætermiſſis ceteris omnibus, ad caput decimum quintum ſtatim digrediantur: in eo enim & ſequentibus continentur, quæ ad machinarum intellectum faciunt. Quoniam nobis theoriam cum praxi ſemper conjungere propoſuimus, potentiarum quoque motricium ad machinas applicationem, & machinarum uſitatiorum conſtructionem explicare voluimus: quæ duo vulgo in libellis mechanicis negliguntur. A potentiarum motricium ad machinas applicatione pendet ſtructura externa machinarum, quæ abſque illa intelligi nequit; quemadmodum ſtructura interna non intelligitur abſque notitia machinarum ſimplicium. Libellatio vulgo in Geometria practica docetur: ſed cum nos Geometriam practicam a theoretica non ſeparaverimus; libellationis vero indiſpenſabilis uſus ſit in conſtruendis molendinis, quæ aquarum vi agitantur; eandem quoque hic explicare viſum fuit, ubi de applicatione potentiarum ad machinas agitur. Quoniam tamen ad machinas applicantur, quæ de æquilibrio ſolidorum c. 3, quod de centro gravitatis agit, demonſtrantur in prima ejus parte, & quæ c. 4, de quiete & lapſu corporum gravium docentur; expenſis definitionibus machinarum ſimplicium, addendæ ſunt definitiones ac propoſitiones horum capitum, eo modo, qui ad primum cognitionis gradum acquirendum ſufficit. Ubi vero animo ſatis comprehenderis, quæ ad machinas, tam ſimplices, quam compoſitas ſpectant; non inutile fuerit, ſi ceterorum quoque theorematum notitiam quandam tibi compares ex anterioribus, prætermiſſis tantummodo problematis, quæ analytice ſolvuntur per calculum; ne ignores principia, quæ in praxi accuratiori uſui ſunt.

§. 254. Qui praxin mechanicam demonſtratam expetit, ad ſecundum cognitionis gradum adſpirans; eum addere debere demonſtrationes per ſe patet. Non tamen ideo neceſſe eſt, ut omnis theoriæ campum emetiatur; ſed ſufficiunt ea, quæ ad intellectum machinarum faciunt. Quænam vero ea ſint, facta demonſtrationum cap. 15, contentarum analyſis, eo quidem modo, quam in Logica (§. 922.) ſatis diſtincte explicavimus, & exemplis illuſtravimus, docet.

docet. Quodsi quis praxin ante hauserit, quam ad theoriam accedat, quemadmodum modo (§. 253) inculcavimus; ei haud difficile fuerit ea, quæ sibi usui sunt, discernere a ceteris, quæ insuper habere potest. Nec nocet, si vel maxime quædam addiscat, quorum in machinis usum nullum perspicit: neque enim solum fieri potest, ut in posterum usus quidam sese offerat, qui prævideri haud quaquam poterat; verum etiam omnis theoriæ tractatio certissimam spondet in firmandis ratiociniis mechanicis utilitatem, & menti acumen quoddam conciliat, ut perspicacius videamus aliis, in iis quæ ad machinas spectant. Acumen vero mechanicum, & prompta de machinis ratiocinatio, non nullius censeri debet momenti.

§. 255. Qui denique ad tertium cognitionis gradum aditum sibi parare gestit, is nihil eorum prætermittere debet, quæ in Elementis nostris Mechanicæ continentur; sed omnia potius accurata industria persequi tenetur; quemadmodum in superioribus in genere præcepimus. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, intendit habitum ex iis, quæ cognovit, inveniendi alia sibi adhuc incognita. Opus igitur habet principiis, quibus in ratiocinando utatur; opus habet artificiis heuristicis, quæ data occasione imitetur. Quæ a nobis demonstrantur, vel analytice eruuntur, sunt principia, per quæ aditus patet ad ulteriora. Resolutiones analyticæ problematum, quas damus, continent artificia heuristica a lectore attento annotanda, vi perspicaciæ quam inculcavimus, cum de studio Algebræ ageremus. Atque ea ratio est, cur problemata physico-mechanica in casu particulari solverimus, in quo soluta a primis inventoribus; etsi subinde quoque docuerimus, quomodo problemata particularia ad universalitatem reducantur. Plus enim artis plerumque deprehenditur in solutionibus particularibus, quam in universalibus; multoque difficilius fuit primis inventoribus dare solutiones particulares, quam deinceps aliis, qui iisdem omnem universalitatem conciliare voluerunt. Quamobrem qui non ad pompam scripsimus, (levitate quadam animi in ambitionem adducti, quæ cum condonanda sit homini in lineis & calculis ætatem omnem consumenti, ob egregia in scientiam merita, in Philosopho tamen ferenda non est, qui non minus appetitum, quam intellectum, seu facultatem cognoscitivam perficere tenetur;) sed utilitatem discentis unice respicimus, ad quam tanquam ad metam contendimus; eundem quoque a via regia deducere non debuimus, quam calcarunt, qui ad inaccessa aditum pararunt; ut appareat, quomodo quæ impervia videntur, humano ingenio pervia reddantur. In inprimis cognitu utilissimum, si non necessarium, dicendum iis

iis qui Artem inveniendi extra Mathesin exercere sibi propositum habent. Postquam enim abunde convicti sumus, quam necessarium sit, studio Matheseos etiam sublimioris, perficere intellectum, ut extra ejus pomœria inoffenso pede progrediaris; hanc quoque utilitatem, vulgo non satis animadversam, etsi a multis commendatam, in conscribendis Elementis nostris intendimus, operamque dedimus, ne vana spe lactaremus lectoris animum.

§. 256. Enimvero non opus est, ut ad particularia descendamus: neque enim alia re opus est, quam ut ea, quæ superius de studio Matheseos in genere, & de studio præsertim Algebræ in specie, præcipimus, ad lectionem Mechanicæ transferantur. Quamvis enim hinc inde nonnulla scitu non inutilia annotari poterant; tantam tamen prolixitatem non fert præsens institutum; & qui per superiora ad ea, quæ sunt methodi, sufficientem attentionem, cum acumine, ubivis afferre didicit, perspicillis propriis usus animadvertet, quæ eum subterfugere non debent, nec manuductione alterius indiget, qui firmo pede incedere valet. De duobus tamen artificiis, quibus utimur in Mechanicis, prorsus silere nefas est; propterea quod in Mathesi pura iisdem locus non est, in Philosophia tamen naturali, & in ipsa quoque morali, maximam utilitatem habent. Ut facilius intelligantur, quæ dicenda sunt; sumamus casum particularem. Gravia moventur in rerum natura per medium resistens, veluti per aërem, aut aquam. Enimvero in Mechanicis consideramus primo motum gravium in medio non resistente; qualis nempe foret, si nihil adesset, quod motum ejus quomodocunque impediret; seu quatenus a sola gravitate tanquam causa dependet. Ubi enim constat, qualis sit per se, nec difficile est postea quoque definire, quid per resistentiam medii detrahatur; ut intelligatur, qualis sit in medio resistente. Similiter in æquilibrio solidorum, pondera primum consideramus tanquam lineis gravitatis expertibus applicata; ut quale in se sit pateat. Deinde vero idem applicamus ad pondera ex gravibus suspensa, veluti longurione aut hasta quadam ferrea. Eodem prorsus modo, in Philosophia morali, appetitus sensitivus consideratur in se, independenter a rationali; deinde vero etiam, quatenus ab eodem dependet, & vice versa. Similiter appetitus spectatur ut dependens a solo sensu, deinde vero ut simul dependens ab imaginatione. Qui concursum plurium facultatum ad eandem actionem non distincte expendunt, ut sigillatim inquirant, quid ab unaquaque proficiscatur; nunquam ad veritatem liquidam pertingunt; sed summa imis miscent; aut cœcutientes hæsitant, quid statuere debeant; & veritatem, vel nullam

agnoſcunt, vel eam rationi humanæ imperviam temere pronunciant. Deinde probe quoque notandum venit artificium, quo problemata phyſico-mechanica reducuntur ad Geometriam puram, ut per eandem ſolutio in poteſtatem redigatur: id quod inprimis locum habet in tranſitu Geometriæ ad Phyſicam; ut tractare naturam mathematice liceat. Utile eſt hoc artificium in omni cognitione mathematica, qualis etiam locum habet in Pſychologia, & in variis Philoſophiæ practicæ capitibus; etſi hactenus de ea non cogitarint Mathematici; quippe principiorum philoſophicorum ignari, nec Philoſophi, qui ſubtilitates mathematicas a ſe alienas exiſtimarunt. Erit autem tempus, quo, Philoſophia noſtro more magis exculta, cognitionem mathematicam ultra eos, intra quos hactenus coarctatur, terminos etiam ad talia provehent, in quibus quod locum habeat, hactenus vix ſibi perſuadere patiuntur. Quæ hic ſpeciminis loco in medium afferuntur, excitare debent attentionem lectoris ad ea artificia, quibus methodus amplificatur, & quæ pauci in Matheſi imitantur in caſu ſimili; extra eandem vero ut adhibeat nemo cogitat.

§. 257. In reſolutione problematum phyſico-mechanicorum, id quoque conſiderandum eſt, utrum ſolvantur in hypotheſi naturæ, an vero in aliena. Illud obtinet, ſi quod ſumitur in rerum natura, revera ita ſeſe habet; hoc autem, ſi minus. Exempli loco eſto acceleratio gravium. Motum gravium continuo accelerari, experientia conſtat; nec minus liquet, naturæ conveniens eſſe, ut certa lege acceleretur. Quodſi, in ſolutionibus problematum de motu gravium, lex accelerationis ſumatur, qualis obtinet in rerum natura; eadem in hypotheſi naturæ ſolvuntur. Si vero alia ſumatur, quam quæ in rerum natura obtinet; eadem ſolvi dicimus in hypotheſi aliena. Geometræ perinde eſt, in quacunque hypotheſi problema ſolvat, modo hypotheſis non ſit impoſſibilis, libera nimirum a contradictione. Enimvero in Phyſica non ſunt uſui niſi ſolutiones, quæ hypotheſi naturæ nituntur. Hinc qui nonniſi Geometram agit, problema ſolvit in omni hypotheſi poſſibili; Phyſico relinquens ut hypotheſin naturæ definiat, & ad eandem ſolutionem generalem applicet; vel ex pluribus particularibus eam ſeligat, quæ inſtituto ſuo convenit. Quod ſi dicas, ſolutiones in hypotheſi aliena nullius eſſe utilitatis; lubens concedo, ſi non de alia utilitate ſermo fuerit, quam quæ in Phyſica locum habet; nego autem, ſi de utilitate ſimpliciter ſermo fuerit. Neque enim deſtituitur ſuo in Matheſi pura uſu; qualis eſt incrementum Artis analyticæ magni omnino faciendum. Non igitur contemnenda ſunt magna Geometrarum molimina, quæ per ſe ad cognitionem natu-

ræ mathematicam nil conferunt. Sufficit enim detegi methodos, per quas ea in potestate nostra constituitur, quam primum hypotheses naturæ innotuerunt. Quid quod solutiones problematum, in alienis hypothesibus factæ, conducant ad illas investigandas; quatenus ad experimenta ducunt, de quibus alias non cogitare daretur. Quoniam principia Philosophiæ naturalis mathematica cognitioni naturæ mathematicæ inservire debent; rigorose loquendo talia non sunt, nisi quæ hypothesibus naturæ nituntur. Et si certam desideres cognitionem, hypotheses naturæ evinci debent, ne de earum veritate ullum supersit dubium. Quoniam tamen indirecte ad cognitionem naturæ mathematicam prosunt, quæ ex alienis quoque hypothesibus ducuntur, quemadmodum modo annotavimus; & in Physicam quoque admittuntur hypotheses philosophicæ, etsi nondum certæ, probabilitate tamen non destitutæ, quatenus ad veritatem liquidam inveniendam viam sternunt (§. 127 *Disc. prælim.*); sit ita, quod non ingredi debeant, tanquam principia, demonstrationem propositionum, quæ in Physicam tanquam dogmata admittuntur (§. 128 *Disc. prælim.*); imprudens reprehenderit, quod principia Philosophiæ naturalis mathematica dicantur, quæ ex hypothesibus alienis, & ex aliis, quas naturæ hypotheses esse nondum certo constant, deducuntur. Ecquis propterea invideret titulum *Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum* celebratissimo operi Viri summi ISAACI NEWTONI; quo magno suo merito tantam nominis celebritatem consecutus? Cauti tamen ac circumspecti esse debemus; ne quæ, ob usum quem indirecte habent, principia Philosophiæ naturalis mathematica tolerando sensu dicuntur, pro principiis proprie ac rigorose dictis habeantur: hoc enim cederet in detrimentum scientiæ philosophicæ. Nemo igitur Philosophus probaverit, si qui hypotheses *Newtonianas*, eas præsertim, quibus nonnisi in Mathesi locus conceditur, pro principiis Philosophiæ naturalis sumunt, & nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpunt; non modo Physicam cum Philosophia, hoc est, cum genere speciem, verum etiam cognitionem mathematicam cum philosophica confundentes. Etsi in Virorum magnorum meritis extollendis liberales simus; non tamen eorum laudes in præjudicium veritatis producimus: id quod ne quidem in adulatore ferendum. Valet hic quam maxime tritissimum illud; Amicus Socrates, amicus Plato, amicus Aristoteles, sed magis amica veritas. Ceterum notandum est, inter hypotheses alienas & hypotheses naturæ, dari genus quoddam earum intermedium, quæ non invita experientia, ob commoditatem praxeos, in locum

hypothesium naturæ assumi possunt, immo debent; ne præter necessitatem difficultatibus praxin immergas, quam simplicem ac expeditam esse oportet; & quas adeo convenienter admodum *Vicarias* dixeris. Exemplum habemus in motu gravium. Cum gravia vi gravitatis ferantur ad centrum terræ, in motu projectorum directiones sunt convergentes, utpote in centro Terræ concurrentes. Hypothesis adeo directionum convergentium, naturæ hypothesis est. Hoc tamen non obstante, recte cum GALILÆO in ejus locum surrogatur hypothesis directionum parallelarum; propterea quod in iis distantiis, in quibus experimenta sumere licet, lineæ convergentes pro parallelis citra errorem assignabilem, in praxi inde metuendum, haberi possunt. Referendæ sunt hypotheses istæ vicariæ ad ea, quæ sunt toleranter vera; & quorum plurima in Mathesi occurrunt exempla, ex ea in Philosophiam minime inferenda.

§. 258. Quoniam in rerum natura nulla nisi motu contingit mutatio; Mechanica vero motus scientia est; ad quam etiam recte refertur status æquilibrii, quo sublato, oritur motus; dubium superesse potest nullum, quod Mechanicæ principia in explicandis naturæ phænomenis usum habeant. Quamobrem qui in usum Physicæ Mechanicam addiscit; definitiones ac theoremata de motu, & æquilibrio solidorum, cognita atque perspecta sibi reddere debet. Quodsi demonstrationes difficiliores videantur, quam ut eas capere possit; vel si tantum temporis impendere nolit, quantum iis percipiendis sufficit; satis erit, si historicam saltem cognitionem sibi acquisiverit, in eo cognitionis gradu acquiescens, quem supra primum diximus. Quando enim principia mechanica in Physica applicantur, non attenta demonstratione, sumuntur tanquam vera; adeoque quoad applicationem perinde est, sive demonstrationem animo comprehenderis, sive eam non attigeris. Absit autem, ut quis sibi persuadeat, nos Philosophum a demonstrationibus mathematicis arcere velle; quas non modo necessarias agnoscimus, ne sine convictione tanquam verum sumas, quod ad reddendam rationem phænomenorum naturæ applicas, consequenter ut certa tibi sit rerum naturalium cognitio; verum etiam quia habitus demonstrandi, omni modo perficiendus, ad recte philosophandum in Physica conducit; immo nec in eadem demonstrationibus geometricis semper supersedere licet, etsi cognitionem mathematicam a philosophica separaveris. Ceterum non inutile est præcipua theoremata mechanica, in eorum gratiam qui demonstrationes capere, vel non possunt, vel nolunt, experimentis comprobari; ut veritatem a posteriori agnoscant, quam a priori agnoscere minime valent: id quod in Physica

tanto

tanto magis satisfacit, quanto plura in eadem assumenda sunt, nonnisi experientiæ fide. Prosunt autem experimenta mechanica etiam Mathematicis, ut constet de rationis cum experientia consensu, tantoque magis exploratum sit, quod ratiocinando veritatem fuerint assecuti. Eadem commendanda sunt iis, qui solam praxin Mechanicæ curant, ne in reddendis rationibus sumere teneantur, sola autoritate aliena confisi, quæ nullo modo vera perspiciunt.

§. 259. Qui ad Mathesin sublimiorem adspirant, iis imprimis commendanda sunt, quæ in capite primo, usque ad decimum quartum inclusive, leguntur. Etenim iis familiaria esse debent theoremata de motu, quemadmodum theoremata de ratione quantitatum, & theoremata Geometriæ elementaris familiaria experiri debet, qui in Mathesi inoffenso pede progredi voluerit. Dedimus præterea problematum physico-mechanicorum solutiones, quæ Analyseos applicationem insinuant, qualis in Mathesi sublimiori requiritur; ut adeo artem doceamus per exempla, quemadmodum in Algebra fecimus. Quemadmodum adeo, cum de studio Algebræ ageremus, docuimus quomodo annotanda sint artificia in futurum usum, & hinc inde memoriæ infigenda theoremata, quæ analytice eruuntur; ita utrumque etiam quoad problemata in Mechanica soluta notandum. Prolixum nimis foret, si eadem industria, qua in explicando Algebræ studio usi sumus, hic quoque singula perlustrare vellemus. Quamobrem hoc propriæ lectoris ad superiora satis attenti meditationi relinquimus.

§. 260. Denique demonstrationes syntheticas analyticis miscuimus; cum ad utrumque genus præparare voluerimus lectorem nostrum. In demonstrationibus autem syntheticis accuratam servavimus formam, quam vi regularum logicarum habere debent: id quod facile experietur, qui easdem eodem modo resolvere voluerit, quo supra geometricas resolvere docuimus. Proposuimus quoque demonstrationes completas, ne quid divinandum lectori relinquatur; quemadmodum faciunt qui peritis scribunt; ac ideo citamus, quæcunque ex Arithmetica & Geometria elementari sumuntur; ne a studio Mechanicæ arceantur, qui Mathesin puram nondum adeo familiarem experiuntur, ut per se assequantur, quæ ex anterioribus supponuntur. Ac idem observamus in problematum analytica resolutione; ne quid desit, quod ad facilitandum eorum intellectum conducere possit. Neque enim hoc pacto solum consequimur, ut lector nostrorum Elementorum, absque multo laboris ac temporis dispendio, addiscat quæ discenda sunt; verum etiam ut meditationibus consummatis adsuescat, quibus in Philosophia, & superioribus, quæ dicuntur, Facultatibus opus habet.

CAPUT VI.

De Studio Hydrostaticæ, Aërometriæ & Hydraulicæ.

§. 261. Hydrostatica tota cognitu utilis iis, qui praxi Mechanicæ student. Sufficit autem iisdem primus cognitionis gradus. Enimvero ne sensus theorematum videatur obscurus, singula exemplis numericis illustranda. Ex. gr. Theorema 14, §. 55, hujus tenoris est: *Corpus specifice gravius, in fluido leviori, eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.* Ponatur itaque corpus specifice gravius, quod aquæ immergitur, esse cubum, cujus latus unius pedis. Cum juxta MORLANDUM (§. 65) pes cubicus aquæ sit 70 librarum, cum 2 unciis; quodlibet corpus, aqua specifice gravius, amittet pondus 70 librarum & 2 unciarum. Quodsi ergo totum pondus fuerit 100 librarum; intra aquam suspensum non erit nisi 29 librarum, 14 unciarum. Siquidem veritatem principiorum hydrostaticorum a posteriori cognoscere volueris; facillime singula experimentis comprobari possunt, qualia descripsi Tomo primo Experimentorum idiomate patrio evulgatorum. Theoremata, quæ capite primo de corporum gravitate & levitate specifica leguntur, solis exemplis numericis illustrari sufficit. Ex. gr. Theorema 1, §. 17, tale est: *Si duo corpora eandem densitatem habuerint; massæ sunt ut volumina.* Sumamus adeo duos dari globos plumbeos, quorum unus 5, alter 9 librarum. Quoniam massæ, seu quantitates materiæ, æstimantur pondere, quemadmodum in vulgus notum est; erunt etiam volumina, seu magnitudines horum globorum, ut 5 ad 9; nempe si magnitudo minoris divisa concipiatur in partes quinque æquales, istiusmodi partium 9 erit magnitudo majoris. Quodsi ergo magnitudo unius constiterit in mensura absoluta, veluti si detur in digitis cubicis Rhenanis; per regulam trium invenietur in eadem mensura alteræ. Istiusmodi exempla simul ostendunt theorematum usum, quem facere possunt, qui praxi operam dant. Erunt autem tanto utiliora, & tanto certiorem spondent usum in praxi, si fuerint vera, numeris per experimenta definitis.

§. 262. Multum quoque usum habet Hydrostatica in Philosophia naturali; cum multorum phænomenorum inde reddatur ratio. Quamobrem si quis Mathematum imperitus ad Physicam accedit, principiorum tamen hydrostaticorum ignarus esse

esse non debet. Consultum igitur est, ut primum saltem cognitionis gradum acquirat, eadem observans, quæ modo præcepimus (§. 258). Inprimis autem qui Physicæ operam navare decrevit, principia hydrostatica, experimentorum fide, tanquam vera amplecti, sibique familiaria reddere debet. Experimenta huc facientia dabimus suo loco, quando ordo in Philosophia nos ad experimenta physica describenda, & principia quæ in scientia naturali usui sunt, inde stabilienda deducet. Quinam vero sit horum principiorum in Philosophia naturali usus, suo patebit loco, ubi eandem eadem methodo trademus, qua hactenus in Metaphysica usi sumus, & nunc in Philosophia practica utimur. Quodsi quis in omni Mathesi fuerit prorsus peregrinus ac hospes, historicam tamen propositionum hydrostaticarum cognitionem acquirere valet, observans ea quæ de primo cognitionis gradu supra, capite primo docuimus, & breviter præcedente paragrapho annotavimus; modo sibi terminos quosdam perspectos reddat: id quod facile fieri poterit, si indicis auxilio evolvat definitiones, quibus explicantur; veluti quid sibi velit ratio composita, quid directa, quid reciproca, qui termini in Arithmetica explicantur. Sane etiam Mathematum imperitus terminis tamen mathematicis uti debet, quoties aliis verbis mentem suam commode exprimere non licet, seu quoties loquendum de iis quæ ad objectum Mathematicorum spectant; quemadmodum Physicus terminis Medicorum utitur, si de rebus ad Medicinam pertinentibus ipsi dicendum. Qui enim de re quadam loqui vult, nosse quoque debet nomen ejus.

§. 263. Equidem demonstrationes hydrostaticæ nihil prorsus habent difficultatis; præsertim si quis in anterioribus, multo difficilioribus, jam fuerit versatus; negandum tamen non est, quod, cum subsidio figurarum destituamur, quæ imaginationem juvant, termini generales, quibus hic utimur, eas reddant captu difficiliores, quemadmodum ipsas propositiones intellectu. Consultum igitur est, ut demonstratio applicetur ad casum particularem, quemadmodum fecimus in theoremate 14, §. 55, ubi pro corpore specifice graviori sumsimus cubum pollicarem plumbeum, pro fluido leviori aquam; adeoque pro volumine cubum pollicarem seu digitum cubicum. Hoc pacto enim idea imaginationi suggeritur, qualem in Geometria sistit figura. Immo si ita visum fuerit, schema quoque delineari potest, quod cubum intra aquam in vase vitreo suspensum repræsentat. Neque vero verendum est, demonstrationibus hoc pacto detrahi suam universalitatem, & probato casu particulari, argumentando a particulari ad universale, colligi veritatem theorematis universaliter

ſaliter enunciati. Etſi enim idea, ad quam dirigitur demonſtratio, repræſentet caſum maxime particularem; cum tamen in demonſtrando non ſumamus niſi univerſalia, quæ inſunt, ut eodem ſucceſſu particulare quodcunque aliud in illius locum ſurrogari poſſit; quod ex univerſalibus concluditur utique univerſale eſt. Sane in Geometria quoque, figura ad quam refertur demonſtratio, ſingulare quid eſt, cujus idea particulare refert, v. gr. triangulum, cujus anguli ſunt datæ magnitudinis, & latera in data quadam ratione. Enimvero cum non ex particulari, ſed univerſali, quod ideæ ineſt, procedat demonſtratio; univerſalitati non officit, quod, dum intellectus concipit univerſale, in imaginatione hæret idea quædam ſingularis, quæ caſum quendam particularem repræſentat, quoad ea quæ ipſius vi facile diſtinguuntur, nudo reflexionis actu accedente. Quamdiu in ratiocinando nonniſi vocabulis utimur, univerſalia ab imaginibus ſeparare non licet; quippe quæ non intelliguntur, niſi quatenus univerſalia in ſingularibus, ſeu imaginibus, intuemur. Hæc ſatis aperta ſunt iis, qui in Pſychologia noſtra fuerunt verſati. Ceterum eodem artificio utendum eſt in Phyſica, ſiquidem demonſtrationes facilitare volueris, quales hactenus dare neglexerunt Phyſici. Etſi enim hoc intenderit HONORATUS FABRY, qui in præfatione methodum ſibi optime perſpectam, immo tritam affirmat; ſi tamen in iis, quæ mathematica non ſunt, prætenſas demonſtrationes examines; quantum diſſideant a genuina earum forma, ſuperiorum gnarus facile deprehendet. Eidem quoque artificio locus eſt in ipſa Philoſophia practica, ſi caſum theorematis, vel problematis, exemplo quodam, ſive vero, ſive ficto, explices, quod imaginem quandam imaginationi præſentem ſiſtit; & ad idem demonſtrationem referas, quemadmodum in Geometria ad figuras; quatenus nempe in imagine, quæ exemplum repræſentat, attentionem non dirigis niſi ad univerſalia, quæ hypotheſis theorematis vel reſolutio problematis continet. Immo in ipſis Metaphyſicis idem imitari licet; quidni debemus? quamdiu deſideratur Characteriſtica generalis, vi cujus notiones abſtractæ qualitatum ab imaginibus ſeparantur, & calculus qualitatum a calculo magnitudinum utique diverſus, quem literalem vulgo vocamus, ut characterum combinationes in locum ratiociniorum ſuccedant. In hiſce enim continetur Algebra philoſophica, cujus aliam prorſus ideam ſibi finxit ROBERTUS HOOKE in Poſthumis, & quam ſpecioſam generalem appellavit LEIBNITIUS. Sed de hac dixi, quæ ſufficiunt, ut intelligantur termini, in Pſychologia empirica.

§. 264. Elementa Aërometriæ eo fine conſcripſimus, ut ſpecimine quodam

dam non admodum difficili doceremus, quomodo Mathesis ad experimenta applicetur; & ideam quandam cognitionis mathematicæ in Scientia naturali animo legentium insinuaremus; simulque usum Algebræ in Physica, exemplis non nimis difficilibus, demonstraremus. Cum postea Elementa Matheseos universæ ederemus, Aërometriam in numerum disciplinarum mathematicarum referre nulli dubitavimus; præsertim quia principiis ejus opus habemus in Hydraulica, quæ dudum inter disciplinas mathematicas locum obtinuit. Eodem nimirum jure, quo Hydrostatica, & Mechanica, immo etiam Optica, pro partibus Matheseos habentur; Aërometria quoque pars ejusdem habetur. Quamobrem facile patet, hanc Matheseos partem inprimis commendandam esse iis, qui Scientiæ naturali operam navare decreverunt; maxime ubi in cognitione philosophica subsistere non voluerint, sed ad mathematicam ascendendi animum habuerint. Supponit autem Hydrostaticam, cujus principia ad aërem, tanquam fluidum grave, applicantur. Quamobrem illi studere ante debes, quam ad Aërometriam accedas. Supponuntur etiam pauca ex Mechanica, quemadmodum ex citationibus videre est. Etsi autem Aërometria potissimum ad cognitionem naturæ mathematicam manuducit tyrones; in genere tamen docet, quomodo Physica methodo demonstrativa tractari debeat; quatenus in ea etiam continentur, quæ absque principiis mathematicis demonstrantur. Discimus præterea ex ea, quamvis in reliqua Philosophia cognitio philosophica a mathematica separari possit, in Physica tamen, nisi certitudini deesse velis, fieri non posse, quin subinde nonnulla ex principiis mathematicis demonstrentur.

§. 265. Quibus sola praxis satisfacit, illis inservient problemata de antliæ pneumaticæ, barometrorum, thermometrorum, & hygroscopiorum constructionibus, una cum scholiis, quibus horum instrumentorum usus dilucidatur. Non tamen negligenda sunt theoremata & corollaria, quibus tum fabrica, tum usus istorum instrumentorum perfectius intelligitur. Definitiones quoque expendendas esse per se patet. Cum in Elementis Matheseos Germanicis ea potissimum tradiderimus, quæ ad praxin faciunt, etsi oculatam, non omissis scilicet demonstrationibus; ex Aërometriæ quoque Elementis ea excerpsimus, quæ praxin propius respiciunt, & ad theoriam uberiorem præparant lectorem ex Latinis deinceps hauriendam.

§. 266. Inprimis autem Aërometria inservire potest illis, qui ad tertium cognitionis gradum contendunt. Si enim animum ad ea attendunt, quæ sunt methodi; ideam quandam exemplarem applicationis Matheseos puræ, Algebræ præsertim, ad experi-

perimenta & observationes inde haurient; ut in cognitione rerum naturalium certo tramite progrediantur. Multo enim clarius etiam tyrones hinc perspiciunt utilitatem cognitionis mathematicæ, tum ad certitudinem in Scientia naturali consequendam, tum ad praxin accuratissime exercendam, quam ex sublimibus istis problematis Physico-mechanicis, qualia in Mechanica complura explicavimus. Quamobrem cum pauca sint, quæ ex mechanicis in Hydrostatica & Aërometria sumuntur, demonstrandi principia, non inconsultum erit, si qui ex Mechanica tantummodo principium de æquilibrio solidorum perspexerunt, sepositis ceteris, ad Hydrostaticam & Aërometriam statim se conferant. Quodsi enim, in hisce disciplinis intellectu non adeo difficilibus, applicationem Matheseos puræ, & Algebræ inprimis, ad Naturæ cognitionem didicerint; minus difficultatis experientur in sublimioribus, quæ in Mechanica traduntur. Non est quod objicias, Elementa Matheseos cum sint in tyronum gratiam conscripta, ut scientiam inde hauriant, in iis quoque faciliora difficilioribus fuisse præmittenda, adeoque Elementa Hydrostaticæ & Aërometriæ Elementis Mechanicæ fuisse anteponenda. Etenim methodus studendi non per omnia consentit cum methodo tradendi disciplinas, & eas sibi mutuo subordinandi, atque in singulis veritati unicuique locum suum assignandi. Nimirum qui in scientiis operam navat a facilioribus incipit, & inde continuo ad difficiliora progreditur; quam legem præscribit methodus studendi. Ast disciplinæ integræ, & in iis veritates singulæ eo ordine collocandæ, ut sequentia ex antecedentibus intelligi & demonstrari possint. Non autem semper contingit ut disciplina, quæ continet intellectu faciliora, non dependeat ab alia, in qua occurrunt multo difficiliora. Unde methodo studendi convenit, ut difficilia initio seponantur, & ad faciliora properetur. Immo hac de causa, in gratiam primorum tyronum, conscribuntur compendia; in quibus nonnisi facillima & scitu maxime necessaria continentur; ut animum imbuant principiis, & ad profundiora haurienda præparent. Memini me olim cum disciplinis operam navarem, iis quæ captu difficilia videbantur non immoratum fuisse, sed ad sequentia progressum, si vel maxime eorum veritas ab istis penderet: quando enim postea, sequentibus intellectis, ea denuo expendebam, sine ulla mora obvium erat, quod antea impervium videbatur. Nec ignoro rationes, cur hoc contigerit, quippe quas Psychologia suppeditat, quas tamen hic commemorari parum refert. Absit itaque, ut, ubi quædam a te percipi non posse tibi videtur, de viribus tuis desperans, efficiaris studii desertor.

Nocet

Nocet non minus desperatio, quam nimia de viribus suis confidentia; nec ardor sciendi, qui accendere debet cupiditatem discendi, producendus in nocumentum.

§. 267. Hydraulica olim machinarum hydraulicarum & fontium salientium constructione tota absolvebatur, atque adeo non erat nisi pars Matheseos practicæ. Enimvero, postquam theoria Mechanicæ ad omnem motum solidorum fuit extensa; in Hydraulica quoque in motum fluidorum inquirere cœperunt Geometræ. Unde hæc Matheseos pars longe aliam induit formam; qua etiam sese commendat Theoristis, quibus nauseam movet praxis; ne quid commune habere videantur cum hominibus, quibus natura manus loco ingenii dedisse censetur. Nos & theoriam, & praxin æstimamus; quamvis non eodem, sed suo unamquamque pretio, ut utrique suus habeatur honor. Quamobrem in Hydraulica quoque praxin cum theoria copulavimus, nec hanc illa dehonestari opinamur. Etsi enim Mathematicus, Geometra præsertim profundus, qui arduis meditationibus sufficit, longo intervallo post se relinquat machinarum fabrum, & hic perperam pro Mathematico habeatur; non tamen ideo praxis contemnenda; quin potius Geometra profundis suis meditationibus hunc fructum deberi agnoscere debet, ut illa perficiatur. Ex Hydraulica facillime perspicere licet, quod auxilio Geometrarum indigeant, qui praxi operam navant. Exempli loco esto determinatio situs alarum molendini vi venti agitandi (§. 316 *& seqq. Hydraul.*). Quodsi non deessent, qui inventa Geometrarum profunda ad praxin communem aptarent, illud adhuc magis pateret. Dolendum vero, quod nemo ea de re cogitare velit.

§. 268. Qui soli praxi operam navant, iis sufficit, ut distincta notione constructionem machinarum hydraulicarum & fontium salientium animo concipiant. Non tamen inconsultum est, ut theoremata quoque, sive synthetice demonstrata, sive analytice investigata, percurrant; visuri num in iis quid contineatur, quod praxin juvet. Idem quoque facere tenentur, ubi praxin desiderant oculatam, hoc est, rationem quandam eorum perspicere volunt, quæ faciunt; ne subinde cœcutientes in praxi aberrent. Exemplum illustre habemus in siphonibus, quos aquis per montium vertices in oppositam planitiem deducendis sufficere existimarunt, qui causam ascensus in crure breviori ignorarunt (§. 68 *Hydraul.*). Istiusmodi exemplis convincendi sunt, qui theoriam omnem contemnunt, quantum sibi noceant, si ne historicam quidem ejus notitiam sibi comparare velint. Quamobrem in genere suademus, ne illi, quos praxis juvat, theoriam Matheseos

prorſus negligant, ſed primum cognitionis gradum ſuum eſſe credant. Ipſo nimirum uſu experientur, quænam hinc utilitas in eos ſit redundatura.

§. 269. Theoria non modo Hydraulicæ, verum etiam praxis multa continet, quæ uſui eſſe poſſunt in Phyſica. Quamobrem ſi quis, vel maxime ſe minus aptum ſentiat ad demonſtrationes & reſolutiones analyticas capiendas, qui Scientiæ naturali incumbere decrevit; ei tamen maxime commendanda eſt hiſtorica ſaltem Hydraulicæ cognitio. Enimvero quia in Scientia quoque naturali methodo demonſtrativa utendum, ſi certitudinis metam attingere velis, quantum datur; conſultius omnino eſt, ut demonſtrationes quoque expendat. Et qui Matheſin ad Phyſicam applicare voluerit; ei huic inſtituto non minus inſervire poterit Hydraulica, quam Aërometria; ut, quæ paulo ante de hac dicta ſunt, ad hanc quoque applicanda veniant.

§. 270. Hydraulica autem, ſive theoriam, ſive praxin ſpectes, attentionem eorum meretur, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Ubivis enim annotare licet artificia heuriſtica, quibus feliciſſime uſi ſunt, aut uti ſaltem potuerunt inventores veritatum tam theoreticarum, quam practicarum. Cum de Algebræ ſtudio ageremus, ad nauſeam forſan inculcavimus, qua attentione artificia iſta ſint detegenda, ut in caſu ſimili poſthac iiſdem utaris. Quamobrem nolumus hic ad particularia deſcendere; ſed nobis ſufficit monito generali excitaſſe attentionem, quam afferre debent, qui Artem inveniendi curæ cordique habent. Ne tamen quis exiſtimet, laudari artificia, quæ in Hydraulica non reperiuntur, ſingularia; exempli loco ad unum provocare licet; nimirum quo ad menſuram reducuntur, quæ menſuram reſpuere videntur. Obtinet hoc in doctrina de curſu fluminum; ubi, cum aqua omnis per totam ſectionem non eadem celeritate fluit, aquæ per eandem fluenti tribuitur celeritas quædam media, qua ſi per totam ſectionem flueret, eodem tempore tantundem per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur; & quomodo media iſta celeritas inveniri poſſit docetur. Ceterum ex ſuperioribus abunde conſtat, nos ubique in ſtudio Matheſeos urgere diſtinctam eorum cognitionem, quæ actu reflexo intellectus detegenda præcipimus; cum id maxime conducat ad recte philoſophandum: quem finem intendimus, dum in ſtudio Matheſeos, intellectus perficiendi cauſa, verſamur.

CAPUT VII.

De Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ.

§. 271. IN Optica strictiori sensu sumta pauca occurrunt, quæ ad praxin faciunt. Præter ea enim, quæ de camera obscura (§. 79 *Opt.*) & de quadrato geometrico ejusque usu (§. 172 *& seqq. Opt.*) & tessellatis imaginibus construendis (§. 312 *Opt.*) docentur, nonnisi problemata nonnulla de magnitudine visa *cap.* 5. & theoremata nonnulla de lumine Solis per foramen angustum radiante *cap.* 6, praxin directe respiciunt. Palmaria praxis Opticæ directæ in Perspectiva continetur. Quoniam tamen indirecte omnia, quæ de visu demonstrantur, usui esse possunt, qui praxi catoptrica & dioptrica delectantur, & quos exercitia Perspectivæ juvant; non male sibi consulunt, qui, si non omnium, præcipuorum tamen theorematum opticorum cognitionem historicam acquirere student.

§. 272. Qui ad Physicam animum appellunt, iis studium Opticæ maximopere commendandum. Non tamen sufficit nuda ejus cognitio historica, quam iis commendavimus, qui praxi student (§. 271); sed requiritur scientifica, quæ non sine accurata demonstrationum evolutione acquiritur. Visus phænomenon naturæ est; ad objectum adeo Physicæ, rerum naturalium scientiam, referendum. Nec minus lumen, umbra, & colores ad idem spectant, quæ hic tanquam visibilia considerantur. Etsi enim, in Mathesi, potissimum ratio habeatur cognitionis mathematicæ; ut tamen hæc in potestate sit, multa declarantur, quæ explicare Physici est; quemadmodum & modum visionis Physicus explicare debet. Quodsi ergo, in Optica, ea animi attentione utaris, quam hactenus in ceteris disciplinis mathematicis commendavimus; ex hac Matheseos parte discere licebit, quomodo res naturales sint explicandæ, ut certam earum cognitionem acquiras. Dum vero Geometria elementaris applicatur ad phænomena visus accurate determinanda; Optica prima & facillima cognitionis mathematicæ rerum naturalium exempla exhibet. Quamobrem si quis nullam adhuc hujus cognitionis habeat ideam, is omnium facillime ex Optica eandem hauriet. Unde suademus, ut, quamprimum principiis Arithmeticæ, Geometriæ elementaris, ac Trigonometriæ planæ imbutum habet animum, ad lectionem Opticæ accedat, intellectu multo faciliorem, quam Mechanica, Hydro-

droſtatica, Aërometria, & Hydraulica, ac præterea jucunditate ſua animum lectoris in ſe trahentem. Accedit quod ex Optica etiam innoteſcant fallaciæ viſus, a quibus ſibi cavere debet Naturæ ſcrutator, ab obſervationibus inquiſitionem omnem exordiens.

§. 273. Cum Perſpectiva ſit praxis Opticæ directæ, qua docetur delineatio objecti cujuslibet in tabula, quale, ad datam diſtantiam, & in data altitudine oculi, ſuper tabula tranſparente inter ipſum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta, apparet (§. 1 *Perſpect.*); qui ſolam praxin curant, ſchemata juxta ea, quæ in ſingulis problematis præcipiuntur, delineare, & deinceps in aliis figuris delineandis imitari debent. Quodſi quis in Architectura fuerit verſatus, exempla quoque inde petere poteſt, ac debet. Exercitia hæc facilitabis, ſi Anonymi Galli *Perſpectivam practicam*, cujus ſupra in recenſione Autorum c. 8, §. 23 mentionem injecimus, in ſubſidium adhibeas, & deinde exempla ex ANDREÆ PUTEI *Architectura Pictorum & Sculptorum* (§. 24 *cap. cit.*) petas. Satisfacient ubivis regulæ, quas dedimus. Hic labor continuandus, donec habitum conſequaris. Nemo autem non videt, Artem pictoriam cum praxi Perſpectivæ eſſe conjungendam. Hæc enim ad illam perficiendam unice tendit. Qui vero nonniſi ſcientiam expetunt, iis ſufficit demonſtrationes praxium percepiſſe, quas in uſum potiſſimum Philoſophorum addidimus; quorum cum ſit rationem reddere eorum quæ ſunt atque fiunt, rationem quoque perſpicere debent delineationum objecti cujuſcunque juxta regulas Perſpectivæ factarum. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, iis notandum eſt artificium, quo tota Perſpectiva in poteſtatem Geometræ redacta (§. 2 *Perſpect.*), & praxin mechanicam eodem fundamento nixam, quam problemate primo expoſuimus, conferant cum regulis geometricis, quæ in ſequentibus problematis exponuntur; ut applicatione Geometriæ praxis perficiatur, & certa ſcientia eorum acquiratur, quæ nonniſi confuſe percipiuntur. Eodem fine conducunt, quæ de anamorphoſibus capite ultimo proponuntur.

§. 274. Catoptrica phænomena viſionis reflexæ demonſtrat, quæ fit ope ſpeculorum. Specula communiſſima ſunt plana, quorum ideo uſus ceteris præfertur, quia objectum ea forma & magnitudine ſpectandum exhibent, quale & quantum eſt; ut adeo teipſum videre ac contemplari poſſis. Viſio reflexa variat pro diverſitate ſuperficiei reflectentis: unde alia ſunt ſpeculorum planorum, alia concavorum, alia convexorum, alia ex hiſce compoſitorum phænomena. Cumque figuræ concavæ ac convexæ in infinitum varient, phænomena quoque in infinitum variare debent.

debent. Artifices hactenus parare nequeunt nisi specula plana, convexa sphærica, cylindrica, & conica, concava-sphærica, & cylindrica; prismatica enim & pyramidalia ex planis componuntur. Quamobrem contenti sumus horum speculorum phænomena demonstrasse, quæ ante experientia innotuisse, quam via demonstrationis in eadem inquisiverint Mathematici, facile largior. Fuere tamen artifices, qui specula parabolica conficere conati sunt. Unde horum quoque mentionem quandam injicere voluimus. Etsi autem specula plana sint quotidiani usus, ex eorum tamen combinatione, pro diverso ad se invicem situ, inexpectata prorsus prodeunt phænomena; quæ non modo delectant, sed ignaros quoque in admirationem rapiunt, non sine delectationis incremento. Inserviunt etiam variis technasmatis specula cetera; quæ, etsi ad delectandum fuerint excogitata, seriis tamen inserviunt meditationibus Philosophi, quippe naturam imitantis, quæ serio agere solet, etiam dum pueri ludunt. Quamobrem nec piguit technasmata ista variis speciminibus illustrare. Et quoniam in omni Mathesi praxin cum theoria conjunximus, idem quoque fecimus in Catoptrica. Qua de causa, non modo explicavimus technasmata, quæ ex theoria Catoptricæ demonstrantur, & adeo a priori deducuntur; verum etiam modum specula conficiendi: neque enim solum dedecet Mathematicum ignorare, qua arte prodeant specula, quorum phænomena demonstrat, etsi in demonstrationibus sumere possit ac debeat speculorum figuram; verum etiam hoc nosse utile est, ubi theoremata a se demonstrata per experientiam ad examen revocare voluerit. Quoniam nimirum in demonstrationibus suis supponit in rigore geometrico figuras speculorum; si de consensu demonstrationum & experimentorum judicium exactum ferre voluerit, nosse utique debet, ad quam perfectionem ars perducta fuerit, & num ea perfectionem ulteriorem recipere queat. In Mathesi mixta plurimum tribuimus connubio experientiæ ac rationis; quo consensus experimentorum & demonstrationum innotescit, & quod tantopere commendamus per universam Scientiam naturalem. Nihil adeo prætermittendum erat, quod eo ducere poterat.

§. 275. Qui adeo solam praxin amant, illis satisfacient problemata, prætermissis demonstrationibus. Non tamen prætermittere debent theoremata, cum historica eorundem cognitio æquipolleat recensioni phænomenorum: si qua enim sunt, quæ nonnisi in usum demonstrandorum aliorum afferuntur, ea facile a ceteris distinguent. Nimirum consultum est, ut theoremata experimentis subjiciant; ne omni prorsus certitudine destituatur cognitio: tumque

pate-

patebit, quænam ſint ea, quorum cognitio ſcitu neceſſaria ac utilis, etiam iis quos ſola praxis juvat. Quid quod in numero quoque theorematum ſint haud pauca, quibus in praxi locus eſt, aut quæ ad praxes transferri poſſunt. Exempli loco eſſe poteſt theorema 11, §. 71, vi cujus §. 73, exhibetur globus deſcendens in plano inclinato tanquam aſcendens in verticali. Catoptrica praxi abundat, atque hoc nomine ſeſe commendat omnibus, quotquot eandem amant, iis præſertim qui quærunt, quod delectat.

§. 276. Inter ſpecula inprimis ſeſe commendant ſphærica concava; non ſolum propter phænomenorum prorſus ſingularium raritatem; verum etiam quod ſint cauſtica, ſeu uſtoria, & lumini intendendo inſerviant. Specula cauſtica præſertim majora uſum habent in experimentis phyſicis, qualia deſcribuntur in ſchol. 4, probl. 22, §. 221, immo phænomena omnia viſionis reflexæ argumentum phyſicum ſunt, quorum adeo rationes Phyſicus reddere tenetur, etiamſi geometricas inſuper habeat demonſtrationes. Phyſicus phænomena ſumit tanquam a poſteriori cognita, & eorum rationem reddit. Mathematicus illa demonſtrat, ex ſuppoſita ſpeculi figura; vi legis reflexionis, ea deducens a priori, tanquam incognita ex cognitis. Atque adeo diverſo prorſus modo ſuo funguntur munere: quod dum uterque facit, manifeſta eſt differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam, hac in parte, intercedit. Ut autem certius conſtet Phyſico, quid ſumere liceat, theoremata & technaſmata catoptrica eum docent. Quemadmodum autem Optica patefacit fallacias viſus circa viſionem directam, quas utiliter cognoſcit Phyſicus, immo Philoſophus in aliis quoque Philoſophiæ partibus; ita Catoptrica revelat fallacias viſus circa viſionem reflexam, non minore utilitate agnoſcendas. Atque adeo patet, quomodo in ſtudio Catoptricæ verſari debeat Philoſophus, qui ab omni cognitione mathematica alienum habet animum: quem etſi non probemus, tolerandum tamen cenſemus, pro diverſitate ingenii humani; quantum abſque detrimento ſcientiæ fieri poteſt. Ceterum quæ de cognitione mathematica quoad viſionem directam modo annotavimus (§. 272); ea etiam de eadem quoad reflexam notanda veniunt.

§. 277. E re eſſe videtur, ut præjudicio occurramus, quo nonnulli ſibi mirifice placent, & cui alii applaudunt, quaſi ſingulare quoddam acumen proderet. Diximus paulo ante (§. 274), nos facile largiri, quod phænomena ſpeculorum innotuerint a poſteriori, antequam de iis a priori demonſtrandis cogitarent Mathematici. Non adeo dubito fore haud paucos, qui contendent demonſtrationes mathematicas ſuperfluas

fluas esse; immo qui hinc inferent inventa, quæ in Mathesi mixta celebrantur, deberi artificibus; a quibus postquam inventa fuerant, ea demum demonstrare conati sunt Mathematici, inventionis tamen gloria inter alios eruditos eminere gestientes. Memini hoc argumento arrogantiam Mathematicorum redarguere voluisse CLERICUM, cum HERMANNI Phoronomiam recenseret. Qua de causa desiderabat, ut Geometra præclarus significaret, quantum Scientia naturalis, & Ars facta sit locupletior, postquam abstrusas istas theorias orbi literato in opere suo propinasset. Artifices enim pro inventoribus habebat; Mathematicos vero demonstratores pronunciabat; qui nonnisi in artificum inventis ingenii sui vires exerceant. Non unum est, quod hic repono. Phænomena, ipsi etiam vulgo cognita, sumit Physicus & eorum rationem reddit: non tamen ideo inanis censetur ejus opera; propterea quod illa ante innotuerint quam de rationibus eorundem reddendis cogitavit Physicus. Eccur ergo inanem operam sumere, aut nihil præclari facere dicendus est Mathematicus, qui longe ulterius progressus, phænomena non sumit, sed ex iis, quæ sumi debent, via demonstrationis a priori deducit; ut certa sit etiam ejus cognitio, qui existentiam phænomeni nondum supponit? Notandum præterea est, phænomena haud raro a posteriori non satis determinate cognosci, quæ tamen accuratissime determinantur a Mathematico in suis theorematis. Accedit porro, quod Mathematicus non omnia phænomena jam ante norit, quam ea demonstrat; sed multa potius adhuc ignorata in apricum producat. Denique inventa, quæ haud raro casui debentur, imperfectiora ad majorem perfectionem perducit; aut, siquidem ulteriorem perfectionem non admittunt, ut idem certo constet demonstrat. Quid, quod hinc inde a priori quoque deducat technasmata, quæ tentando nondum fuerunt detecta, aut prorsus non potuissent detegi? Absit autem ut tibi persuadeas ea, quæ casu plerumque aut tentando reperta fuerunt, perficere minoris esse, quam illa reperire. Non semper valet illud pervulgatum: Inventis facile est addere. Inventa nondum æstimare didicit, qui ea aliunde quam ex usu facultatum, cui debentur, æstimat. HUGENIUS, qui horologia singulari pendulorum applicatione perfecit, longo intervallo post se relinquit primum eorundem inventorem; & demonstrationes, quas de tubo optico dedit in *Dioptrica*, multo majorem laudem pariunt, quam fortuita imperfecti inventio. Ut inventa, quæ casui accepta referenda sunt, vel tentaminibus laboriosis, perficiantur, inventis haud raro opus est, non sine summo acumine & maxima ingenii vi eruendis. Plurimum adeo falluntur, inventionis gloriam

gloriam non deberi nisi iis, qui primi in quidpiam inciderunt. Sed hæc evidentiora erunt, ubi Ars inveniendi eodem habitu fuerit investita, quo Logicam indutam dudum in scenam produximus; ut ex arte æstimare detur artificem; non vero, quemadmodum nunc plerumque fieri solet, ex eo, quod inventum ejus sit utile, vel quod sit inexpectatum, vel quod aliis fuerit inaccessum, vel quod in admirationem rapiat ignaros & ita porro.

§. 278. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, reperient in Catoptrica, sive theoriam spectes, sive praxin, quæ Artem inveniendi illustrant & amplificant; ubi in artificia inquirere voluerint, quibus aditus paratur ad ea, quæ inaccessa videbantur. Neque eum, qui in Physica feliciter progredi voluerit, ubi non minus applicatione Matheseos puræ ad phænomena naturæ, quam connubio experientiæ ac rationis opus est, pigebit eo modo perlustrasse Catoptricam, quem ad tertium cognitionis gradum acquirendum supra præscripsimus, & cum de studio Algebræ ageremus exemplis illustravimus. Quoniam vero nobis quoque propositum est usum Algebræ in Mathesi mixta ostendere; placuit sub finem adjicere Catoptricam analyticam, seu modum investigandi theoremata catoptrica per Analysin. Substitimus autem in iis speculis, quorum antea phænomena demonstravimus, more Veterum; tum ne tyrones universalitate ipsis inutili perplexi reddantur, tum quia solutiones particulares occasionem dedere universalibus in omni curvarum genere. Discentium enim, quibus scribimus, ratio habenda fuit.

§. 279. Erunt forsan, qui, cum viderint, Algebræ beneficio, nullo fere negotio patere, quæ more Veterum non sine multo apparatu demonstrantur; demonstrationes syntheticas inutiles existimabunt, immo prorsus damnabunt. Recolenda animo hic sunt, quæ supra (§. 100 *& seqq.*) monuimus, cum de studio Matheseos intellectus perficiendi causa ageremus; quem inter usus præcipuos referimus studio mathematico tribuendos, & qui multo latius patet quam usus reliquus omnis. Quamobrem qui hac intentione ad studium Matheseos animum appellunt, iis omnino maximopere commendandum, ne demonstrationes syntheticas negligant, etiam in Catoptrica, & demonstrationes catoptricas eadem industria resolvant; ut pateat earum forma in Logica præscripta, qua demonstrationes Geometriæ elementaris resolvi præcepimus; ut non modo idea exemplaris demonstrationis consummatæ, quam in Logica vocamus, reddatur illustrior, magisque indies confirmetur, verum etiam ut habitus juxta eam operandi in omni scientiarum genere perficiatur. Pudeat enim Philosophos, seculo tam illustri, quo scien-

tiæ mathematicæ ad tantum faſtigium evectæ, diutius in ancipiti hærere, &, dum Mathematici plena luce fruuntur, in tenebris palpitare.

§. 280. Dioptrica praxi multa abundat. Agit enim de viſione refracta, cujus multus uſus eſt in ſpectandis objectis remotis & vicinis exiguæ molis; quorum illa, ob diſtantiam, hæc vero, ob parvitatem, oculis ſeſe ſubducunt. Hinc, in hac parte Matheſeos mixtæ, præcipue agitur de tubo optico, & microſcopio. Tubi non minus optici, quam microſcopia, componuntur ex vitris lenticularibus arte parandis. Atque adeo ad praxin dioptricam ſpectat quoque ars poliendi vitra, quam adeo integro capite accuratiſſime explicavimus. Quoniam tubus opticus maximam utilitatem affert in obſervationibus aſtronomicis, ita ut ſine ejus auxilio Aſtronomia nondum ad eum perfectionis gradum fuiſſet perducta, ad quem eam hodie evectam cernimus; accurata lentium fabrica ipſis quoque Mathematicis curæ cordique eſſe debuit. Quamobrem non mirandum, Mathematicos etiam ſummos, veluti HUGENIUM, vitris poliendis operam dediſſe, nec eos piguiſſe praxin manuariam exercere, etſi in theoria augenda & amplificanda inter paucos eminerent. Ad praxin dioptricam ſpectant quoque perſpicilla, quæ quomodo Myopes & Presbytas juvent in videndis iis ad quæ oculorum acies non pertingit, in vulgus notum eſt. Dantur denique alia technaſmata dioptrica, & catoptrico-dioptrica, qualia nonnulla deſcripſimus, & plura apud alios, veluti TRABERUM & ZAHNIUM, deſcribuntur: quæ etſi nonnullis magis ludicra quam utilia videantur, & ad delectandum magis quam ad augendam ſcientiam compoſita; minime tamen contemnenda ſunt. Uſum enim præbent in experimentando haud raro prorſus inſignem. Exempli loco, provocare licet ad priſma trigonum; quod quantum adjumenti attulerit ad naturam luminis & colorum indagandam, ex præclaro opere Viri ſummi ISAACI NEWTONI clariſſime conſpicitur. Inprimis etiam attentionem merentur, quæ (§. 476, 477 *Dioptr.*) de laterna magica in microſcopium convertenda, & ad foramen cameræ obſcuræ lumine ſolari directo illuſtratum applicanda annotavi; in Experimentis autem idiomate patrio deſcriptis fuſius expoſui. Novi enim Virum quendam illuſtrem iſtiuſmodi microſcopium paraſſe, & inſignes prorſus ejus effectus, quos ego prædixeram, obſervaſſe. Qui adeo praxi operam navant, non modo ea, quæ de poliendis vitris, de conſtruendis teleſcopiis, microſcopiis, aliiſque technaſmatis larga manu traduntur, probe perpendere tenetur; ſed ut oculata ſit praxis, theoremata quoque de refractione luminis in lentibus opticis, præſertim de focis earundem, ſibi familiaria reddere debent,

bent, etsi demonstrationes insuper habeant. Clarissime omnium ex Dioptrica perspicitur, quam necessaria sit theoria ad praxin; nisi hæc multa imperfectione laborare debeat, nec in eadem committendi errores, qui evitari poterant. Huc igitur velim animum advertant, qui theoriam comtemnere solent. Velim etiam ut ad hæc animum attendant, quorum est theoriam ad praxin aptare; ut ad historicam ejus cognitionem pateat aditus Artis cultoribus ad praxin eandem applicaturis. Optandum enim foret, ut quis omnes theorias, quantumvis profundas, perlustraret, & quæ in Arte usui esse possunt excerpta, sine demonstratione, in usum Artis cultorum, exponeret; experimentis confirmanda, ubi id absque multo apparatu ac sumtu facile fieri potest. Quoniam tamen Geometræ in solvendis problematis physico-mathematicis quædam sumunt, quæ, quod non invita natura sumantur, non demonstrant; atque adeo idem ipsis subinde accidit quod GALILÆO circa resistentiam solidorum, ut ex assumtis recte quidem colligant, quæ inde sequuntur, hæc tamen ab experimento dissentiant, quod illa naturæ rerum minime conveniant; ideo consultum foret, ut in Physica veriori satis versatus in hypotheses Geometrarum accurate inquireret, ea, quæ certa sunt, ab incertis aut prorsus falsis separaturus; ne, dum praxin theoria perficiendi animus est, ea inculcentur, quæ eidem magis obsunt, quam prosunt; & artificum perspicaciorum judicio, cum theoriam fallere videant, hæc tandem magis in contemtum adducatur, quam ut eidem aliquod pretium statuatur. Etsi enim a particulari ad universale non valeat argumentatio, & præcipitantiæ in judicando tribuendum sit, si quis ea utatur; hæc ipsa tamen præcipitantia tanto excusatior est in artifice, qui quoad theoriam aliorum dictis habere debet fidem, consequenter judicium suum determinare nequit, nisi per notiones communes probabilitatis extrinsecæ.

§. 281. In Dioptrica explicatur visio refracta, ac inprimis ostenditur, quomodo refractio fiat in vitris politis. Quamobrem primo omnium loco inquirendum est in legem refractionis: quæ quomodo per experimenta eruatur, primo loco docendum duximus. Equidem hodie, postquam usus telescopiorum & microscopiorum invaluit, potissimum ratio habetur refractionis in vitro factæ; addidimus tamen etiam, quomodo sese habeat in aqua & aëre, propterea quod in Physica major est utilitas legis refractionis in aqua & aëre, quam in vitro factæ. Quamvis vero etiam ostenderimus, quomodo lex refractionis in genere per calculum analyticum eruatur; experimentis tamen supersedere minime possumus, cum ratio sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, quæ per calculum con-

stans

ſtans eruitur, non eadem deprehendatur in omni diaphano. Qui ergo ad ſecundum gradum cognitionis adſpirant, ea, quæ de refractione in genere capite primo docentur, probe expendere debent, quoniam hinc pendet certitudo ceterorum omnium, quæ in Dioptrica demonſtrantur. Quod demonſtrationes dioptricas attinet, non uno modo eaſdem contexere licet. Etenim, ſuppoſita lege refractionis, per calculum trigonometricum erui poteſt, quomodo fiat refractio in vitro cujuslibet figuræ, veluti in vitris utrinque planis, plano convexis, plano concavis, utrinque convexis, utrinque concavis & concavo-convexis ſive meniſcis. Idem reperiri poteſt per calculum algebraicum. Poteſt denique etiam geometrice demonſtrari, quod tanquam jam inventum ſupponitur, per legem refractionis, vi principiorum geometricorum, more Veterum. Ut igitur diverſos hoſce demonſtrandi modos lectorem noſtrum doceremus, nunc ad calculum trigonometricum, nunc ad algebraicum, nunc vero ad demonſtrationes geometricas Veteribus uſitatas recurrimus. In vitris politis, ex quibus tubi & microſcopia componuntur, & quæ ad alia technaſmata adhibentur, duplex occurrit refractio; altera, quæ fit in ingreſſu luminis ex aëre in vitrum; altera vero, quæ contingit in egreſſu ejuſdem ex vitro in aërem; atque adeo refractio luminis in vitris politis compoſita eſt. Ut tamen ea facilius intelligatur, primo loco docemus, quomodo refractio ſimplex fiat in ſuperficiebus tam planis, quam ſphæricis, cum cavis, tum convexis. Quodſi enim hæc principia fuerint cognita atque perſpecta; haud difficile eſt per ea demonſtrare refractionem duplicem, qualis in vitris politis occurrit. Enimvero quoniam nos principia dioptrica etiam uſui eſſe volumus in explicandis aliis Naturæ phænomenis; theoremata generaliter demonſtramus, ut ad quodlibet diaphanum applicari poſſint, modo ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum refracti in eodem diaphano per experientiam fuerit definita. Quia tamen in Dioptrica potiſſimum uſui eſt refractio in vitro facta, & in Phyſica frequentiora ſunt phænomena refractionis in aqua factæ; in corollariis, theoremata de refractione in vitro & aqua facta exhibemus. Non diffiteor, theoriam dioptricam eſſe ſatis diffuſam, ſi reſpicias uſum, quem habent vitra polita in tubis opticis atque microſcopiis, & aliis nonnullis technaſmatis; ſed quibus ſcientia, quæ ſola certitudinem parit, curæ cordique eſt, illis non videretur nimis ampla, etiamſi praxis inde pendens multis adhuc arctioribus limitibus conſtringeretur. Quod vero ſubinde calculo algebraico uſi fuerimus in demonſtrandis theorematis dioptricis, non alio fine factum eſt, quam ut demonſtra-

tiones redderemus faciliores & theoriam contraheremus. Neque vero opus est ad demonstrationes algebraicas intelligendas, ut quis in studio Algebræ multum diuque fuerit versatus. Sufficit, si prima saltem rudimenta non ignoraverit, ut adeo nemo jure conqueri possit, quasi hoc nomine Dioptrica multis facta sit inaccessa. Vix enim hodie ferendum est, ut, qui Mathesin addiscere voluerit, Algebram prorsus intactam relinquat: quæ potius commendanda venit iis, qui theoriæ non multum temporis impendere possunt, eam tamen ignorare nolunt. Non exigua voluptate animum sciendi cupidum demulcent demonstrationes dioptricæ; ut adeo theoria nemini videri possit molesta, nisi ab omni sciendi cupidine prorsus immuni. Notandum vero in Dioptrica non modo quæri, quomodo lumen refringatur in transitu per diaphana diversæ densitatis; verum etiam quomodo beneficio radii sic refracti videatur visibile: quod posterius inprimis nosse debemus, ubi phænomena tubi optici ac microscopiorum aliaque visionis refractæ demonstrare voluerimus. Quamobrem in theoria quoque demonstratur, quomodo appareat visibile per radios refractos visum. Unde lentium dioptricarum duplex est usus, alter, dum lumine per ea transmisso utimur, alter vero, dum per eas visibilia respicimus. Qui adeo utrumque usum certo cognoscere studet, is etiam omnem theoriam cognitam atque perspectam habere debet: neque enim theoriam dioptricam extendimus ultra usum, quem in praxi habet.

§. 282. Refractio luminis & visio refracta phænomena naturalia sunt, quorum adeo rationes reddere tenetur Physicus. Ex Dioptrica phænomena particularia multo accuratius addisci possunt, quam per observationes absque theoriæ dioptricæ subsidio innotescunt. Et si experimenta capere volueris ad phænomena utraque venanda; theoria Dioptricæ eadem dirigit, ut accurate cognoscantur. Quoniam in Physica phænomenorum rationes proximas ex aliis phænomenis reddimus; eo nomine Dioptrica ad scientiam naturalem plurimum affert adjumenti. Multa dantur naturæ phænomena, quæ a refractione luminis pendent. Eminent inter ea Meteora, quæ dicuntur, emphatica; quæ absque principiis Dioptricæ explicari nequeunt. Atque ea ratio est, cur subinde Mathematici de meteoris emphaticis, veluti de Iride, halonibus, parrheliis & paraselenis, in Dioptrica agant. Immo Dioptricæ theoria, si a telescopiis & aliis technasmatibus dioptricis recesseris, ad cognitionem naturæ mathematicam spectat. Quamobrem quæ paulo ante de eadem, quoad Opticam (§. 272) & Catoptricam (§. 276) monuimus; eadem quoque de Dioptrica tenenda sunt. Quamobrem

obrem qui ad Naturæ cognitionem mathematicam adſpirant, iis quoque commendamus, ut omnem Dioptricæ theoriam attenta mente perluſtrent. Quodſi enim in Optica, Catoptrica & Dioptrica didicerint, quomodo Geometria & Algebra ad Naturæ phænomena ſint applicanda, & quomodo cognitio mathematica differat a philoſophica, quidque ad perfectionem philoſophicæ conferat mathematica; ad altiora progredientes tanto minus difficultatis experientur. Extra omnem controverſiam eſt, prima cognitionis mathematicæ in Philoſophia naturali ſpecimina fuiſſe Optica, niſi forſan Aſtronomiam ipſis priorem agnoſcere volueris; quamvis noſtris demum temporibus, præſertim quod Dioptricam attinet, diſciplinæ opticæ magis fuerint excultæ, cum jam ſublimiora cognitionis Naturæ mathematicæ exempla proſtarent. Quodſi ergo a diſciplinis opticis exordiaris, ubi cognitionis hujus ideam animo complecti volueris, deinceps magis amplificandam per ea, quæ in diſciplinis mechanicis Tomo ſecundo Elementorum occurrunt: naturalem omnino dicendus es ſequi ordinem, quem tenuerunt primi inventores. Neque adeo dubitandum eſt, quin hoc pacto, a facilioribus ad difficiliora continuo progreſſus, multo intimius hunc cognitionis humanæ gradum inſpicias, quam ſi inverſo ordine, inſuper habitis primis inventis, ſtatim ad ſublimiora te conferas, ad quæ non patuit aditus niſi per faciliora inventoribus.

§. 283. Atque hoc ordine ſi progrediaris, haud parum quoque lucis affunditur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti. Cum enim ad Artem inveniendi exercendam certa quoque requiratur mentis habitudo, ea omnino omnium commodiſſime acquiritur eo modo, quo ſucceſſive, in diverſis licet ſubjectis, incrementa ſua cœpit. Sed de hoc ipſo plura mox nobis dicenda erunt, ubi de ſtudio Aſtronomiæ in uſum tertii gradus cognitionis agendum erit. Ceterum qui Dioptricam ea lege perluſtrare voluerit, quam pro acquirendo tertio cognitionis gradu præſcripſimus; is non inanem operam a ſe ſumi ipſo facto deprehendet. Probe notandum eſt artificium, quo lex refractionis analytice inveſtigatur (§. 36 *Diopt.*); tum quod in argumento phyſico adhibeatur principium a cauſa finali deſumtum, nimirum quod Natura agat via breviſſima, tum quod methodus de maximis & minimis ad problema phyſicum applicetur. Præterea conſiderandum, quod Matheſis requirat experimenta, ſi per ejus demonſtrationes aliquid in Phyſica accurate determinandum. Etenim per analyſin mathematicam ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti indeterminata prodit, quæ per experimenta deinde in quolibet diaphano determinanda. Etſi autem KEPPLERUS veram refractionis legem

gem non fuerit assecutus, cum rationem constantem quæsiverit in angulis, non in eorum sinibus; non tamen propterea attentione indignum est principium *Kepplerianum*, cum inde pateat, quomodo hypotheses vicarias, in locum verarum Naturæ, subinde surrogare liceat in cognitione mathematica; sive veras detegere non detur, sive eædem disquisitiones reddant molestiores; tum etiam quod inventum KEPPLERI ad veram legem refractionis inveniendam manuducere potuit SNELLIUM; quatenus constans quædam ratio inter angulum incidentiæ & angulum refractionis observatur, quamdiu anguli sinibus physice propemodum proportionales sunt: id quod tanto facilius succedere potuit, quia in ipsa Trigonometria in simili casu angulorum ratio substituitur rationi sinuum (§. 23 *Trigon.*). Et non minus demonstrationes, quam analysis dioptrica loquuntur, ubi Geometria ad Physicam applicatur, non semper observandum esse rigorem geometricum; ita ut lineæ v. gr. convergentes haberi possint pro parallelis, & anguli quantitate parva differentes pro æqualibus: id quod convenit approximationibus in Mathesi pura, & eandem cum hisce habet rationem. Quodsi singula eodem modo perlustrare velimus, quo in studio Algebræ explicando a nobis factum; multa artificia annotare licebit, quæ ad tertium cognitionis gradum faciunt. Sed nostrum jam non est in tantas ambages descendere, qui tantummodo monstramus viam, qua sit eundum. Non tamen nobis temperare possumus, quin unicum adhuc commemoremus. Nemo est qui nesciat, primam telescopii inventionem casui deberi; ejus autem perfectionem, maxima ingenii vi & acumine summo, a Mathematicis primi ordinis fuisse promotam. Fortuita telescopii inventio attento insinuat modum, quo in inveniendo casui obviam ire licet. Ac evidentissime hinc perspicitur, quod ea, in quæ casu incidimus, manum emendatricem & auxiliatricem expectent a scientia & arte inveniendi. Amplissimus sese hic aperit dicendi campus; sed eum ingredi prohibet instituti præsentis ratio. Quamvis autem in ipsis demonstrationibus dioptricis passim adhibuerimus calculum algebraicum, distantiam foci a lente determinaturi; id ipsum tamen non obstitit, quo minus doceremus, quomodo eadem analytice investigetur; non modo ut usus Algebræ in Mathesi mixta doceatur, verum etiam ut præstantia ejus appareat; cum theoremata in anterioribus operose demonstrata, quamvis ope calculi analytici fuerint contractæ demonstrationes, mira facilitate ex formula generali eliciantur: id quod extra Mathesin usui esse potest in speciebus ex dato genere determinandis. Cur vero solutionem dederimus particularem, quæ Dioptricæ sufficit, non

vero

vero universalem, sive figuram medii refringentis, sive ejus densitatem spectes, quod tanto facilius fieri poterat, cum dudum prostent solutiones generales, nec eædem supponant, nisi quæ in Analysi a nobis fuerunt tradita; ex iis liquet, quæ in superioribus jam annotavimus, cur solutiones particulares universalibus prætulerimus, in ipsa etiam Algebra, vel subinde universales nonnisi præmissis solutionibus in casu particulari subjunxerimus; ut adeo opus non sit hic repetere, quæ in anterioribus jam inculcata fuerunt. Ceterum hic quoque annotari poterat, quod, cum Dioptrica multis experimentis ansam præbeat; Ars quoque experimentandi lucem quandam hinc expectare possit. Enimvero cum suo tempore, quando nos ordo deducet ad experimentalem Philosophiam tradendam, ea de re ex instituto sit agendum; eidem in præsenti immorari non debemus.

§. 284. Antequam vero hinc discedamus, non inconsultum ducimus unum adhuc moneri Dioptricæ lectorem ad tertium cognitionis gradum adspirantem. Trigonometriam planam pro parte Artis inveniendi venditare solemus, aut, si mavis, pro methodo particulari investigandi veritatem latentem (§. 142). Unde studium trigonometricum commendamus iis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, non modo illis, qui ad tertium cognitionis gradum, in Mathesi adspirant (§. *cit.*). Non desunt, qui sibi persuadent, Trigonometriam ad Artem inveniendi parum conferre; propterea quod per eam tantummodo computentur exempla, non vero veritates universales eruantur. Hi facillime confutantur per problemata in Dioptrica trigonometrice soluta: apparet enim per Trigonometriam eadem inveniri, quæ per Algebram eruuntur. Quamvis vero opinio ista satis refelli poterat per hoc, quod ipsæ solutiones trigonometricæ problematum sint veritates generales, quæ per applicationem Trigonometriæ inveniuntur, & harum demum applicatione computari exempla; multo tamen clarius idem patet in Dioptrica, ubi etiam per computum trigonometricum eruuntur theoremata universalia Dioptricæ. Accedit, quod usus quoque Trigonometriæ in Philosophia naturali per Dioptricam elucescat. Ita ex ejus applicatione ad experimenta innotescit, quomodo lex refractionis ex. gr. in vitro detegatur, ut alia taceam.

CAPUT VIII.

De Studio Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ.

§. 285. TRigonometria ſphærica demonſtrari nequit, niſi præmittantur principia Sphæricorum, quæ etiam ante applicanda ſunt ad Aſtronomiam ſphæricam, quam calculo trigonometrico in eadem uti datur. Atque ea ratio eſt, cur Elementa ſphæricorum cum Trigonometria ſphærica conjunxerimus. Quamobrem qui cognitionis gradum ſecundum intendit, Elementa quoque ſphæricorum attenta mente perluſtrare tenetur, antequam ad problemata Trigonometriæ ſphæricæ accedat. Quoniam demonſtrationes ſyntheticæ ſunt, quales in Geometria elementari occurrunt; eodem quoque modo expendendæ, quo demonſtrationes Geometriæ elementaris reſolvere docuimus. Quamobrem iis, qui methodum demonſtrandi Veterum ſibi familiarem reddere volunt, & demonſtrationis legitimæ ideam exemplarem, quam imitentur extra Matheſin, majore luce perfundere geſtiunt, lectionem quoque Elementorum ſphæricorum commendamus, ſi vel maxime Trigonometriam ſphæricam attingere noluerint. Sunt dubio procul ſphæricorum Elementa pars Geometriæ, ſi non elementaris, certe ſublimioris, quæ de lineis curvis agit, quarum etiam in numero ſunt circuli in ſuperficie ſphæræ deſcripti. Mallem tamen eadem referre ad Geometriam elementarem, quia in hac non minus locum habet circulus, quam ſphæra. Sed ea de re cum nemine ſerram contentionis reciprocabimus: ſufficit demonſtrationes non eſſe difficiliores demonſtrationibus Geometriæ elementaris, ex cujus etiam principiis contexuntur; niſi forſan imaginatio hinc inde minus exercitatis negotium aliquod faceſſat; quod tamen evaneſcit, ubi figuris in plano delineatis ſubſtituas globum, in cujus ſuperficie circuli debito modo ſunt deſcripti. Et ut hoc faciant tyrones, omnino ſuaſerim, præſertim illi, quibus moleſtum accidit horum Elementorum ſtudium, ne ejus fiant deſertores. Philoſophis vero hinc diſcere licet, quænam differentia intercedat, ſi imaginatio juvet, non turbet operationes intellectus.

§. 286. Quodſi igitur quis nonniſi calculum trigonometricum ſibi familiarem reddere voluerit; is ex problemate primo §. 114 regulam catholicam de triangulis rectangulis probe perpendat, utque eandem intelligat, definitiones 9, 10 & 11, cum ſuis corollariis,

rollariis, expendat & quomodo ad omnes casus applicetur ex §. 116 *&* *seqq.* addiscat. Si numeri tantummodo varientur, exempla plura comminisci licet. Hæc calculi exercitia continuanda sunt, donec regulam catholicam in dato quocunque casu dextre applicare possit. Qui experiri voluerit, quantum Trigonometria sphærica per regulam catholicam facilitetur; eadem problemata more communi resolvat, quemadmodum in libellis aliis Trigonometriæ sphæricæ aut in Introductione ad Tabulas sinuum atque tangentium docetur. Ubi solutio triangulorum rectangulorum nihil amplius difficultatis facessit; addenda sunt problemata 20 *& seqq.* §. 158 *& seqq.* circa quæ eadem observanda, quæ de resolutione triangulorum rectangulorum monuimus. Nullus dubito fore, ut calculus trigonometricus absque ullo tædio addiscatur, nec majorem in eo difficultatem sentias, quam in Trigonometria plana. Quoniam multos a studio Astronomiæ practicæ abhorrere expertus sum; quod tædia calculi Trigonometriæ sphæricæ devorare cogerentur: omnem quoque operam navavi, ut Trigonometriam sphæricam redderem facilem quoad praxin, etsi theoria sit multo profundior, quam Trigonometriæ planæ.

§. 287. Trigonometriæ sphæricæ demonstrationes non modo supponunt theoremata sphærica seu Sphæricorum theoriam; sed propriam quoque theoriam habet, qua nituntur resolutiones problematum. Nimirum quemadmodum Trigonometria plana nititur theoria triangulorum planorum, seu rectilineorum, in plano descriptorum, quæ traditur in Geometria elementari; ita quoque Trigonometria sphærica pendet a theoria triangulorum sphæricorum, seu eorum quorum latera sunt arcus circulorum maximorum in superficie sphæræ descriptorum. Eam cum alibi supponere non potuerimus, in ipsa Trigonometria sphærica tradere debuimus; quemadmodum theoria triangulorum planorum in Trigonometria plana explicanda esset, nisi jam in Geometria elementari exposita fuisset. Quodsi dicas, theoriam triangulorum sphæricorum esse partem Elementorum sphæricorum, quemadmodum theoria planorum est pars Geometriæ planæ: mihi perinde erit, sive eam a Trigonometria sphærica separes eandemque tibi familiarem reddas, antequam ad hanc accedis; sive ipsam demum cum problematis, quorum solutiones inde pendent, addiscas; quamvis hoc posterius mihi videatur commodius minusque molestum, cum sic theoriæ statim pateat usus, nec difficilis præmittenda sit praxi faciliori. Theoriam autem Sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ plurimum commendamus iis, qui in Astronomia non modo ad secundum cognitionis gradum,

verum etiam ad ipsum tertium adspirant; consequenter omnibus, qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin addiscendam accedunt. Cum demonstrationes singulas eadem forma exhibuerimus, qua conspiciuntur in Geometria elementari, nisi quod nonnullæ in theoria Trigonometriæ sint prolixæ; si nostro more resolvantur, nihil difficultatis facessent, ut eadem deterreatur, qui a Geometria elementari ad sphæricam Trigonometriam statim accedit. Quodsi enim cuidam visum fuerit, neglecta Algebra & ceteris Matheseos mixtæ partibus, pergere in demonstrationibus Matheseos puræ methodo Veterum conditis, ut hanc magis subjiciat potestati suæ, nec ante ad analyticam Recentiorum accedat, quam ubi syntheticæ Veterum fuerit satis compos; is a Geometria Elementari & Trigonometria plana statim pedem promovere potest ad Elementa Sphæricorum & Trigonometriam sphæricam; cum nec hic supponantur principia, nisi quæ ex Trigonometria plana & Geometria elementari hausisti, nec alia demonstrandi methodus, quam qua ibidem usi sumus; ita ut, subjunctis Geometriæ elementari Sphæricorum Elementis, Trigonometriam sphæricam cum plana conjungere licuisset, quemadmodum vulgo a Trigonometriæ Scriptoribus fieri solet.

§. 288. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, iis studium Elementorum sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ commendandum. Etenim, sine principiis sphæricis & Trigonometria sphærica, nihil reperire licuit in Astronomia sphærica; multa etiam in Geographia ab hisce principiis pendent. Ipsemet expertus fui, cum studium Astronomiæ mihi videretur perplexum, ac tædiosum esset resolutiones problematum primi mobilis ex Autoribus petere; principiis sphæricis perspectis, nullo negotio per me ipsum eas fuisse consecutum, & beneficio illorum principiorum eas extemplo reperire potuisse, quando de iisdem cogitandum erat, etsi eas memoria non comprehendissem. Quamobrem si in Astronomia & Geographia perspicere volueris, quomodo resolutiones problematum fuerint detectæ; principia sphærica probe perspecta esse debent. Vi Trigonometriæ autem sphæricæ patet illatio, qua opus est, ut in casu particulari dato computatio legitime fiat, ope principiorum sphæricorum, triangulis & in iisdem datis detectis. Circuli, qui concipiuntur terminati in superficie sphæræ, oriuntur ex sectionibus sphæræ, quas omnes esse circulos theoremate 1, §. 13 demonstratur. Differt adeo Sphærica a Geometria plana, in qua circuli se mutuo secantes in eodem sunt plano, cum hic in diversis sint planis, omnes tamen terminentur in eadem superficie sphæræ. Unde facile patet, alium hic

requiri

requiri usum facultatum cognoscendi, quam in Geometria plana. Qui vero tertium cognitionis gradum acquirere studet, is utique distincte cognoscere tenetur usum facultatum cognoscendi in veritate investiganda requisitum; consequenter ubi novus quidam usus emergit, ad eundem animum attendere debet, ne attentioni suæ sese subducat. Talia autem inprimis scrutari debet, qui Artem inveniendi distincte cognoscere avet, & Mathesi quoque in usum Philosophiæ operam navat, ejusque studio intellectum perficere studet; consequenter promptum facultatum cognoscendi usum consequi conatur, quem habere possunt. Etsi autem intra cancellos, quos præfixit præsentis instituti ratio, nos continentes ad particularia non descendamus; non possumus tamen non excitare attentionem lectoris sciendi cupidi ad artificium, quo regula catholica Trigonometriæ sphæricæ fuit eruta; præsertim cum singula huc spectantia satis distincte explicaverimus & demonstrata dederimus. Elucet enim ex eo usus prorsus singularis fictionum ad formandos conceptus universales, sub quibus comprehenduntur, quæ, propter intrinsecam diversitatem, ad commune quoddam genus, seu universalem quandam notionem reduci minime posse videbantur. Etsi enim hujus artificii jam mentionem quandam injecerimus in Analysi; singularis tamen prorsus hic occurrit applicatio, ut aliam prorsus formam induat. Regulam catholicam non alio fine investigavimus, quam ut memoriæ succurreretur, regularum multitudine non obruendæ, & ut omnis applicatio Trigonometriæ secum ferat sensum certitudinis manifestiorem. Habemus igitur hic, quod imitemur in aliis disciplinis practicis, ad praxin omnem facilitandam. Quamvis enim dentur artificia adhuc alia, quibus idem præstari potest, nec semper recurrendum sit ad fictiones; sufficit tamen hoc exemplo nos moneri, cogitandum quoque esse in Disciplinis practicis de praxi per regulas catholicas facilitanda; immo & de theoria multiplici ad notiones universales reducenda, ut facilior evadat ejus ad humana negotia applicatio. Maximæ hoc ipsum utilitatis est, cum non omnium sit theoriam, quæ multitudine regularum abundat, ita memoriæ infigere, ut singulæ veluti sua sponte præsentes sistantur intellectui, quoties usus eas requirit, cum tamen ad recte agendum illis carere nequeamus. Mirabuntur forsan nonnulli, qui, cum Mathesin sibi soli discant, ad alia, quæ extra eam sunt, animum non divertunt, nos studium Matheseos explicaturos talia proferre, quæ cum eo nihil commune habere videntur. Enimvero qui animo recoluerit, quæ supra de studio Matheseos, intellectus perficiendi gratia instituendo, in medium attulimus, & cum eodem

ſtudium Philoſophiæ verioris, quam in operibus noſtris tradimus, conjunxerit, non habebit amplius quod miretur, utilitatem eorum, quæ hinc inde commendantur, reipſa experturus.

§. 289. Trigonometriam ſphæricam non explicamus, niſi in uſum Aſtronomiæ & Geographiæ. Quamobrem non plura tradimus, quam quæ huic fini ſatisfaciunt. Et quoniam Trigonometria ſphærica demonſtrari nequit, niſi ſuppoſitis principiis ſphæricis, nec applicari in Aſtronomia & Geographia niſi mediantibus his ipſis principiis; nec ex hiſce addidimus, niſi quæ huic ſcopo ſufficiunt. Etſi itaque Algebra ad doctrinam quoque Sphæricorum & Trigonometriam ſphæricam applicari poſſit; uſum tamen Algebræ in hac Matheſeos parte prætermiſimus, cum unice propoſitum nobis fuerit praxin Trigonometriæ ſphæricæ reddere faciliorem. Ne tamen quis exiſtimet, eum vel eſſe nullum, vel adeo difficilem, ut hactenus detegi non potuerit; provoco ad exempla, quæ dedit JACOBUS KRESA e Societate Jeſu in Analyſi ſpecioſa Trigonometriæ ſphæricæ, primo mobili &c. applicata, & ad hiſce illuſtriora, quæ extant in Commentariis Academiæ Imperialis Petropolitanæ. Problemata primi mobilis per Algebram ſoluta, ſi ad Geometriam puram reducuntur, non ſunt niſi problemata ſphærica. Geometræ ſane de Sphærica nunquam cogitaſſent, niſi problemata primi mobilis in Aſtronomia de ea cogitandi anſam dediſſent. Neque dubium eſt, initio hanc Geometriæ partem ab Aſtronomia ſphærica non fuiſſe ſeparatam, quemadmodum & ipſa Trigonometria non tradebatur niſi in Aſtronomia.

CAPUT IX.

De Studio Aſtronomiæ.

§. 290. STudium Aſtronomiæ multis ſeſe nominibus commendat omnibus, qui ad ſolidam rerum cognitionem adſpirant, ſive ſecundum cognitionis gradum, ſive tertium intendant; & inprimis ſi quis intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navet, ac ad ſcientiam naturalem excolendam animum appellere velit; immo ſi ſtudio medico ſeſe mancipandi animum habuerit. Diverſi admodum ſunt fines, cur quis ad ſtudium Aſtronomiæ accedit. Quare nec omnibus eodem modo in eodem verſandum, cum diverſos fines non eodem modo conſequi detur. Noſtrum igitur eſt docere, quid unicuique faciendum, ut finem a ſe intentum conſequatur.

§. 291.

§. 291. Sunt qui curiofitatis tantummodo gratia Aftronomiam addifcendam effe fibi perfuadent; cui tanto magis fatisfaciendum exiftimant, ne ignorent ea, quæ in Calendariis extant; non decere virum eruditum arbitrati, ut Calendarium quotidie in manu habeat, non tamen intelligat, quæ in eodem traduntur. Sunt alii, qui iftis oculatiores longius profpiciunt, & adolefcentibus ob curiofitatem commendant ftudium aftronomicum, ut eadem excitetur fciendi cupiditas & magis magifque inflammetur. Sane non alio fine in fcholis introductus eft JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus de fphæra; cui deinceps alii fubftituere alios libellos, ufum Globorum, & computum ecclefiafticum exponentes. Etfi enim ea fini etiam Theoricas Planetarum confignaverit PURBACHIUS; cum tamen Theorica magis conducere vifa iis, qui ex inftituto Aftronomiæ operam navaturi funt, quam promifcue omnibus, & ipfe PURBACHIUS potiffimum intenderit, ut ad ftudium aftronomicum fere neglectum ac defertum aditum aperiret, & animos juvenum ad idem perfequendum accenderet; Theorica ex fcholis profcripta in Academias relegata, ubi præter Profefforem Mathematum inferiorum, qui Mathefin puram, cum Geometria practica, & Staticæ elementis, interpretari debebat, etiam conftitutus Profeffor Mathematum fuperiorum, qui Aftronomiam cum Geographia, Chronologia, Gnomonica & Aftrologia doceret. Unde hodienum in Academia Wittebergenfi & Hafnienfi duo funt Mathematum Profeffores, alter Mathematum inferiorum, alter fuperiorum. In fcholis itaque inferioribus, in quibus adolefcentes ad lectiones academicas præparandi, fufficere vifum, fi Aftronomiæ fphæricæ, & computi ecclefiaftici præguftum quendam haberent, & figuras geometricas conftruere addifcerent. Unde memini in Gymnafiis quoque patriis, Vratislavienfibus fcilicet, cum ego adolefcens Magdalenæum frequentarem, Profefforem Mathefeos nonnifi conftructiones figurarum, cum definitionibus Geometriæ elementaris, ufum Globorum & computum ecclefiafticum docuiffe. Et quamvis infigni cupiditate methodum mathematicam cognofcendi jam tum flagrarem, nec minor effet Algebræ addifcendæ ardor; quod illa certam acquiri poffe cognitionem, cui contradicere nemo aufit; hac vero, proprio marte veritates incognitas inveftigari audiviffem; nemo tamen erat, qui fitim meam reftinguere valeret; immo non deerant, qui ftudium Mathefeos diffuaderent, aut faltem affirmarent, me ejus auxilio non confecuturum, quod fperabam. Ego vero nunquam ab ea opinione me dimoveri paffus fum, cujus quidem rationes hic exponi nil attinet.

§. 292.

§. 292. Qui adeo solius curiositatis gratia Astronomiam addiscere volunt, iis sufficit historica veritatum præcipuarum cognitio. Nimirum primo ipsis legenda sunt, quæ capite primo Astronomiæ sphæricæ, quoad observationes communes & principia inde stabilita, traduntur. Neque enim integro hoc capite continetur quidpiam, quod captum Mathematum imperiti excedat; & quocunque quis animo ad Astronomiam accedat, ea ignorare non debet, quæ in eodem continentur. Deinde ex secundo capite, quod de circulis sphæræ mundanæ agit, definitiones circulorum & aliorum nonnullorum ad eos spectantium sibi familiares reddat, omissis ceteris omnibus. In capite vero quarto legat scholia probl. 16, §. 244 *& seqq.* quæ de catalogo fixarum, & asterismis, ac magnitudine apparente illarum loquuntur. Addi possunt hinc inde scholia quædam alia, quæ utrum contineant, nec ne, quod videatur notatu dignum, quilibet facile per seipsum judicabit. Hinc statim accedat ad caput sextum, in quo constructio & usus Globi cœlestis in ipsius potissimum usum docetur. Neque male sibi consulet, si in capite septimo perlegat de refractione & parallaxi, quæ in definitionibus & scholiis habentur, & sub rubrica observationum reperiuntur: id quod etiam intelligendum de crepusculis, quibus destinatur caput 8, seu ultimum Astronomiæ sphæricæ. Et hæc satisfaciunt etiam adolescentibus ad studium Astronomiæ præparandis, quoad partem sphæricam. In parte Theorica iis, qui solius curiositatis gratia Astronomiam addiscunt, commendanda sunt capita tria priora de natura Solis ac Lunæ ceterorumque Planetarum, & mundi systemate, si pauca quædam problemata excipias, quæ prætermitti possunt. Poterunt etiam prætermitti theoremata, quæ in usum systematis mundani evincendi proponuntur §. 571 *& seqq.* Sufficit enim ut saltem theorema 27, §. 612 & theorema 28, §. 630 cum subjectis scholiis legat, demonstratione prioris insuper habita. De Theoria Planetarum, quæ capite quarto traditur, non plura cognoscere tenetur quam hypothesin: non tamen prorsus inconsultum est, ut addat definitiones, quarum in Theorica usus, propterea quod hi termini in Calendariis quoque occurrunt, quæ intelligere vult curiositatis gratia Astronomiæ operam aliquam impendens. Quod ad Lunam attinet, præter definitiones & observationes, a §. 816 usque 822, non est, quod curiosus tantummodo lector attingere teneatur. Et ex capite sexto tantummodo distantias planetarum a Terra ex §. 906, earumque magnitudines ex §. 922, haurire debet. De adspectibus capite septimo sufficiunt eidem definitiones §. 926-935, cum definitionibus eclipsium §. 937 & §. 982. Denique ex capite ultimo de stellis

lis fixis & novis atque cometis, sufficiunt theoremata absque demonstrationibus, & observationes, omissis vero problematis. Ea abunde satisfaciunt, ut de rebus astronomicis verba facere possit, quando occasio tulerit in sermone communi, & intelligere, quæ in Calendariis de iisdem habentur.

§. 293. Quodsi quis cognitionem historicam Astronomiæ accuratiorem desiderat; is omnia, omissis demonstrationibus, ea industria perlegere debet, quam pro primo cognitionis gradu præscripsimus. Quodsi tamen praxin non curat, nec opus esse videtur, ut singula problemata perlustret. Abunde sufficit, si theoriam planetarum primariorum perspectam habeat & calculi eclipsium ideam aliquam animo concipiat. Permittendum adeo est unicuique, quo usque ipsum trahat sua voluptas. Vix enim alius finis intendi potest, quam ut notitia rerum astronomicarum animum delectet. Quoniam itaque sola voluptas mensura est eorum, quæ addiscenda sunt, uniuscujusque omnino relinquendum est judicio, quantum eidem satisfaciat. Quemadmodum illam suo quisque modulo metiri debet, nec ex se judicare licet alios; ita quoque determinari nequit, quænam unicuique conducant.

§. 294. Cognitio Astronomiæ historica, quoad partem sphæricam, facilitatur continuo usu Globi coelestis, qui semper ad manus esse debet. Etenim definitiones multo facilius intelliguntur, si ea, quæ declarant, in superficie Globi repræsententur; cum imaginatio nihil amplius facessat negotii, ob consensum ejus cum sensu seu visu. Si schemata in plano delineantur, quemadmodum fieri solet & a nobis quoque factum est; sensus non revera exhibet, quod repræsentare debebat; sed saltem dirigit imaginationem, ut vi vocabulorum, quæ in definitione continentur, sibi formet ideam ejus, quod cognosci debet. Sumamus exemplum facile, ut quæ dicuntur recte intelligantur. Declinationem stellæ definimus per distantiam ejus ab æquatore. Cumque distantiam a circulo maximo esse ostenderimus arcum circuli maximi inter duo puncta in superficie sphæræ intercepti & ad circulum maximum perpendicularem (§. 76 *Sphæric.*); ideam declinationis formaturi imaginari debemus circulum maximum in superficie sphæræ, qui per centrum stellæ, seu punctum in sphæræ superficie datum, & per æquatorem transit, & hunc ad angulos rectos secat. Quamobrem cum porro constet (§. 28 *Sphær.*), hunc circulum transire debere per polos æquatoris, quos eosdem esse cum polis mundi constat (§. 48 *Astron.*); nobis imaginari debemus sphæram cavam, in cujus centro oculus collocatus, & in eadem duos polos, circa quos vertitur, una cum æquatore intervallo quadrantis in

in ſuperficie ſphæræ deſcripto, & circulo tranſeunte per polos & ſtellam, ſeu punctum in ſuperficie datum tranſeunte, qui ſecat æquatorem. Ita enim demum idea repræſentabit declinationem. In plano circulus MAPQ repræſentat ſphæram mundanam, puncta P & p polos mundi diametraliter oppoſitos, AQ æquatorem ex altera hemiſphærii parte, in qua ſumitur ſtella S ſive punctum quodcunque datum. P Sp repræſentat circulum, qui per polos mundi P & p atque punctum datum S tranſit, in eadem hemiſphærii parte, & æquatorem in D ſecat. Unde arcus circuli maximi DS repræſentat Declinationem ſtellæ, ſeu puncti S. Hinc liquet, quomodo definitiones primum explicandæ ſint per figuras in plano delineatas. Enimvero cum idea hujus ſchematis non ſit ea, quæ rem ipſam, prouti concipitur, repræſentat, ſed vicariam ſaltem operam præſtet; imaginationis eſt, eam transformare in ideam veram. Loco igitur circuli APQpA nobis imaginamur ſphæram cavam, in cujus centro oculus conſtitutus; in ejus ſuperficie imaginamur porro duos polos P & p ſibi diametraliter oppoſitos, & æquatorem ab utroque polo undiquaque eodem intervallo diſtantem, tandemque circulum alium per ſtellam in eadem ſuperficie ſumtam & duos polos tranſeuntem, qui neceſſario æquatorem ſecat. Atque ita demum imaginatio veluti viſui percipiendam exhibet declinationem SD. Nemo non videt non ſine exercitio vim iſtam acquiri, quæ imaginationi ad iſtam transformationem idearum ſufficit; immo ipſam imaginationis vim jam extendendam eſſe, ut ſatis clare repræſentet quod percipiendum. Enimvero ſi globus fuerit ad manus, cum in ejus ſuperficie deſignati ſint poli, & æquator deſcriptus, ac præterea Meridianus circulus per polos mundi tranſiens, ſub quo ob ejus volubilitatem circa polos, & ſitum Meridiani fixum, quodvis ſuperficiei punctum pro arbitrio conſtitui poteſt; non alia re opus eſt, quam ut ſtella conſtituatur ſub Meridiano, ita enim ejus arcus inter eandem & æquatorem interceptus repræſentat declinationem, qualem imaginatio percipiendam exhibere decet. Atque ita ſenſus cum eadem conſentit. Non eſt quod excipias, Globum exhibere in ſuperficie convexa, quod imaginatio transferre debet in concavam; conſequenter nec hic ſenſum cum imaginatione conſentire. Etenim quis non videt, cum non neceſſarium ſit ut oculus collocetur in centro ſphæræ, fingi poſſe quod is extra ſphæram collocetur? quod ubi imaginamur, imaginatio a ſenſu non diſſentit. Quodſi vero imaginationis vi ipſam ſphæram mundanam repræſentare velis; qualis nobis apparet, dum noctu cœlum ſtellis ſuperbiens contuemur; multo jam facilius accidit ea, quæ

Tab. IV. Fig. 40.

quæ oculo extra sphæram mundanam per fictionem constituto apparent, eidem in centrum sphæræ retracto, tanquam in concava, percipienda exhibere.

§. 295. Non dubito fore haud paucos, qui nodum in scirpo quæri existimaturi sunt, & sine istiusmodi scrupulositate Astronomiæ cognitionem historicam acquiri posse tanto confidentius sibi aliisque persuaderi conabuntur, quod experientia testetur, ex schematismis in plana delineatis satis intelligi, absque ulla opera, quæ per definitiones explicantur, & in resolutionibus problematum præcipiuntur. Enimvero quis vitio vertet Philosopho, quod distincte explicet usum facultatum, quem alii de eodem parum cogitantes faciunt, præsertim eo fine, ut simul ostendat, quomodo usum istum facilitare liceat? Homines & animalia moventur absque cognitione regularum Staticæ, nec norunt, quem faciant eorundem usum, dum easdem inviolabiliter observant. Ecquis vero reprehendit BORELLUM, quod, in egregio opere de motu animalium, ex regulis Staticæ eundem demonstrandum sibi sumserit? Si quis fuerit Astronomus, qui in Psychologia simul versatus, ut acumine suo discernere possit, quæ modificationibus animæ insunt; is utique agnoscet vera esse, quæ de idea vi imaginationis formanda ad clare percipienda, quæ in Astronomia sphærica docentur, in medium attulimus (§. 294).

§. 296. Quemadmodum vero illam idearum transformationem juvat, præter Globum cœlestem, sphæra etiam armillaris; ita non inutile foret, si, ad similem usum in parte Astronomiæ theorica obtinendum, adhiberentur Instrumenta levi sumtu parabilia, quibus phænomena motus secundi apte repræsentarentur; non quidem ea accuratione, ut calculi vicem subire possent, sed quantum sufficit, ut motus secundus, seu proprius, distincta notione comprehendatur. Intendebat hoc PURBACHIUS cum suis Theoricis Planetarum; sed cum, Astronomiæ parte theorica per COPERNICUM inprimis ac KEPPLERUM reformata, nullus amplius illarum sit usus; alia prorsus forma fieri hodie deberent instrumenta ad motus secundi phænomena eodem modo repræsentanda, quo ope Globi artificialis repræsentantur phænomena motus primi. Equidem non ignoro, non defuisse aliquos, qui de motu secundo Planetarum organice repræsentando cogitarunt; sed desunt instrumenta, quæ ad communem discentium usum adhiberi possent. Neque vero negandum est in Theoricis defectum istiusmodi instrumentorum esse tolerabiliorem quam in sphæricis; quia, per schemata in plano descripta, non adeo confunditur imaginatio, quam in sphærica; & quod ad Theoricam demum accedas sphærica absoluta; consequenter ubi notionibus astronomicis jam adsuetus animus.

§. 297. Qui propter praxin Astronomiæ operam navant, cum ea varia sit, nec omnes eodem modo in ea versari debent. Constat, ad praxin Astronomiæ facilitandam, conditas esse Tabulas tam primi mobilis, quam motus Planetarum. Illarum usus est in parte sphærica; harum vero in theorica. Quibus adeo calculus astronomicus curæ cordique est, illi usum Tabularum multiplici computatione sibi familiarem reddere tenentur. Præfiguntur Tabulis præcepta calculi, quæ non in omnibus sunt prorsus eadem. Quamobrem ut ea intelligantur, cognitio saltem historica ex Elementis Astronomiæ præmittenda. Quo accuratior hæc fuerit, eo melior. Equidem fieri potest, ut calculum astronomicum juxta Tabulas absolvat, qui terminos tantummodo cognitos atque perspectos habet; sed in tenebris quasi versatur, qui nihil prorsus rationis regularum perspicit. Suadendum igitur est, ut theoriæ, tam sphæricæ, quam theoricæ cognitione historica animum imbuas, antequam ad calculum accedas. Dedimus ipsimet præcepta calculi astronomici, eademque exemplis illustravimus. Quamobrem qui ad hanc praxin adspirat, ad ea animum advertere tenetur. Exemplorum typum ita repræsentavimus, ut ideam exemplarem calculi animo ingenerare possit, quæ regularum vicem tueri potest, ubi plura exempla computaveris, & eadem forma calculum descripseris. Antequam autem satis exercitatus fueris, ut tibi fidere possis, quod nulla ex parte aberraveris; exempla computanda sunt, quæ in Ephemeridibus habentur, ut cum iis conferre queas, quæ calculus tuus prodit.

§. 298. Tabulæ astronomicæ non alio fine conduntur, quam ut calculus reddatur facilior & brevior. Computantur autem ex observationibus calculo geometrico, aut, si mavis trigonometrico. Quamobrem Tabularum conditoribus calculus geometricus perspectus esse debet. Formam quoque hujus calculi cognoscere tenetur, quicunque solidam Astronomiæ scientiam acquirere debet. Nos in Elementis nostris hunc calculum, non modo regulis perspicue ac distincte propositis, comprehendimus; verum etiam exemplis illustravimus, & typum calculi ita exhibuimus, ut in praxi commode regularum vice fungatur, ipseque calculus prolixus ab omni perplexitate & molestia liberetur. Usi nimirum hic sumus eodem artificio, quo calculum algebraicum facilitare studuimus. Quamobrem, si quis præcepta calculi cum typo conferat, non habebit, quod conqueratur de obscuritate, sed plena luce fruetur in iis intelligendis; modo in Trigonometria fuerit versatus, cujus problemata familiaria supponuntur, nec ignoret terminos, quos ex definitionibus perspectos habere debet. Neque enim accedendum

dendum eſt ad calculum geometricum, niſi intellectis terminis aſtronomicis & Trigonometriæ, tam ſphæricæ, quam planæ, praxi in poteſtatem ſuam redacta. Si quis numeros datos variaverit, in aliis exemplis calculi typum imitaturus; is non modo habitum computandi ſibi comparabit; verum etiam ideam calculi exemplarem memoriæ infiget, ope ſchematis delineati in memoriam facile revocandam, quoties calculo iſto utendum. Atque hoc ipſo obtinetur, ut non modo moleſtia omnis a calculo aſtronomico arceatur, ſed etiam ut animo placido, nec perturbato ſanguinis circulo, calculos continues per tantum temporis ſpatium, quantum libuerit; modo tibi non moleſtum accidat tempus calculis fallere, quod ſcientiæ amplificandæ impendere malles. Neque enim tædia, ex diverſo fonte propullulantia, pro diverſitate inclinationum naturalium quibus natura homines a ſe invicem differre voluit, in unum confundenda; errore manifeſto iis, qui in Pſychologia cum laude ſunt verſati. Quodſi vero præcepta calculi, quæ numeris ſuis diſtincta ſigillatim exhibuimus, tranquillo animo lente feſtinans perpendas; formæ calculi notionem diſtinctam conſequeris, uſus regulis quas in Logica pro acquirenda notione diſtincta præſcripſimus; etiamſi illas nunquam didiceris, nec, dum juxta eas determinas facultatum cognoſcendi uſum, earum tibi conſcius fueris. Quantum hoc conducat ad perficiendum intellectum, ut etiam extra Matheſin diſtincte concipere adſueſcas, quæ meditaris, & ordine in meditando cogitationes tuas promoveas, nunc demonſtrare nolo; etſi demonſtratio ex Pſychologiæ ac Logicæ principiis dari poterat; utpote aſſenſum non niſi eorum extorſura, qui Metaphyſicæ, prouti a nobis tradita, jam operam debitam navarunt. Sufficit monuiſſe, quod credendum ſit experto; & oculata futura ſit fides ſingulis, quotquot conſilio noſtro aurem benignam præbere non dedignati fuerint. Qui Aſtronomiam non ſibi diſcunt, ſed intellectus perficiendi gratia eidem incumbunt, id quod faciendum plurimis (cum paucis admodum Aſtronomis opus habeat genus humanum) illis formam calculi animo concepiſſe ſufficit, nec opus eſt, ut in eodem ſint exercitati. Quatenus tamen exempla lucem affundunt præceptis, non inconſultum eſt, ut unicum ſaltem, quod exhibuimus, exemplum computent, ſingulis præceptis ad idem applicatis; præſertim cum etiam extra Matheſin, in Philoſophia præſertim practica, magna ſit exemplorum vis; quemadmodum in parte altera Philoſophiæ practicæ univerſalis demonſtravimus; atque adeo utile ſit ad Philoſophiam animum appellenti præcepta ad exempla dextre ac expedite applicare. Ecce igitur tibi uſum univerſalem eumque maximi faciendum,

dum, ob quem hæc pars ſtudii aſtronomici promiſcue commendari meretur omnibus, quos ſolida rerum cognitio juvat; etſi ætatem omnem in calculis aſtronomicis conſumere nolint; immo etſi futurum vitæ genus minime ferat, ut notitiam multo labore acquiſitam conſervent. Quoniam enim ea conſervari, hoc non obſtante, poteſt intellectus habitudo, quam hoc ſtudio acquiſiviſti; non eſt quod conqueraris, te in ſpem futuræ oblivionis diſcendo ea, quæ tibi nulli uſui ſunt, tempus inutiliter conſumſiſſe.

§. 299. Peculiaris quoque praxis aſtronomica eſt phænomena ſiderum obſervandi, omnis praxeos reliquæ baſis. Ex obſervationibus enim calculo geometrico eruuntur, quæ in Aſtronomia ſcire intendimus; nec abſque iis, calculi hujus beneficio, conduntur Tabulæ, quarum in praxi tam commodus eſt uſus. Immo, abſque obſervationibus non licet perficere Tabulas, ut major ſit earum cum cœlo conſenſus. Ne igitur hac in parte quoque deeſſemus; modum quoque obſervandi expoſuimus, ut aliquam ejus ideam animo concipere detur. Nemo autem a nobis requiſiverit, ut omnia minutiſſime perſequamur, quæ ad dexteritatem in obſervando faciunt. Quodſi enim quis obſervatorem agere voluerit, is non modo intellectis iis, quæ a nobis traduntur, legat Autores ſupra commemoratos, cum ſcripta Aſtronomorum recenſeremus; verum etiam in obſervatorio aliquo celebri, quale eſt Pariſinum in Gallia & Grenovicenſe in Anglia, per aliquod tempus commoretur, ut, quæ ad obſervandi dexteritatem faciunt, ab Obſervatoribus exercitatis addiſcat. Quamvis enim impoſſibile non ſit, ut eandem multo exercitio per ſe aſſequatur, ſi in obſervando ſedulus ac continuus ſit; facilius tamen longe accidit, ubi alios præeuntes imitamur, quam ſi demum multa circumſpectione ipſimet detegere ea debeamus, quæ ad obſervationem accuratam conducunt. Quodſi quis inſtrumenta, modumque obſervandi Veterum cum recentioribus & recentiſſimis conferre voluerit; is animadvertet cum theoria Aſtronomiæ creviſſe quoque obſervationum perfectionem. Unde conficitur, eum, qui obſervationibus aſtronomicis vacare voluerit, theoriam quoque Aſtronomiæ ſibi perſpectam reddere debere. Immo ex iis, quæ in noſtris Elementis demonſtrantur, jam patebit, obſervatorem in calculo quoque aſtronomico, ipſo etiam geometrico verſatum eſſe debere. Sane qui obſervatorem agere voluerit, Aſtronomiam omnem, tam theoreticam quam practicam, intime perſpectam habere debet. Ad obſervandum requiruntur inſtrumenta &, ſi obſervationes accuratæ eſſe debent, accuratis quoque opus eſt inſtrumentis. Quamobrem qui obſervationibus

tionibus astronomicis sese dare voluerit, instrumentorum quoque fabricam, usum, & examen intime perspicere debet. Notio instrumenti adæquata esse debet, qualis sufficit ei, qui artificem ejus fabricam doceret vellet, aut, si arte polleret, ipsemet idem construeret. Rationes singulorum in fabrica observandorum ex theoria Astronomiæ reddendæ, ut scientifica sit instrumenti cognitio. Usum accuratum determinat Astronomiæ theoria ad constructionem instrumenti applicata. Construitur enim instrumentum in certum finem, veluti magnus Gnomon ad observandas altitudines Solis meridianas per singulos anni dies; ex theoria autem Astronomiæ constat, quanta exactitudine finem intentum consequi debeamus. Instrumenti igitur is fieri debet usus, quem finis consequendus exigit. Examina non modo pro diversitate instrumentorum, verum etiam pro uno eodemque instrumento varia esse possunt. Eo autem tendunt omnia, ut inde constet, instrumenta esse accurate facta, atque adeo iis in observando fidendum esse, si quidem certus sis te debitam in observando diligentiam adhibuisse. Ad hæc examina referendum, si quis instrumento suo eadem ἀκρίβεια phænomenon observat, qua ab aliis celebribus Observatoribus alias fuit observatum; veluti si quis per telescopium suum Saturni easdem phases videt, quales primus exquisitissimis telescopiis observavit HUGENIUS. De examinibus istis specialia in medium afferre non licet. Supponunt enim accuratam Instrumentorum descriptionem, qualem hic dare non licet. Sufficit adeo monuisse, quod istiusmodi examinibus opus sit, ne magno conatu ac maxima diligentia nihil agas. Observationes astronomicæ sunt paucissimorum; propterea quod non quilibet, qui Astronomiæ studio delectatur, gaudet supellectili ad observandum necessario, fruiturque otio ac commoditate observandi. Quamobrem in nostris Elementis nonnisi ea tradidimus, quæ sufficiunt, ut intelligatur, qualibus observationibus opus habeat Astronomus.

§. 300. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, Elementa Astronomiæ integra eodem modo perlustrare tenentur, quem supra pro cognitionis gradu secundo acquirendo præscripsimus. Eum enim in finem Elementa Astronomiæ eadem methodo conscripsimus, qua Elementa Geometriæ condidimus; etsi communiter Astronomi continuo discursu, quemadmodum vulgo faciunt Autores, sua proponant; sit ita, quod demonstrationes eidem interferant: quem morem etiam hodie Geometræ sequuntur, in schediasmatis præsertim quibus inventa sua orbi literato communicant in Diariis Eruditorum & Commentariis Societatum Regiarum. Constat

ipsum PTOLOMÆUM eundem morem tenuisse in Almagesto suo. Negari tamen non potest, quod methodus *Euclidea*, quam nos adhibuimus, multo sit clarior; præsertim si omnia rigide demonstranda, nec sumenda, quorum demonstratio lectoris industriæ relinquitur, neque etiam immiscenda, quæ prorsus non demonstrantur. In parte etiam sphærica, ex principiis sphæricis rigide demonstravimus, quæ vulgo ab Astronomis fiducia illorum principiorum sumuntur, ne evidentiam desiderent tyrones; inprimis ubi Elementa Geometriæ tam scrupulosa industria pertractarunt, quam supra præscripsimus, & qua omnino opus est, siquidem ideam methodi demonstrativæ exemplarem in usum Philosophiæ ex Mathesi haurire volueris. Neque porro negari potest, studium Astronomiæ hoc pacto facilitari. Sane non alia de causa PURBACHIUS studium Astronomiæ amplificaturus, & ad captum tyronum accommodaturus, Almagestum PTOLOMÆI, idem methodo *Euclidea* digerere cœpit; telam vix cœptam, post obitum ejus, jure legati, pertexente REGIOMONTANO. Non igitur fecimus, nisi quod judicio REGIOMONTANI, Astronomi summi, probetur. REGIOMONTANUS nullis problemata illustravit exemplis: id quod tamen apprime necessarium esse ex iis, quæ modo in antecedentibus inculcavimus, abunde elucet. Præterea ipsa res loquitur, quod, cum is nonnisi Almagestum PTOLOMÆI in formam Elementorum EUCLIDIS redigere voluerit, idem non tradat nisi Astronomiam antiquam, a qua recentior plurimum differt, præsertim in theorica; ut adeo dici nequeat nos actum egisse. Quemadmodum vero Elementa Geometriæ *Euclidea* multo clariora & evidentiora reddidimus, tum quod demonstrationes fecerimus completas & ordinatas, quales esse debent, si quis methodum demonstrativam in usum philosophandi addiscere voluerit, tum quod resolutiones problematum magis distincte exhibuerimus; ita idem observavimus, ut in ceteris Matheseos partibus, sic etiam in Elementis Astronomiæ. Observationes præterea, quales in Mathesi pura nullæ occurrunt, sigillatim quoque ita recensuimus, ut præter facta nihil contineant; ea vero, quæ inde concluduntur, per modum corollariorum deduximus; quemadmodum vult Logica verior, & fieri debere in Logica nostra evicimus: id quod etiam in disciplinis opticis jam fecimus. Sicuti enim methodus demonstrativa in iis, quæ operationibus intellectus perficiuntur, ad amussim observat regulas in Logica præscriptas: ita etiam in iis, quæ sensuum usu sub directione intellectus innotescunt, ejusdem regulas sequi debet. Nihil adeo a nobis prætermissum existimamus, quod methodus accurata exigere poterat. Cum in theoricis nonnulla dentur,

tur, quæ rigide demonſtrata eſſe dici nondum poteſt, etſi rationi & experientiæ admodum conſentanea videantur, & quæ in uſum Aſtronomiæ practicæ ſumenda eſſe unanimiter hodie conſentiunt Aſtronomi; veluti quod Terra moveatur motu vertiginis, & motu translationis circa Solem (§. 622), & deſcriptio Syſtematis mundi (§. 630); demonſtrationis quoque titulum omiſimus; ne, contra regulas Logicæ de demonſtratione, pro tali venditemus, quæ non eſt, ut ab incautis vulgo pro tali habeatur. Nulli igitur dubitamus fore, ut certam nobiliſſimæ ſcientiæ cognitionem ex Elementis noſtris hauriat, qui non perfunctoria opera in iiſdem verſari voluerit. In Theoricis ſecuti ſumus hypotheſin KEPPLERI; quam cum cœlo magis conſentire ceteris hypotheſibus commentitiis omnibus in confeſſo hodie eſt, apud Aſtronomos omnes, fiducia obſervationum quibus in Aſtronomia omnia dirimenda. Quamobrem quoque placuit calculum geometricum explicare, qualem dedit KEPPLERUS in Commentariis de ſtella Martis, & in Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ; ut & conſtructio Tabularum Rudolphinarum, & calculus Rudolphinus intelligatur. Quoniam tamen hodie majore fruimur luce in Geometria, quam KEPPLERI ævo; ea quoque addidimus, quæ lubens ipſe in theoriam ſuam recepiſſet, ſiquidem ipſi ea videre licuiſſet.

§. 301. Neminem vero, qui Dioptricam ante didicit, quam ad Aſtronomiam accederet; quemadmodum omnino fieri debet, ob eximium teleſcopiorum in omni Aſtronomia uſum; offendet, ubi obſervaverit in theorica quædam ſumi, quæ in rigore geometrico vera non ſunt, ad veritatem tamen propius accedunt. Etenim in cognitione Naturæ mathematica, ad quam etiam Aſtronomia referenda, præſertim ſi more *Keppleriano* tractetur, non attendendus eſt rigor geometricus, modo conſtet quæ eodem invito ſumuntur ad veritatem prope accedere; præſertim ubi theoria quæritur propter praxin, ubi approximationes æquipollent veritati. Vidimus quoque in Mechanica iſtiuſmodi hypotheſes in locum hypotheſium naturæ utiliter ſubſtitui; immo ſi praxin unice reſpicias, ſubſtituendas eſſe. Quoniam tamen ad Aſtronomiam accedere licet, Mechanica ſepoſita, ſtatim a Geometria elementari & Trigonometria utraque; non inconſultum duximus denuo inculcare, quod attento lectori ex anterioribus jam patere poterat. Neque hoc abhorret a more priſcorum Aſtronomorum, cum tamen antiquiſſimis temporibus rigor demonſtrandi maxime ſeſe probaret Geometris. Etenim in computo eclipſium ſumſerunt, quemadmodum adhuc fieri ſolet, lineas rectas pro arcubus circulorum, & triangula ſphærica in

plana converterunt, ad facilitandum calculum; propterea quod non committitur error sensibilis, sed qui observabili minor; error autem observabili minor in Astronomia practica habetur pro nullo. Huc etiam referri debet, quod in doctrina primi mobilis semidiameter Telluris habeatur pro puncto, respectu distantiæ fixarum. Quando vero dicimus, in demonstrationibus astronomicis non semper observari rigorem demonstrandi; id non intelligendum de forma, sed de materia demonstrationis. Constat nimirum ex Logica, formam probationis semper eandem esse debere, nec ab ea unquam recedendum, si methodus accurata esse debet: id quod etiam usui est in rigore demonstrandi agnoscendo; ne quis sibi persuadeat supponi, quæ vera sunt, sibi autem in memoriam venire nequeunt. Nullo igitur modo probamus, si rigor demonstrandi quoad formam negligatur; quicquid etiam videatur aliis. Notandum vero & hoc est; in Astronomia a rigore demonstrandi quoad materiam recedi, absque ullo scientiæ detrimento; quemadmodum etiam in Dioptrica contingit. Quod enim sumitur contra veritatem, eadem tamen non invita sumitur; quia quod sumitur quoad praxin in locum veri surrogare licet, nec sine utilitate. Alia vero longe ratio est, si dubium sumitur tanquam verum, non sine formidine oppositi. Hoc enim in casu subeundum est periculum errandi, quale non metuendum in præsenti casu. Sunt equidem etiam in Astronomia, quæ dubia sunt, & ad certitudinem hactenus deduci minime potuerunt: sed ea a ceteris satis aperte distinguimus, ne cum certis confundantur. De hisce plura mox monebimus in sequentibus. Non vero vitio vertitur Astronomo, si in dubiis acquiescit, ubi certitudo haberi nequit: illud demum vitio vertendum fuerat, si dubia pro certis venditaret. A priori nullum damnum metuendum scientiæ; a posteriori autem detrimentum patitur scientia. Ingenue confitentur Astronomi, se a certitudine adhuc abesse, ubi eam nondum consecuti; minime autem certa & explorata videri volunt, quæ non sunt. Immo si contingat a vero aberratum esse, observationibus contrarium ejus, quod statutum fuerat, loquentibus; dissensum ab observationibus minime dissimulant; multo minus erroribus incrustandis ac pertinaciter defendendis operam impendunt, prouti eruditis ceteris solenne. Veritatem nimirum quærunt, quam ubi nondum invenerunt, eandem invenisse videri nolunt; ne sibi non minus quam aliis ad eam inveniendam viam præcludant. In iis quoque, quæ dubia sunt, unus non ægre fert dissensum alterius, quantuscunque fuerit; nec propter dissensum unus alterius laudi detrahit, multo minus eundem insectatur,

quemadmodum denuo ab aliis eruditis fieri assolet. Quamobrem & nos in dubiis adversas sententias recensuimus, citra injuriam in ullum dissentientium; & unicuique liberum reliquimus, cuinam illarum accedere velit, aut num inter extremas mediam amplecti malit.

§. 302. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, sive in Mathesi acquiescere, sive intellectum in usum philosophandi perficere velint, iis multa suppeditabit Astronomia. Etenim a parvis initiis continuo crevit, & per multiplices ambages ad ea tandem accessit, quæ a cognitione humana maxime remota videbantur. Ad progressum adeo Astronomiæ animum maxime attendere debet, qui artificia cognoscere studet, quibus abdita Naturæ rimari datur. Pars ejus sphærica multo facilior theorica. Quamobrem de illa nobis primum sigillatim dicendum. Capite primo recensuimus observationes communes, ac inde prima Astronomiæ sphæricæ principia stabilivimus. Observationes communes sua sese sponte offerunt cœlum contuentibus, nec vulgi captum transcendunt. Atque adeo liquet prima principia esse Astronomo cum vulgo communia. Neque etiam aliter fieri potuit, quam ut, qui primus de Astronomia cogitavit, aliunde notiones aliquas distinctas acquireret ad ulteriora profuturas, quam reflectendo super iis, quæ nemo ignorat, nisi rationis usu omni destitutus. Per hasce communes observationes, cœlum percipitur instar sphæræ cavæ, in cujus centro Terra est, cui insistimus, & cujus superficiei affixæ sunt stellæ, quæ autem circa Terram continuo revolvitur. Vulgo hæc notio confusa est; sed Astronomus, qui notionem sphæræ distinctam ex Geometria hausit, eam applicans ad ea, quæ percipit, distinctam consequitur notionem. Atque ita Astronomiæ studiosus, immo primus ejus inventor ultra vulgus sapere cœpit, dum, notione communi ad distinctam revocata, aditum sibi ad ulteriora pandit; cum vulgus in confusa acquiescens ulterius progredi nequeat, sed in iis, quæ percipit, subsistere teneatur. Quæritur vero jam, an quod apparet revera quoque ita se habeat; nimirum an cœlum sit sphæra cava, an Terra sit in centro ejus, ibidemque quiescat, an cœlum circa eandem continuo rotetur, an stellæ omnes superficiei ejus sint affixæ? Hoc pacto liquet, quomodo statim inventori plura invenienda sese offerant. Quodsi ponas eum esse circumspectum, ne per præcipitantiam statuat; ad quæstiones hasce animum advertens, eas omnes hinc pendere animadvertit, num semper quod apparet ita quoque revera sese habeat. Ponamus Opticam nondum esse inventam, quemadmodum probabile est Astronomiæ eandem ortum suum debere: nemo non videt re-

 cur-

currendum fuisse ad observationes communes de iis, quæ nobis apparent. Videtur nobis cœlum sphæra cava, in cujus centro sumus; quod stellæ omnes eandem distantiam a Terra habere videntur; nullumque corpus aliud inter oculum & stellas interpositum apparet. Quodsi ergo experientiam communem consulimus; objecta remota, etsi aliquo intervallo a se invicem distent, eodem tamen a nobis abesse videntur, ubi inter ea nullum aliud corpus interpositum conspicimus; veluti dum arborem in agro a sylva procul adhuc remotam huic conterminam videmus e longinquo. Incertum adeo esse cognoscimus, num cœlum sit sphæra cava; num superficiei ejus affixæ sint stellæ; num denique Terra sit in centro. Cumque ex observationibus communibus hæc decidere non detur; quid statuendum sit, dubitandum; neque hactenus apparet, quomodo a dubitatione liberari queamus. Immo ex progressu patebit, non adeo facile fuisse, ut ab eadem liberaremur. Non plura secula, sed integri millenarii elapsi sunt, antequam aliqua saltem probabilitatis specie statui potuerit, quid veritati consentaneum videatur. Liquet adeo, a præcipitantia non abesse, qui scepticismum amplectuntur, quamprimum animadvertunt se a dubitatione liberari non posse, adeoque veritatem frustra quæri sibi aliisque persuadent. Quodsi jam porro dispiciant, num quod quiescere videtur, revera quiescat, & quod moveri videtur, revera moveatur; observationes denuo communes loquuntur, quiescentibus in re celerrime mota, quæ quiescunt in partem contrariam ferri videri; veluti dum curru celerrime vecto per sylvam arbores nobis in eodem sedentibus in plagam contrariam currere videntur, vel dum littora moveri in partem contrariam in navi celerrime mota sedentibus apparet. Quamobrem denuo in dubitationem adducimur, utrum Terra quiescat, & cœlum circa eandem rotetur; an vero stellæ quiescant & Terra motu vertiginis in plagam contrariam convertatur. Liquet autem, ut ante, ex observationibus communibus decidi minime posse, a qua parte stet veritas. Quodsi ergo qui primi ad Astronomiam animum appulerunt, scepticismo locum dare voluissent; omni adhuc Astronomia careremus. Enimvero quid faciendum erat in hisce angustiis constitutis? Ea tanquam dubia erant notanda, & observationes communes ulterius expendendæ, num forsan per eas major lux sit affulsura, & an nos deducant ad alia intellectui magis obvia. Quodsi hoc facias, in notionem ortus & occasus incidis, quemadmodum capite primo ostendimus; quos ubi invicem confers notionem habes moræ supra horizontem. Secundam porro observationem expendens, continuam stellarum situs re-

ſpectu verticis tui variationem deprehendis, diſtantia a vertice a primo ejus ortu continuo decreſcente, donec ad minimam pervenerit, & deinde rurſus creſcente, donec ad maximam regreſſa in parte cœli oppoſita occidit. Prӕterea hinc diſcimus, continuo alias ſtellas oriri; eas autem, quӕ per aliquod tempus conſpicuӕ fuerant, denuo occidere. Hӕc ubi diſtincte conſiderantur, quӕrendorum ſeſe offert numerus; nimirum quando ſtella aliqua oriatur, quando occidat, quanto temporis intervallo in parte cœli nobis conſpicua commoretur, ſeu quodnam tempus inter ortum atque occaſum intercedat, quӕnam ſit minima ejus a vertice diſtantia, quandonam ad eandem perveniat, quo tempore ſingulas intermedias in utraque cœli viſibilis parte acquirat. Nemo non videt, phӕnomena, quӕ quӕrenda animo inſinuant, pendere ab eo quod cœlum, cujus ſuperficiei ſtellӕ affixӕ ſunt, videatur circa Terram quieſcentem, in qua fixum tuemur locum, moveri, atque ex hoc aſſumto rationem eorundem reddi poſſe. Unde manifeſtum eſt, in gratiam horum phӕnomenorum, ubi quӕſtiones, ad quas nos ea deducunt, reſolvendӕ, inſtar hypotheſeos ſumi poſſe; quod cœlum ſit ſphӕra cava, in cujus ſuperficie hӕreant ſtellӕ eidem affixӕ, & quӕ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem continuo gyratur. Quoniam ex anterioribus conſtat, phӕnomena eadem proditura, ſi Terra in plagam contrariam circa axem ſuum convertatur, cœlo cum ſtellis quieſcente; ӕquipollentia utriuſque hypotheſeos probe perpendenda: ita enim conſtabit, ubi non quӕritur niſi quӕſtionum illarum, quas commemoravimus, ſolutio, ſalva veritate ſumi poſſe utramvis; conſequenter in Aſtronomiӕ parte prima, quӕ de motu communi agit, nos feliciter progredi poſſe, etiamſi ignoretur, quӕnam harum hypotheſium ſit vera. Enimvero utraque hypotheſis non eadem facilitate ſeſe commendat dictas quӕſtiones reſoluturis. In inveniendo itaque & demonſtrando prӕferenda ea, quӕ faciliorem operam parit. Ac ea de cauſa in parte ſphӕrica Aſtronomiӕ ſumitur motus cœli & quies Telluris; ac bona methodus jubet ſumi, etiamſi contrarium verum eſſe invictis argumentis demonſtrari poſſet. Etenim in inveniendo & demonſtrando, prӕſertim ubi praxin intendimus, hypotheſis vicaria in locum hypotheſeos naturӕ ſeu veritatis ſurrogatur; quemadmodum jam vidimus in aliis quoque diſciplinis mathematicis fieri. Hinc itaque elucefcit, progreſſui Aſtronomiӕ ſphӕricӕ non obeſſe ignorantiam veritatis, ſed, eadem in dubio relicta, non minus praxi ſatisfieri, & in ea ad liquidam veritatem pertingi poſſe, ac ſi a primis dubitationibus prorſus eſſemus liberati. Neque dicendus es a vero aberrare ac erro-

erroribus locum dare; modo caveas, ne per præcipitantiam quoad ea erres quæ sumis. Etsi enim in præsenti negotio error non noceat, nocere tamen potest in aliis; iis scilicet quæ ab eo pendent quod est, non vero ab eo, quod apparet.

§. 303. Probe ea, quæ modo dixi, perpendant velim, qui ad Philosophiam animum appellunt; etsi Mathematicis, qui, antecessorum suorum inventa addiscendo, sibi habitum quendam inveniendi compararunt, talia puerilia videantur & contemnantur; qui tamen contemtui dant pœnas, quoties de rebus philosophicis judicium sibi sumunt, aut superbo supercilio Philosophiam contemnunt omnem, propterea quod quæ in ea vulgo docentur a certitudine, qualis in Mathesi datur, immenso intervallo distant. Quodsi vero acumine quo pollent usi, ad animum revocarent ea quæ modo dixi; haud difficulter animadverterent, Philosophiam hactenus in infantia fuisse; infantiam vero ejus prorsus convenire cum infantia Astronomiæ; quæ, si ob eundem statum negligenda, non educanda fuisset, nunquam ad virilem ætatem adolevisset. Sane non rectius videre licet, quomodo scientiæ philosophicæ, quæ ex communi vulgi notitia tanquam ex semine nascuntur, in primo ortu esse debeant, quam si ad ortum Astronomiæ animum attendant. Quodsi porro eandem attentionem ad progressum ipsius afferant; quid fieri debeat, ut Philosophia quoque humano generi adeo utilis adolescat, haud difficulter perspicient Astronomos imitaturi, quantum fert differentia, quæ inter cognitionem philosophicam & mathematicam intercedit. Demus exemplum. Communi experientia constat, animam in perceptionibus suis dependere a corpore, & vicissim corpus quoad motus organorum externorum & sui totius, ab anima. Hæc dependentia phænomenon est, quale est figura sphærica mundi, cujus superficiei stellæ affixæ & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem continuo gyratur. Philosophus, perinde ac Astronomus, notionem confusam revocat ad distinctam, animamque a corpore dependere agnoscit, quoad specificationem perceptionum & continuitatem temporis, quo cum mutationibus in organis sensoriis contingunt; & corpus ab anima, quoad specificationem motuum voluntariorum & continuitatem temporis, quo cum volitionibus animæ contingunt (§. 962 *Psych. empir.*); notitionibus adjutus ontologicis quemadmodum Astronomus geometricis. Atque hoc pacto primo passu discedit a cognitione vulgi, sibi aditum paraturus ad ulteriora. Quoniam vero novit, notionibus confusis non esse fidendum, cum per eas appareant haud raro, quæ non sunt; ad hasce quæstiones delabitur, utrum illa dependentia sit realis, an vero saltem appareat; seu num

anima

anima & corpus revera in se invicem agant, & a se invicem patiantur, an vero tantummodo in se agere, & a se invicem pati videantur; quemadmodum Astronomus quærit, num cœlum cum stellis fixis circa Tellurem in centro ejus collocatam revera moveatur, an saltem moveri circa eandem videatur, & utrum Telluris situs revera talis sit, qualis apparet, nec ne. Experientia communi quæstiones suas dirimi non posse, perinde ac Astronomus agnoscit. Quemadmodum enim hic motum cœli circa Tellurem non observat, neque etiam situm ejus in centro sphæræ mundanæ; ita similiter Philosophus nullam observat actionem corporis in animam, nec animæ in corpus (§. 949, 955 *Psych. empir.*). Quodsi dicas, NEWTONUM, virum perspicacissimum, affirmare, actionem illam mutuam animæ ac corporis in se invicem, singulis momentis, nos experiri; facilis est responsio. Acumine summo polluit in geometricis, non vero in metaphysicis: acumen autem Geometræ, quod ab imaginatione pendet, non est idem cum metaphysico, quod imaginationi prorsus subducitur. Quemadmodum itaque per præcipitantiam judicarunt Astronomi, si qui experiri sese sibi visi fuerint figuram mundi sphæricam, situm Telluris in centro ejusdem, & motum continuum circa Tellurem in centro quiescentem; ita quoque per præcipitantiam judicavit NEWTONUS, quando sibi visus fuit experiri actionem mutuam corporis ac animæ in se invicem, qua una substantia in modificationibus suis efficiatur dependens ab altera. Ab hac præcipitantia sibi utique cavisset, siquidem ortum Astronomiæ distincte expendere voluisset, Astronomiam non sibi soli addiscens, sed in usum quoque philosophandi. Quod hoc facere debuerit, minime contendimus, nullius jus violaturi, quod Natura unicuique concessit; utpote qui ab omni injuria procul remotum habemus animum, multo minus ejus laudi detrahere cupimus, quam summam ipsi merito suo magno deferimus; ne quicquam contra humanitatis officia, ad quæ aliis prompte præstanda obligamur, admittamus. Veritati non minus debetur honos suus, quam hominibus præclare de eadem detegenda, & ejus thesauris amplificandis, promeritis. Neque præsumendum est, viros magnos velle, ut, dum laudamus, adulemur; cum adulatio potius ansam det laudibus promeritis detrahendi, quam eas amplificandi, nec ipsi appetere censendi sint nisi veritati consentaneas. Certum adeo manet, Philosophum circumspectum, non minus ac Astronomum (§. 302), in dubitationem adduci, quid de dependentia animæ ac corporis a se invicem, in modificationibus suis, statuendum sit, ubi ejus ratio ex essentia & natura utriusque reddenda;

denda; quemadmodum eam non aliunde reddendam esse per prima philosophiæ principia edoctus est. Quemadmodum vero Astronomus, in limine Astronomiæ adhuc constitutus, non videt quomodo a dubitatione liberari possit; ita similiter nec Philosophus, in limine Philosophiæ adhuc constitutus, reperit quomodo ex dubitatione eluctari queat. Quid igitur faciendum? Num animus omnis prorsus abjiciendus & in scepticismum eundum? Absit ut hoc faciat, qui philosophari decrevit! Imitari convenit Astronomum. Inquirendum itaque, num observentur alia, quæ ab ista mutua modificationum animæ ac corporis dependentia a se invicem porro dependent. Videmus a sensatione pendere alios actus facultatis cognoscitivæ, & ab his actus facultatis appetitivæ & aversativæ: videmus etiam actuum non minus internorum animæ, quam motuum organorum corporis, seu actionum externarum, determinationem pendere a nutu animæ; consequenter eidem competere directionem actionum externarum & internarum quandam. Horum rationem reddi posse apparet ex mutua illa dependentia. In hæc igitur omnia inquirere, & praxes hinc a priori deducere licet; nondum licet cognita ratione mutuæ illius dependentiæ modificationum animæ ac corporis a se invicem. Quamobrem sicuti in Astronomia sumimus motum communem tanquam phænomenon, & inde deducimus alia, quæ ab eodem pendent, parum solliciti, num revera detur, an saltem appareat; ita quoque, in Philosophia, mutua animæ ac corporis quoad modificationes a se invicem dependentia sumenda tanquam phænomenon, ac inde deducenda sunt alia, quæ hinc porro pendent; nec ea Philosophum tangere debet cura, num illa dependentia realis sit, an tantummodo apparens, & quænam sit ejus causa. Immo cum constet, quæcunque tandem causa sit illius dependentiæ, semper tamen supponendum esse animam & corpus ita agere, ac si in se invicem influerent; quemadmodum in Psychologia rationali evicimus; si vel maxime falsum esset, animam & corpus in se invicem influere, veritate tamen illæsa, sumi potest tanquam hypothesis naturæ vicaria, quoad regimen corporis, quod animæ tribuitur, immo quoad regimen sui ipsius, quatenus a corpore pendere videtur, animam & corpus in se mutuo influere; quemadmodum, in Astronomia, quoad motum communem sumimus, cœlum esse sphæram cavam, cujus superficiei affixæ sunt stellæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus collocatam ab oriente in occidentem convertitur, etiamsi persuasi simus, hæc a veritate abhorrere, ob rationem paulo ante (§. 302) dictam. Memini cum systema harmoniæ præstabilitæ maxima animorum acerbitate impugnaretur,

tur, quasi per ipsum omnis moralitas, omne regimen politicum, immo omnis religio funditus evertatur, cumque ad avertendum tantum ab eo periculum ista monerem; Theologo cuidam celebri hoc paradoxum, immo absonum visum fuisse. Sed hoc ipsi condonandum erat, tanquam methodi demonstrativæ, ac Artis analyticæ prorsus ignaro, cujus nec notionem ullam, nec exemplum habebat. Ecquis enim est qui nesciat, si vel in sola Mathesi attentionem suam desiderari minime passus fuerit, sine methodi demonstrativæ notitia, nemini esse posse ideam dependentiæ veritatum a se invicem, nec sine Artis analyticæ cognitione constare posse, quænam, etsi nondum definita, sumi queant illæsa veritate ad alia investiganda, quæ usum in praxi habent? Enimvero, si qua sunt quæ a causa illius mutuæ ac corporis dependentiæ a se invicem dependent; tum ea non amplius sumitur tanquam vera, nisi demonstratum fuerit, utrum ea realis sit, an tantummodo apparens; quemadmodum in parte theorica, Astronomi non amplius sumunt Telluris quietem & motum communem, sed potius motum vertiginis Telluris, cœlique ac stellarum quietem. Poteramus alia addere exempla, ex Physica generali pariter, ac speciali, nisi unicum sufficeret, ut intelligatur, quomodo in re præsenti Astronomum imitari debeat Philosophus.

§. 304. Postquam in Astronomia parte sphærica Astronomi sumserunt, cœlum esse sphæram cavam, cujus superficiei stellæ omnes sunt affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem ab oriente in occidentem continuo circumvolvitur; ad hoc phænomenon Geometriam applicarunt, ut alia hinc pendentia determinarent, cum phænomenorum motus primi, sive communis, cognitionem mathematicam quærerent. Quamobrem qui tertium cognitionis gradum intendit, in capite secundo, quod de circulis sphæræ mundanæ agit, ei inquirendum est, quem in finem circulos istos in ejus superficie descriptos imaginentur. Ipsa natura quasi circulum descripsit, qui visum oculi undiquaque terminat, & sphæram mundanam in duo hemisphæria dividit, Horizon ideo dictus. Circulus hic immotus est, dum sphæra mundana continuo volvitur; adeoque ultra sphæram mundanam imaginari tenemur aliam immobilem, in cujus superficie peripheria hujus circuli descripta. Ipsa adeo natura Astronomos deduxit ad distinguendos circulos mobiles ab immotis, antequam perpenderent, quales circuli superficiei sphæræ mundanæ sint inscribendi. Videmus hinc cognitionem Naturæ mathematicam, imaginaria admittere, tanquam principia ex quibus deducitur, & fictionibus locum dare: id quod præpostere imitari minime

debet Philosophus; etsi in nonnullis utiliter imitetur, quemadmodum modo vidimus (§. 303). Hinc vero accidit, quod Mathematici, ad res philosophicas celeri nimis gradu properantes, imaginaria a realibus non distinguant; & notiones in Mathesi toleranter veras, tanquam reales, importuno ausu in Philosophiam inferant; quemadmodum nec alia fuit ratio, quod olim Physici mundum ex sphæris crystallinis cavis compositum finxerint; donec tandem hypothesis insulsa, a TYCHONE DE BRAHE explosa, nullam amplius hodie inveniat fidem. Utinam huc animum serio adverterent, qui, ex Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis & Optica Mathematici summi ISAACI NEWTONI, nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpere volunt; quasi notiones imaginariæ, quæ ad cognitionem Naturæ mathematicam sufficiunt, & in ea fœcundæ deprehenduntur, in Philosophiam primam & naturalem utiliter inveherentur; immo quasi ex istis notionibus imaginariis inferri possent, quæ ad Theologiam naturalem, & Cosmologiam generalem spectant. Idem enim revera agunt, quod fecere antiqui, qui notionem imaginariam mundi, quæ Astronomo in explicando motu communi adeo proficua fuit, tanquam realem in Physicam inferre ausi sunt. In usum cognitionis mathematicæ multa fingere licet; sed fictiones istæ mathematicæ non sunt veræ causæ, quibus effectus Naturæ intelligibili modo explicantur. Absit autem, ut quis hinc inferat, quasi laudibus Mathematicorum detrahere & supra Mathematicos Philosophos extollere velimus! Neque enim nobis jam propositum est Philosophos cum Mathematicis committere, nec de Jure præcedentiæ controversiam movere. Diversitatem saltem notionum imaginariarum & realium inculcamus; ne in detrimentum scientiæ confundantur, quæ diversa sunt; sed legitimus utrarumque conservetur usus. Nihil decedit laudi Mathematici, etsi non habeatur Philosophus: quemadmodum nec Philosophos laude sua, quam meretur, frustratur quod non simul habeatur Mathematicus. Mathematici & Philosophi in numerum eorum entium referendi, quorum non est ad se invicem ratio; utut maxime consultum sit Philosophum simul esse Mathematicum, præsertim ubi in Philosophia ad tertium cognitionis gradum adspirat; cum Mathematicus in arte sua summus esse possit, utut nullam inter Philosophos laudem mereatur.

§. 305. De sphæricorum theoria non ante cogitarunt Geometræ, quam cum Astronomia ad eandem eos invitaret. Qui ergo ad tertium cognitionis gradum adspirat, ei suademus, ut primo, in usum secundi, totum caput secundum perlustret, & quomodo principia illius theoriæ ad sphæ-

ſphæram mundanam applicentur expendat, donec ſingula, quæ hic explicantur & demonſtrantur, habuerit perſpecta; parum ſolicitus, quomodo primi inventores in ea incidere potuerint. Enimvero ubi ſingula ipſi probe cognita atque perſpecta fuerint; jam ſecundis curis idem caput perluſtret; atque jam ſupponat, quaſi nulla adhuc proſtaret ſphæricorum theoria; & inquirat, quomodo ſuppoſito phænomeno, (quod veluti baſis eſt totius Aſtronomiæ ſphæricæ, tanquam fonte rationum de ceteris quæ quæruntur reddendarum, dum in phænomenorum motus communis rationes inquirimus,) in circulos, quæ in ſphæræ ſuperficie concipi debent, aut ſi mavis tanquam ſphæram ſecantia plana conſiderantur, incidamus. Immo non inconſultum erit, ſi ante, quinque priora capita, in uſum ſecundi gradus cognitionis, pertractet, quam quæ in uſum tertii perpendenda ſunt, exquirat; quoniam hoc pacto evidentius ipſi conſtabit, quænam ſint phænomena motus communis in hac Aſtronomiæ parte determinanda; ſicque facilius apparebit, quonam circulorum apparatu ea fini ſit opus. Dum vero curis ſecundis caput ſecundum percurrit, attentione inprimis opus eſt, ut obſervetur, quomodo theoria imperfecta nos deducat ad obſervationes, quibus perficiatur, ſimulque ad obſervationes, quibus ad praxin aptatur. Ex. gr. Vi phænomeni fundamentalis, ſphæra mundana circa Tellurem continuo circumvolvitur. Enimvero quæritur an puncta illa fixa circa quæ rotatur, & qui poli dicuntur, ſemper ſint iidem; an vero mutentur. Quid ſumi debeat, per obſervationes definiendum. Similiter, cum motus vel æquabilis, vel inæquabilis, eſſe poſſit, & celeritas in diverſis revolutionibus vel eadem, vel diverſa; denuo quid ſumendum ſit per obſervationes definiendum. Equidem per modum hypotheſeos ſumi poteſt, polos ſemper manere eoſdem, motum non modo eſſe æquabilem, ſed eandem quoque eſſe in qualibet rotatione celeritatem. Enimvero, ubi examinanda hypotheſis, ad obſervationes tandem confugiendum. Atque adeo videmus, quomodo theoria imperfecta beneficio obſervationum reddatur perfectior. Similiter, ubi per theoriam agnoſcis Meridianum ſecare hemiſphærium in duas partes æquales, & in eodem altitudines ſtellarum eſſe maximas, ſeu diſtantias a vertice minimas quas habere poſſunt; in uſum praxis ſitus Meridiani determinandus eſt reſpectu tui loci. Nec abſimili modo patet ſitum quoque poli reſpectu loci tui determinandum eſſe. Deducit adeo nos theoria ad obſervationes, quibus eadem ad praxin aptatur. Unde liquet, quomodo ea, quæ per meditationes deteguntur, ulterius quærenda inſinuent, de quibus ante cogitare non poteras. Probe autem notan-

dum est, quomodo observationes sine circulo vitioso, quem Logici vocant, instituantur, quando utraque alteram supponere videtur, quales subinde in Astronomia occurrunt. Habemus exemplum, in invenienda linea meridiana, ad determinandum planum meridiani in dato loco §. 120. Etenim ea supponit stellæ declinationem, vel etiam Solis intra tempus observationis non mutari. Supponit observatio immutabilitatis declinationis immutabilitatem poli, quæ ex immutabilitate altitudinis maximæ, adeoque in plano meridiani, demonstratur §. 114. Quod si tamen perpendas, quæ §. 110 *& seqq.* docentur; videbis, quomodo absque periculo circuli vitiosi committendi hæc dirimantur. Equidem non negaverim, initio Astronomos plurima sumsisse per modum hypotheseos, quemadmodum idem quoque haud raro fieri debuisse ex Theoricis constabit; & cum ex istis hypothesibus deducta cum coelo, deinceps per alias observationes consentire deprehenderent; assumtis demum plenum assensum præbuisse: hoc tamen minime obstat, quo minus Astronomiam methodo synthetica tradituri ostendamus, quomodo scrupulosiores in infantia statim Astronomiæ certitudini prospicere potuerint; cum nobis propositum sit eam ita tradere, ut methodum imitari liceat, non modo in Philosophia naturali, verum etiam in aliis ejus partibus, ubi a posteriori quædam stabilienda, ut alia inde deduci queant.

§. 305. Qui tertium cognitionis gradum intendit, problemata per Trigonometriam sphæricam soluta analytico more expendere debet. Artificium heuristicum, quo hic utendum, in eo consistit, ut interfectione circulorum sphæram secantium detegatur triangulum, cujus id, quod quæritur, pars aliqua est, sive latus, sive angulus; ac præterea attendatur, num per observationem, principia sphærica, aut calculos præcedentes dentur tres ejusdem trianguli partes aliæ. Constat enim ex tribus datis per Trigonometriam sphæricam semper inveniri posse quartum, quod quæritur. Facillimum exemplum præbet problema quartum §. 198, quo inveniri jubetur puncti cujuscunque dati Eclipticæ declinatio. Quoniam declinationem metitur arcus circuli maximi, inter æquatorem & punctum datum interceptus, atque ad æquatorem perpendicularis (§. 76 *Astron.*), qui circulus declinationis dicitur (§. 78 *Astron.*); hinc colligitur, animum advertendum esse ad æquatorem, eclipticam & circulum declinationis. Quamobrem in charta describitur circulus, qui sphæram mundanam repræsentare fingitur; cumque situs æquatoris dependeat a polis mundi (§. 48 *Astron.*); in eo sumitur pro arbitrio punctum P, quod polum repræsentet. Jam æquator sphæram mundanam in duo hemisphæria dividit (§. 50 *Astron.* Tab. IV. Fig. 40.

Aſtron.), & ſingula ejus puncta a polo mundi quadrantis intervallo diſtant (§. 49 *Aſtron*). Ex polo igitur P, intervallo quadrantis AP, deſcribitur circino arcus AQ, qui æquatorem repræſentat. Cum polus eclipticæ certo intervallo a polo mundi P diſtet (§. 179 *Aſtron.*), & illa æquatorem ſecet (§. 172 *Aſtron.*); pro arbitrio ſumitur punctum M tanquam polus eclipticæ & ex eo quadrantis intervallo ME deſcribitur arcus EL, qui eclipticam repræſentat, & æquatorem AQ in G ſecat. Cum circulus declinationis tranſeat per polos mundi P & *p* (§. 78 *Aſtron.*) & ex principiis ſphæricis pateat, quod poli ejus ſint in æquatore, punctum vero S in ecliptica pro lubitu ſumi poſſit; deſcribatur denique arcus PSD, qui quadrantem circuli declinationis repræſentat (§. 79 *Aſtron.*). Patet hoc modo interſectione æquatoris, eclipticæ & circuli declinationis obtineri triangulum DGS in ſuperficie ſphæræ mundanæ, cujus crus DS repræſentat declinationem puncti eclipticæ S, quæ quæritur. Inquirendum igitur porro eſt, num in eodem triangulo tria tanquam aliunde cognita deprehendantur. Quoniam itaque punctum eclipticæ S, cujus declinatio quæritur, pro lubitu ſumitur a Tabularum conditore, aut in alio caſu datur; in priori caſu punctum G, in quo ecliptica æquatorem ſecat, ſumi poteſt, vel pro principio arietis, vel pro principio libræ (§. 158, 160 *Aſtron.*), in poſteriori ex dato puncto eclipticæ patet, num punctum G repræſentet principium arietis, an vero principium libræ. Ponamus in præſenti punctum G eſſe principium arietis. Quia punctum eclipticæ S datur, ejus diſtantia a principio arietis ſeu arcus eclipticæ SG datur. Datur præterea angulus obliquitatis eclipticæ per obſervationem (§. 163, 178 *Aſtron.*). Et ex ſphæricis conſtat angulum ad D eſſe rectum (§. 76 *Aſtron.*). Habemus itaque in triangulo DGS tria data, nimirum angulum rectum D in interſectione æquatoris AQ & circuli declinationis PD, angulum obliquitatis eclipticæ G, diſtantiam SG puncti eclipticæ S a puncto æquinoctiali G. Inveniri autem debet latus DS angulo obliquo G oppoſitum: id quod fieri poſſe, per Trigonometriam ſphæricam patet. Videmus adeo, qua analyſi reſolutio problematis de invenienda declinatione puncti cujuſcunque eclipticæ fuerit inveſtigata, & ex hac analyſi facile condi poterat demonſtratio problematis ad morem Veterum Geometrarum, ſiquidem tanto rigore demonſtrandi foret opus. Nimirum qui ad Aſtronomiam accedit, cum in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ, Trigonometriæ utriuſque & ſphæricorum, Opticæ item, Catoptricæ atque Dioptricæ jam ita verſatus ſupponatur, ut, quæ in iſtis Ma-

theſeos partibus traduntur, familiaria experiatur, in Methodo demonſtrandi jam ſatis exercitatus eſt, ut non minutiſſima quæque ipſi enucleari ſit opus. Non tamen inconſultum eſt, ut, qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat, eodem rite extra eandem uſurus, analyſi quam hic commendamus ſedulo incumbat, ac ſyntheticas demonſtrationes hinc eruat.

§. 306. Qui in ſeipſis experiuntur ſe, abſque iſta analyſi quam hic urgemus, ſine mora ſchemata delineare, & triangulorum reſolutiones invenire poſſe, ac abſque demonſtratione hinc derivata, veritatem ſolutionis problematum propoſitæ perſpicere; tantum apparatum condemnabunt, ac tempus inanibus ſpeculationibus falli exiſtimabunt, quod longe utilius in aliis addiſcendis collocari queat. Immo non deerunt, qui, cum inter Aſtronomos merito ſuo emineant, analyſin iſtam ac derivatas inde ſyntheticas demonſtrationes inter ſuperflua referent; forſan tanquam puerilia prorſus ridebunt. Quamobrem apprime neceſſarium videtur, ut quædam ad avertendum præjudicium philoſophaturo admodum nocuum annotemus. Nemo in dubium vocare poteſt, omnibus iſtis notionibus quæ analyſin noſtram ingrediuntur, animum ejus imbutum eſſe debere, qui proprio marte ſolutionem problematis de inveſtiganda declinatione ſingulorum graduum, aut puncti cujuslibet eclipticæ invenire, aut veritatis ejuſdem, ubi ab alio inventa ſupponitur, plene convinci debet. Pone enim quamcunque illarum eſſe tibi incognitam; extemplo conſtabit, tibi de veritate ſolutionis dubium aliquod adhuc ſupereſſe; conſequenter abeſſe convictionem, quæ omnem dubitationem excludit. Notiones igitur iſtæ omnes influunt in determinationem aſſenſus, quem præbes ſolutioni tanquam veræ. Quamobrem ſi diſtincte exponendum, quomodo generetur aſſenſus, & qui fieri potuerit, ut a priori in ſolutionem problematis inciderit primus inventor; nulla illarum notionum prætermittenda; ſit ita quod inventor, vel qui ſolutionem jam inventam addiſcit, in confuſis notionibus acquieſcat, nec quæ ideæ a qua pendet convictio inſunt, ſingula a ſe invicem actu mentis diſcernat. Sane cum Philoſophi ſit rationem reddere iſtius aſſenſus ac modi, quo ad ſolutionem problematis inventor pervenire potuerit; nemo niſi cognitionis philoſophicæ contemtor reprehendet, quod quæ actibus animæ inſunt diſtincte explicet, utut utilitatem non pervideat. Hanc vero eſſe maximam, ſi quis animum ad philoſophandum appellit, haud difficulter oſtenditur. In Aſtronomia, ſchemata, notiones, quas antea tibi comparaviſti, imaginationi præſentes ſiſtunt; ut confuſa quædam idea animum attendenti ſufficiat ad veritatem

proti-

protinus perspiciendam. Enimvero in Philosophia, præsertim in Metaphysicis ac Moralibus, istiusmodi subsidio destituimur, quo imaginatio apta efficitur ad vicarias intellectus operas præstandas; nec confusis ejus ideis tuto fidere licet, siquidem errandi periculum subire nolueris. Ipse igitur intellectus agere debet, quod suum est; adeoque non admittendæ sunt nisi notiones distinctæ, nec in exacta earundem evolutione unquam nimii sumus; siquidem eam desideraverimus evidentiam, quæ in Mathesi datur. Quamobrem ut evolutioni huic adsuescamus, consultum omnino est analysin problematum primi mobilis instituere, quemadmodum præcepimus: id quod in Astronomia multo facilius succedit, quam in Philosophia; quia intellectus dirigitur ab ipsa imaginatione, modo ad imaginem, quæ ob oculos versatur, animum attendas; cum, in Philosophia, imaginatio ac sensus suppetias ferre nequeant, sed intellectui magis obstaculo sint, ne suo munere dextre fungatur. Non suadeo nisi experta & quorum veritatem in seipso experiri poterit, qui voluerit. Quicquid igitur videatur aliis, qui Astronomiæ totos sese dederunt, nec Philosophiæ excolendæ operam impendendi otio fruuntur; ego istam Analysin admodum proficuam judico omnibus, quotquot ad hanc excolendam animum appellere decreverunt. Neque enim existimandum est levi opera consequi te posse, ut methodo demonstrativa in philosophando rite utaris. Plurima enim sunt, ad quæ per exempla felicius, quam per præcepta patet aditus: exempla vero tutissima offert Mathesis, si accurata demonstrationum analysis curæ cordique fuerit. Nos, quibus methodi intimius cognoscendæ cupido studium Matheseos commendavit a prima ætate, Mathesin quoque hoc nomine maximi facimus. Non jam commemorare lubet, quod distincta usus facultatum animæ explicatio augeat scientiam philosophicam, & quod eum cognoscere teneatur Philosophus, si in Philosophia morali tradere velit, quæ satis faciunt: hic enim, ubi intellectus perficiendi nonnisi ratio habetur, ad methodum tantummodo digitum intendimus.

§. 307. Non lubet ad particularia descendere, quæ utiliter moneri poterant: neque enim consultum est, ut prima statim vice minutissime persequatur singula, qui intellectus perficiendi gratia ad studium astronomicum accedit. Quodsi enim hisce tantummodo observatis, quæ docuimus, ad studium psychologicum & ontologicum accesserit; in Ontologia & Psychologia probe versatus, proprio, quod acquisivit, acumine deteget, quæ adhuc annotari poterant. Merentur autem attentionem, quæ de refractione, parallaxi, & crepusculis dicuntur; eo etiam fine, ut intel-

intelligatur, quam necessarium sit experientiæ & rationis connubium, ne per theoriam fieri posse videantur, quæ tamen in praxi minime succedunt. Nimirum qui experientiam negligit, subinde fieri posse sumit, quæ ob circumstantias a priori non definiendas haud quaquam fieri possunt. Unde contingit nos incidere in resolutiones problematum, quibus satisfieri nequit. Observanda hæc sunt Philosopho, non minus in Philosophia morali, quam civili; ne sibi jam consecutus videatur, quæ adhuc in quærendorum numero sunt; & a veritate inquirenda desistat, quam detegere in potestate ipsius erat, modo præjudicio isto non habuisset mentem præpeditam.

§. 308. Pars theorica Astronomiæ ad perficiendum intellectum, ut eodem extra Mathesin utaris, plurimum confert; modo omnem afferas attentionem ad methodum, tantopere a nobis commendatam, & tam sollicite inculcatam. Capite primo & secundo, in quibus de natura Solis ac Lunæ, ceterorumque planetarum, tam superiorum, quam inferiorum, eorumque satellitum agitur; docentur, quæ ad Physicam magis, quam Astronomiam spectant, etsi Astronomus jure suo sibi ea arroget, quæ observationibus suis debentur. Quamobrem hinc discere licet, quomodo utiliter in Philosophia naturali, seu Physica, sit versandum; nimirum quomodo quærendæ sint observationes tam communes, quæ sua veluti sponte sese offerunt, quam studio quæsitæ; ac inde a posteriori colligantur propositiones, quas a priori detegere non dabatur, principiis ad ratiocinandum necessariis deficientibus. Nos in Physica dogmatica, quam idiomate patrio evulgavimus, eandem viam ingressi sumus. Etsi autem facilis videatur hæc methodus; non tamen adeo facilem deprehendet, quantum putat, qui eadem rite uti voluerit. Nimirum acumine nonnisi multa exercitatione acquisito opus est, ne observationibus inserantur, nisi quæ sensui patent; ut eædem ab omni prorsus vitio subreptionis, quod in Logica vocamus, sint liberæ: qua in re multum peccatur a Medicis, utut virorum experientissimorum titulum, quasi sibi proprium, dudum consecutis. Neque facilius est facta, quæ observantur, notione distincta comprehendere, & verbis aptis singula in eadem contenta enunciare, ut certi quid inde concludi possit. Artis præterea est, nec plus, nec minus inde colligere, quam certo ratiocinio inferri potest. Qui his accurate satisfacere voluerit, etsi in demonstrando nihil difficultatis deprehendat, nondum tamen ex voto omnia sibi succedere experietur. Quamobrem ad observationes, quas commemoramus, animum probe attendat; ut idea exemplaris eas rite describendi animo insinuetur; nec minorem attentionem afferat ad corollaria

laria, in quibus propositiones ex iisdem eliciuntur; ut modum stabiliendi per observationes principia, seu ex iis eruendi propositiones, comprehendat. Utilitatem non modo in Physica, verum etiam in ipsa Philosophia morali & civili experietur. Inprimis etiam eandem animadvertet, qui Medicinam ad majorem certitudinem perducere voluerit. Sed memini me de hisce jam plura dixisse, in Horis subsecivis, cum de Medico Astronomum imitante verba facerem. Non inanem operam sumet, qui ea, quæ in Logica de experientia præcipiuntur, cum observationibus ac inde deductis propositionibus confert: ita enim facilius intelliget regulas methodi, quas proprio marte abstrahere non poterat. Immo praxin Logicæ, quoad hanc partem, hoc pacto sibi comparabit. Qui novit, quantam utilitatem nobis afferat cognitio a posteriori acquisita; eum nunquam pœnitebit studii, quod in methodo hac intimius perspicienda collocaverit.

§. 309. Theoricam tradidimus juxta hypothesin COPERNICI, atque KEPPLERI; nimirum supposito Terræ motu, & orbitis Planetarum ellipticis; in quibus Planetæ ea lege incedunt, quemadmodum sagacitate sua primus detexit KEPPLERUS; propterea quod sic prodit theoria cum cœlo omnium maxime consentiens. Etsi autem methodum *Kepplerianam* exposuerimus computandi loca Planetarum; non tamen neglecimus, quæ recentiorum industria, postquam Geometria & Astronomia magis exculta fuit, ad ejus perfectionem ulteriorem accesserunt. Quodsi tamen quis tertium cognitionis gradum intendit, ei suademus, ut, probe intellectis iis, quæ de motu Planetarum elliptico traduntur, Astronomiam quoque veterem perlustret, qualem tradidit PTOLEMÆUS, juxta Epitomen a REGIOMONTANO factam, & in subsidium vocato RICCIOLI *Almagesto*, in quo exponuntur, quæ ad eam magis excolendam post eum accesserunt. Hinc enim omnium optime addiscet, quomodo Philosophia naturalis per hypotheses sit excolenda, ubi ad veritatem liquidam pertingere non licet; & eundem morem imitabitur in Medicina ad certitudinem successive evehendam; immo in reliqua etiam Philosophia, præsertim practica, ac ipsa praxi vitæ humanæ. Equidem non ignoro esse hodie nonnullos, qui omnem hypothesium usum in Philosophia naturali & Medicina damnant; sed hi, propter abusum, ipsum etiam usum rejiciunt: id quod sine scientiæ incremento haud quaquam facere licet. Diximus nonnulla huc spectantia in Discursu præliminari de Philosophia, quem Logicæ præmisimus, methodum philosophicam explicantes. Laudant quidam NEWTONUM, quod ex Philosophia naturali eliminaverit hypotheses; qui tamen hypothesibus indulget in iis ipsis, in quibus eum ab iisdem abstinuisse existimant. Quid enim at-

tractio, seu gravitas universalis quæ per modum attractionis repræsentatur, aliud est quam hypothesis, quæ in gratiam quorundam phænomenorum sumitur, & ad omnem deinde materiam extenditur? Immo nonne explicatio systematis mundani, quæ præcipua pars est Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, per motum projectionis, & gravitationem in Solem, aut centrum Planetæ primarii, hypothesis philosophica est; quam HEVELIUS in *Cometagraphia*, ad imitationem motus projectorum a GALILÆO detecti, imaginatus est, & quæ in Mathesi utiliter surrogatur in locum hypotheseos naturæ; phænomenorum autem causas physicas non attingit, quas scrutari debet Physicus? Facile quidem largior hoc non videre eum, qui soli Mathesi assiduam operam navavit, ac ideo notionibus imaginariis animum imbutum possidet: extemplo tamen videt, qui cum Matheseos studio Philosophiæ, præsertim Metaphysicæ, studium conjunxit. Sed mittamus hæc, & per nos suo quisque abundet sensu. Videamus potius, quomodo in cognoscenda methodo per hypotheses cognitionem humanam promovendi, sit progrediendum. Quemadmodum in anterioribus observavimus, omnem cognitionem humanam initium capere ab observationibus communibus; ita similiter de parte Astronomiæ theorica idem dicendum. Ex observationibus communibus innotuit motus proprius Solis (§. 27 *Astron.*): quo scilicet indies, ab occasu versus ortum, certo intervallo promovetur (§. 30 *Astron.*): non tamen tanquam verus; cum applicata Mathesi ad observationem constet (§. 571 *Astron.*), motum Solis eodem modo e Tellure spectari, sive ipse circa Terram intra orbitam quiescentem revera moveatur, sive Terra circa Solem quiescentem feratur. Quando itaque Astronomus sumebat Terram quiescere, & Solem motu annuo circa eandem ab occasu in ortum moveri; quod sumebat, hypothesis erat, quæ, admisso motu vertiginis Telluris, hypothesi naturæ æquipollet; si quod autem sumitur a veritate alienum, admisso motu communi tanquam vero, hypothesis nonnisi imaginaria est, cui adeo in Mathesi quidem locus conceditur, minime autem in Physica. Finge jam Astronomum noluisse uti hypothesi: nemo Astronomiæ gnarus diffitebitur, eum statim in limine nobilissimam hanc scientiam deserere debuisse, nulla spe ad veritatem liquidam perveniendi relicta, absque conjecturis hypothesi innixis. Immo si quis, posito motu communi tanquam vero, hypothesin imaginariam de motu Solis communi, in Philosophiam naturalem, tanquam veritatem, inferre voluisset; ecquis sanus Philosophus hoc approbare potuisset, propterea quod ea satisfacit Astronomo ad cognitionem mathematicam motus proprii Solis acquirendam? Ex observationibus itidem communibus, sed majore attentione factis, constabat, Solem ab eodem puncto digressum ad idem redire.

Hinc

Hinc primum erat inferre, quod Sol motu proprio feratur per lineam in se redeuntem, intra cujus ambitum collocata Terra. Enimvero cum infinitæ sint lineæ in se redeuntes, quemadmodum ex Geometria constat; quæstio incidebat, quænam linearum in se redeuntium sit orbita Solis. Ex Geometria elementari notum erat, in harum numero esse circulum, cujus proprietates & symptomata sunt magis obvia quam ceterarum. Sumebant igitur Astronomi, per modum hypotheseos, orbitam Solis esse circularem. Quodsi hypothesi uti noluissent, non sumendum esse contendentes, nisi quod sit demonstratum; impossibile fuisset, ut theoriam motus Solis cœlo consentientem detegerent, & Astronomia adhuc deserta & inculta jaceret. Enimvero, quemadmodum in veritate investiganda accidit, ut, si uni quæstioni satisfacias, quantum datur, nimirum vel veritatem detegendo, vel conjecturæ locum faciendo, enascantur aliæ; ita etiam in casu præsenti jam quærebatur, in quonam puncto, intra ambitum circuli sito, posita sit Terra. Tab.IV. Fig. 41. Ex Geometria elementari tyronibus notum est, circulum AHPI habere centrum C, a quo singula puncta peripheria AHPI æqualiter distant. Quæstio igitur huc redibat, num Terra sit in centro orbitæ C, an vero extra centrum veluti in T. Eam dirimere non licebat, nisi denuo interea alterutro assumto tanquam vero, consequenter confugiendo ad hypothesin. Nullum adeo est dubium, quin primus inventor sumserit, veritatis investigandæ gratia, Terram esse in centro C. Inquirendum ergo erat, quomodo loca Solis definiantur ad datum tempus, in hac hypothesi, ut locus Solis computatus cum eo, qui per observationem eruitur (§. 203 *Astron.*), conferri, sicque hypothesis ad examen referri posset. Hoc ubi investigare volebat Astronomus, cum per principia Geometriæ elementaris ipsi perspectum esset, si arcus AD & DE sint æquales, angulos ACD & DCE esse æquales (§. 141 *Geom.*); nova incidebat quæstio, utrum Sol motu æquabili incedat in orbita sua, ut arcus AD & DE æquali tempore percurrantur, an vero inæquabili, ut iidem arcus absolvantur tempore inæquali. Nemo non videt, hic denuo confugiendum fuisse ad hypothesin, alterutrum horum assumendo tanquam verum; donec examen hypotheseos, per observationes decretorias, proderet quod certum est. Cum motus æquabilis sit uniformis, & intellectu facilior inæquabili; legibus artis conjectandi, quibus in assumendis hypothesibus locus est, conveniens erat supponere, quod sit æquabilis. Unde enascebatur hypothesis Solis concentrica, qua Sol supponitur motu æquabili incedere in orbita sua secundum signorum successionem, Terra in centro ejus collocata. Atque hoc pacto hypothesis sufficienter determinata erat ad calculum geometricum instituendum; ut adeo non alia re opus esset, quam ratio-

Tab.IV. Fig. 42.

ratiocinando hinc colligere, quæ ad
Tab. IV. eum spectant. Si Sol motu æquabili
Fig. 43. percurrit orbitam; arcus, quos percurrit AF & FG, consequenter etiam anguli ACF & FCG, sunt tempori proportionales. Quamobrem, ut dato tempori respondens angulus ACF, seu arcus AF, computari possit, notum esse debet, quo tempore Sol integram orbitam percurrat: quod cum sit facti, aliter innotescere non poterat, nisi per observationem. Observari nimirum debebat, tempore quodam, locus Solis in dato aliquo puncto A; ac porro observandum, quo tempore ad idem redeat punctum. Etsi autem initio indifferens videretur, quodcunque punctum eligatur; ubi tamen ad observationem accedebat Astronomus, non commode observari posse tempus advertit, quo Sol ad idem punctum promiscue assumtum redit. Quoniam itaque planum æquatoris determinari potest independenter a theoria Solis (§. 149 *Astron.*); commodissima videbatur huic instituto observatio appulsus Solis ad æquatorem; modo constaret, æquatorem constanter secare orbitam Solis in eodem puncto, seu, astronomice loquendo, puncta æquinoctialia esse fixa. Sumebatur hoc primum denuo per modum hypotheseos, & inquirebatur in modum observandi tempus, quo centrum Solis ad æquatorem appellit. Et sic incidebatur in armillas æquatoreales, quibus Veteres observasse æquinoctia novimus. Quoniam sic, etsi adhuc rudite constare poterat quantitas anni solaris, si momentum æquinoctii vernalis sumebatur pro epocha; per regulam trium computari poterat locus Solis ad datum quemvis diem in hypothesi concentrica, quemadmodum docuimus (§. 672, 673 *Astron.*). Quodsi jam loca computata conferebantur cum observatis (§. 203 *Astron.*); illa cum his minime consentire deprehendebantur; adeoque hypothesin concentricam a veritate alienam esse palam erat. Quoniam igitur Terra intra ambitum orbitæ Solis constituitur, centrum illius extra centrum hujus situm esse debet in hypothesi circulari. Atque adeo in locum concentrici circuli sumebatur, per modum hypotheseos, circulus eccentricus, retento motu æquabili. Ponamus jam in C esse cen- Tab. V.
trum orbitæ, in T centrum Telluris, Fig. 44.
in H punctum æquinoctiale unum, in I alterum. Repræsentabit schema hypothesin Solis circularem eccentricam. Inquirendum adeo erat, quænam ex ea consequantur, ut denuo quæ inde colliguntur cum observationibus, quibus inde deducta occasionem præbent, conferri possint. Quia nos Solem ex puncto T intuemur; statim apparebat, distantiam ejus continuo variari, cum TS sit major ipsa TL, eamque in A esse maximam, in P minimam (§. 303 *Geom.*). Atque sic nascebatur notio Apogæi A (§. 636 *Astron.*) & Perigæi P (§. 635 *Astron.*), atque eccentricitatis Solis TC (§. 639 *Astron.*

Astron.). Enimvero jam incidebat quæstio, utrum æquinoctium vernale, seu principium arietis supponendum sit in H, an vero in I; item in quo orbitæ solaris puncto, si ad eclipticam referatur, hæreat Apogæum A, in quonam Perigæum P, & quanta sit eccentricitas TC. Nemo non videt confugiendum hic esse ad observationes, quales autem eædem esse debeant, ut sint decisivæ, ex hypothesi deducendum. Quodsi Sol sit in S; patet distantiam ab Apogæo in centro orbitæ C videri sub angulo ACS; ex Tellure autem in T sub angulo ATS: quod cum ita sese habeat per integrum semicirculum HAI; distantia Solis ab Apogæo semper minor videtur, quam revera est in eo semicirculo, in quo hæret Apogæum Solis A. Ex adverso si Sol sit in L, ex centro orbitæ distantia a Perigæo PL videtur sub angulo PCL, ex Tellure in T autem sub angulo PTL, adeoque in semicirculo IPH continuo apparet major, quam revera est, (§. 239 *Geom.*
Tab.IV. Fig. 45. & §. 209 *Optic.*). Consideremus porro Solem in punctis æquinoctialibus H & I. Quodsi spectetur ex centro orbitæ C, distantiæ ab Apogæo A, nempe AI & AH, videntur sub angulis rectis ACI & ACH, ut adeo Sol videatur absolvisse semicirculum, ab uno æquinoctio usque ad alterum, dum revera semicirculum HAI percurrit, in quo Apogæum A hæret: enimvero ex Terra spectantur distantiæ AI & AH ab Apogæo A, sub angulis ATI & ATH, qui sunt rectis minores (§. 239 *Geom.*); consequenter HAI minor semicirculo apparet (§. 209 *Optic.*), adeoque Sol minus temporis spatium consumere videtur in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A, quam in altero IPH, in quo hæret Perigæum P. Jam cum porro Tab.IV.
in semicirculo HAI distantiæ Solis a Fig. 44.
centro Terræ T sint majores distantiis a centro orbitæ, veluti TS major CS, & in Apogæo A distantia TA sit maxima (§. 303 *Geom.*), in semicirculo autem IPH distantiæ Solis a Terra sint minores distantiis a centro orbitæ, veluti TL minor CL, & in Perigæo P distantia TP sit omnium minima (§. *cit. Geom.*); Sol ipse major videri debet in semircirculo IPH, in quo est Perigæum, quam in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A. Quodsi jam meditationem cœptam eodem, quo hactenus, modo continuare velimus; observationes determinare licebit, quales esse debeant, quæ desiderantur. Sed ne justo prolixiores simus, filum abrumpendum est, contentis monstrasse viam, qua sit eundum, quantum ad præsens institutum sufficit. Annotabimus potius alia nonnulla, quæ usui esse possunt illis, qui Matheseos studio intellectum perficere gestiunt, ut eodem rite extra eandem utantur.

§. 310. Ex iis, quæ diximus, clarissime perspicitur, quomodo in investigandis veritatibus a posteriori sit procedendum, & quam indispensabilis usus sit hypothesium, ut, si iisdem

uti nolueris, nulla superſit ſpes veritatis unquam detegendæ. Non eſt quod excipias hypotheſibus equidem locum eſſe concedendum in inveniendo, ab iis tamen eſſe abſtinendum in libris, qui publici juris fiunt. Etenim ubi veritates ab iis, quæ nobis perſpecta ſunt, principiis procul remotæ ſunt, ut a priori denegatur ad eas acceſſus; non ſemper unius hominis eſt ea abſolvere, quæ a poſteriori acceſſibilem faciunt: quin potius haud raro ſociæ requiruntur operæ, cum hic valeat illud pervulgatum, oculos plures plus videre quam oculum unum; & ſubinde qui acceſſum parare ſtudet, laborem cœptum aliis continuandum relinquere tenetur. Qui animum ad ea attendit, quæ de theoria Solis inveſtigata modo annotavimus, dictis facilem præbebit aurem; etſi rationes non perſpiciat, quas dare poteramus, ſi prolixiores eſſe liceret. Quamvis igitur, examine inſtituto, hypotheſes deprehendantur a veritate alienæ; non tamen ideo cenſendæ ſunt inutiles; propterea quod aberrando a veritate deducimur ad veritatem, ubi methodo conjecturali opus eſt. Unde memini me ſæpius auditoribus meis inculcaſſe, deberi etiam a veritate aberrantibus ſuas laudes, ubi nobis errandum fuiſſet, niſi ipſi priores erraſſent. In aliorum enim meritis cenſendis æqui eſſe debemus, ne quid admittamus, quod contra officium boni viri eſt. Nemo Aſtronomus vitio vertet ei, qui primus de theoria Solis cogitavit, ſi hypotheſin motus æquabilis in orbita concentrica excoluerit, utut ſucceſſores eam a veritate alienam examine per obſervationes inſtituto deprehenderint. Videt enim eum feciſſe, quod initio faciendum erat, & aliis perficiendum reliquiſſe, quod ipſi perficere vel non licebat, vel quod perficere nolebat. Quodſi Phyſici Aſtronomos imitati fuiſſent, ex obſervationibus communibus eliciendo hypotheſes, & has, per obſervationes ſtudio quæſitas & experimenta, examinatas corrigendo ac perficiendo, nullus profecto dubito, quin Philoſophia naturalis dudum magis promota fuiſſet. Idem dicendum de Medicina, de qua jam diſertius dixi in Horis ſubſecivis, cum Medicum Aſtronomos imitantem in ſcenam producerem.

§. 311. Diſcimus etiam, quales eſſe debeant hypotheſes, quibus in Philoſophia concedendus eſt locus; nimirum quas methodus conjecturalis ſuggerit, qua in veritate inveſtiganda utendum. Sumitur nimirum in gratiam nonnullorum phænomenorum, unde ratio eorum reddi poteſt; ac deinde inquiritur, num ceterorum quoque per id, quod ſumitur, ratio reddi poſſit; quatenus ea, quæ ex hypotheſi a priori colliguntur, conferuntur cum iis, quæ obſervantur. Perinde enim eſt, ſive antea obſervaris phænomena, & poſtea demum inquiras, num eadem a priori ex hypotheſi deducantur; ſive primum a priori deducas

ducas ex hypothesi, quæ inde necessario consequuntur, & postea demum observes, num eadem quoque in rerum natura ita sese habeant. Patet autem certum esse debere, quod id, quod sumitur, in se spectatum possibile sit. Ita sumebatur in Astronomia, orbitam Solis esse circulum. Certum nimirum erat, eam esse lineam in se redeuntem. Quamobrem cum circulus sit linea in se rediens, in se spectatum non impossibile est, ut orbita Solis sit circulus. Non igitur probamus commentitias hypotheses, quas hodie bene multi in Philosophiam naturalem invehunt, quidvis pro lubitu fingentes, utut demonstrare minime possint talia, quæ sibi imaginantur, in rerum natura existere posse. Immo facile largimur, istiusmodi commenta non esse qualitatibus occultis scholasticorum meliora. Quamobrem in Physica, quam patrio sermone edidimus, maluimus phænomena ex phænomenis explicare, nec in hypothesibus admittere nisi quæ ex observationibus colliguntur; ne incerta cum certis confundantur, & in inventorum numerum referantur, quæ sunt in quæstionum numero. Omnium minime autem probamus, si ex commentitiis hypothesibus rationes reddantur in Medicina; quippe quæ non modo usum nullum in praxi habent, verum etiam nocent, si in praxi earum rationem habere volueris. Et huc dubio procul animum adverterunt, qui Philosophiam naturalem & Medicinam ab hypothesibus liberam esse voluerunt; atque inter theoriam physicam & medicam in arte salutari distinxerunt. Propter abusum tamen hypothesium, non tollendus erat usus; sed hypotheses ad inveniendum veritatem aptæ discernendæ a figmentis, quæ in eorum locum surrogantur.

§. 312. Liquet porro ex iis, quæ de theoria Solis analytice pervestiganda diximus, in veritate a posteriori investiganda perpetuum esse debere experientiæ ac rationis connubium. Neque enim ex observationibus communibus, quæ primo loco assumuntur, quicquam concluditur, nisi in subsidium vocatis principiis geometricis. Immo ipsæ hypotheses inde non derivantur ratiocinando, nisi vi illorum principiorum. Et ubi ex hypothesi a priori deducenda quæ ex ea necessario consequuntur, & sine quibus eadem examini subjici nequit, principiis mathematicis denuo opus habemus, neque absque horum ope observationes in hunc usum capiendæ determinari possunt. Quamobrem si Astronomos in Philosophia naturali, & eidem agnata Medicina, imitari velimus; cogitandum erat de theoria demonstrativa. Ontologia, qualem dedimus, suppeditat notiones directrices, de quibus plura diximus in Horis subsecivis. Et hisce inprimis locus est, ubi analyticam viam ingressuri colligere debemus, quid sit faciendum; quamvis etiam principia ontologica conducant ad conclusiones ex obser-

vationi-

vationibus & experimentis eliciendas. Subinde etiam usui sunt principia mathematica, de quorum ad experimenta applicatione nonnulla diximus in superioribus capitibus quinto, sexto, & septimo, cum de studio Mechanicæ, Hydrostaticæ, Aërometriæ, Hydraulicæ, & Opticæ ageremus. Ex observationibus quoque atque experimentis eliciendæ sunt propositiones determinatæ, eo modo quem in Logica capite 2, sect. 2, part. 2, exposuimus, cum methodum formandi judicia intuitiva & notiones a posteriori traderemus; atque ex hisce principiis demonstranda sunt alia, quæ a priori inde deducuntur. Hoc enim pacto condenda forent Elementa Philosophiæ naturalis, eundem usum promittentia, quem habent elementa EUCLIDIS in Mathesi. Quamdiu enim desiderantur principia certa, quibus in ratiocinando utaris, luxurianti imaginationi omnia tribuuntur, atque adeo non mirum, si abortus imaginationis pro veritate in Philosophia & theoria medica obtruduntur. Neque mirum videri debet, quod de eodem subjecto meditati incidant in cogitationes toto cœlo diversas; ita ut unus per principia chymica explicare velit, quod alter explicat per mechanica, alius per figmenta, ad imitationem causarum sibi notarum, quæ effectum ei similem producunt, cujus causa vel ratio quæritur. Abstinemus ab exemplis, ne sint odiosa. Censere alios videri nolumus, dum docere nobis propositum est. Quodsi Deus nobis vitam animi, ac corporis vires conservaverit, ut ad Physicam, Philosophia practica absoluta, progredi licuerit; operam dabimus, ut istiusmodi principia stabiliamus; ne facultatibus inferioribus tribuatur, quod ab intellectu expectandum. Eorum autem necessitatem in dubium revocare nequit, qui facultates cognoscendi earumque usum perspexit. Immo si distinctam ratiocinii notionem ex Logica hausit, eam agnoscere tenetur. Observatio enim, & experimentum, non suppeditat nisi propositionem unam, quæ in syllogismo minoris vicem tuetur. Quodsi ergo hinc inferenda conclusio, principio opus est, quod majoris locum occupat. Cumque non semper unico syllogismo inferatur conclusio, pluribus quoque principiis opus. Quæ enim ratio est, cur multi multa cumulaverint experimenta, multas collegerint observationes rariores; nihil tamen inde intulerint, quod ad alia ratiocinando detegenda prodesset, ut phænomena nondum observata prævidere ac prædicere liceret? Sane non alia, quam quod deficiant principia, quorum ad experimenta & observationes applicatione inferantur conclusiones. Observationes communes, quæ basis sunt omnis cognitionis astronomicæ, in vulgus notæ. Cur vero Astronomus hinc colligat, quæ alii inde colligere nequeunt, non alia ratio est, quam quod ille principia Geometriæ, quæ ipsi perspecta sunt,

ad

ad illas applicet, his vero nulla sint principia, quæ ad easdem applicare possint. Robertus Boyle multa dedit de qualitatibus sensibilibus experimenta: quid vero hinc colligit? Nil nisi generalem hanc propositionem, quæ in Cosmologia ex principiis metaphysicis demonstratur, omnia in natura fieri mechanice. Provocare poteram ad Chymiam, cujus theoria fœcunda, ad inveniendum apta, adhuc desideratur; & usus in Scientia naturali prædicatur, sed non ostenditur: sed in re per anteriora satis manifesta prolixiores esse nolumus.

§. 313. Astronomia quoque nos docet, conjunctis viribus scientiam esse excolendam, & inventa antecessorum esse emendanda, perficienda, confirmanda, prout occasio tulerit; consequenter quæ ab aliis tradita sunt ante addiscenda, quam ad scientiam amplificandam animum appellas. Quantum hic peccetur ab aliis, qui Astronomorum non sequuntur morem, in vulgus proh dolor! notum est. In inventorum numero esse volunt, qui discentium subsellia occupare debebant. Quæ ab aliis tradita sunt contemnunt, antequam ea didicerunt. Sibi soli sapere videntur, qui ex aliena doctrina sapere debebant: Sibi soli sufficere videntur, qui alieno auxilio maxime indigent. Quo quis indoctior, eo in censendis aliis audacior. Vana virium fiducia summa audent, quæ nullo negotio a se confici posse putant, cum vulgaribus capiendis eædem vix ac ne vix quidem sufficiant. Non amore veritatis ducuntur, sed vanæ ambitioni litantes, vulgo imperito ut placeant unice student. Argumentis extrinsecis pugnant, qui rationes intrinsecas ut perspicerent, operam dare debebant. Quodsi Astronomi iisdem moribus fuissent præditi, nihil adhuc præclari de motu siderum sciretur, nec phænomena cœlestia tanta certitudine prædicere daretur, quemadmodum hodie ab Astronomis fieri solet. Quantum, quæso, promota fuit scientia astronomica altercationibus istis de motu Telluris? Quantum vero incrementi debet hypothesi Terræ motæ legitime exculta? Utinam igitur omnes Astronomiæ operam navarent, eamque analytice expenderent, quemadmodum paulo ante inculcavimus, quotquot ad scientias excolendas animum appellere decreverunt. Ego hunc fructum longe maximum judico, qui ex studio astronomico sperari potest; nec me pœniteret temporis quod in eo consumsi, etiamsi alium nullum inde reportassem. Discant hinc, quantum sibi desint, qui studium Astronomiæ negligunt, hac sola de causa, quod nullam ejus utilitatem esse sibi persuadeant in eo vitæ genere, quod olim sequi statuerunt. Quasi vero ea mentis metamorphosis, quæ a studio astronomico expectanda, nullius momenti sit in quolibet vitæ genere, quod Eruditi sequi tenentur. Vulgo quidem ingeminatur;

Didicisse fideliter artes
Emollit mores, nec sinit esse feros:
quod etsi multo laxiore sensu verum sit, quam vulgo accipitur, in praxi tamen parum attenditur. Nemo enim quærit, quantum studium aliquod faciat ad mores emolliendos, aut, ut clarius dicam, ad omnem facultatum nostrarum promptum & genuinum usum.

§. 314. Occurrendum vero est objectioni, quam forsan nonnulli movere poterant Astronomiæ non modo periti, verum etiam in eadem perficienda utiliter versati. Existimabunt enim, eo, quem diximus (§. 309), modo veritatem astronomicam non fuisse detectam. Incessisse inventores per multas ambages, antequam ad viam, qua sit eundum, ipsis pervenire datum fuerit, ac, multis frustra tentatis, tandem reperisse quod ad progressum ulteriorem faceret. Immo plures in deviis substitisse, antequam uni licuerit esse adeo felici, ut in viam rectam incideret. Multum haud raro temporis præterlapsum fuisse, antequam surgeret Astronomus, qui quid daret, cui in Analysi nostra locus esse poterat. Non igitur tam ardua, qualia sunt Astronomorum inventa, tanta facilitate inveniri potuisse, quantam præ se fert analysis nostra. Ubi veritates detectæ sint, earum investigationem videri obviam, quæ prorsus inaccessæ videntur, ubi adhuc ignorantur. Non nego, si facta sola respicias, vera omnino esse, quæ dicuntur: neque enim nobis difficile foret exemplis ea confirmare. Verum enimvero nobis non jam quæstio est de eo, quod factum est; sed de methodo, qua veritas latens tandem in apricum producta. Quodsi regulæ methodi, quibus legitimus facultatum nostrarum usus præcipitur, primis inventoribus distincte fuissent perspectæ, nec defecisset theoria, principia ad ratiocinandum necessaria suppeditans, aut hæc satis familiaria illis fuissent; in ambages inutiles non incidissent, sed rectam, qua eundum est, viam statim animadvertissent, nec in devia delapsi fuissent, multo minus in iisdem diu substitissent. Breviori adeo tempore ea dedissent, quæ in analysi nostra locum merentur, nisi quantum observandi opportunitas moram injecisset. Quando in apricum productum, quod quærebatur; quonam usu facultatum nostrarum id fuerit factum, reperire licet; ac tanto quidem evidentius id patet, si quis in principiis psychologicis fuerit versatus. Non igitur inutile, immo potius necessarium est, nisi incrementum Artis inveniendi negligere voluerimus, ut in eundem omni animi contentione inquiramus, atque eum ad distinctas notiones revocemus, ut constet, quomodo certa methodo reperiri potuisset ab uno, quod nonnisi post multa tentamina, in quibus casui multum tribuitur, detectum. Qui ea perpendit, quæ de Logica artificiali in Prolegomenis Logicæ inculcavimus, dictis

facile

facile afſentietur. Homines multi conſiderantur inſtar unius, in quo nonniſi locum habet rectus facultatum, quem fecerunt, uſus; rejectis aberrationibus, quæ vel uſus hujus defectui, vel abuſui tribuendæ. Quodſi enim extitiſſet homo, qui rectum facultatum ſuarum uſum, abſque ulla aberratione, facere potuiſſet; is nonniſi ea feciſſet, quæ ad detegendam veritatem latentem ſpectaſſent. Quemadmodum in moralibus obſervandum illud CATONIS, ut ex alieno caſu diſcas quæ vites, & nonniſi ea imiteris quæ ad rectum facultatum uſum faciunt; ita ſimiliter hoc tenendum in Arte inveniendi, & omni veritatis cognitione. Fictio illa, quæ hic admittitur, nihil abſurdi habet, atque longe utiliſſima eſt. Meretur itaque attentionem, quoad omnia, quæ a facultatum humanarum uſu proficiſci poſſunt. Qui ſtudio Matheſeos intellectum perficere vult, non aliud intendit, quam ut rectum conſequatur facultatum uſum, aberrationes omnes, quantum datur, poſthac evitaturus. Animum igitur attendere debet ad ea, quæ uſum iſtum loquuntur; parum ſollicitus, utrum in eodem, an in diverſis ſubjectis ea ſint obſervanda; modo conſtet, nonniſi his factis ad ſcopum contendiſſe inventores, cetera vero ipſis nihil profuiſſe, ſed inutiles tantummodo moras peperiſſe, ab illis minime intentas, ſed moleſte latas. Niſi hoc obſervaveris, aliorum exempla & caſus tibi parum proderunt ad perfectionem propriam promovendam; quam tamen metam eſſe in Philoſophia practica univerſali demonſtravimus, ad quam continuo contendere tenemur, niſi obligationi noſtræ naturali deeſſe, ac felicitati propriæ obicem ponere velimus.

§. 315. Nemo non videt ampliſſimum hic eſſe dicendorum campum, ſiquidem omnia, quæ ad præſentem ſcopum ſpectant, minutiſſime perſequi velimus: ſed tantæ prolixitati ſeſe immergere non patitur præſens inſtitutum. Neque etiam diffitemur, quod, ſi quis ulterius progredi voluerit, ei alios quoque autores conſulendos eſſe, tum Veteres, quorum placita collegit RICCIOLUS in Almageſto, tum Recentiores, quos ſuperius laudavimus, cum ſcriptores rerum aſtronomicarum recenſeremus. Quodſi enim ante ſibi cognita atque perſpecta reddiderit, quæ nos noſtro more explicavimus, ut ſine hæſitatione in legendis aliorum ſcriptis progredi poſſit, quam ad hæc legenda accedat; & ordinem temporis obſervet, quo prodita fuerunt, ut pateat, quodnam cogitata anteriora adjumentum attulerint ad poſteriora: quæ exempli loco modo in medium protulimus haud difficulter imitabitur; præſertim ſi in diſciplinis anterioribus, more noſtro, fuerit verſatus, nec ullibi ſuam paſſus deſiderari operam. Hoc conſilium qui ſequi voluerit, ſua ſponte animadvertet, quomodo cum Geometria creverit quoque Aſtronomia. Sane quæ KEPPLE-

RUS dare non poterat, utut sagacissimi ingenii vir, non invita Minerva tentarunt alii; postquam nostro ævo Geometria magis exculta, & ad multo majus fastigium evecta, quam KEPPLERI tempore attigerat. Est etiam Algebræ suus usus in parte Astronomiæ theorica, cujus latissimus usus per universam Mathesin. KEPPLERI ævo adeo ignorabatur, ut ne somniando quidem eum prævidere daretur; nec mirari debeamus, quod abjecta subinde vir summus de Algebra senserit. In gratiam igitur eorum, qui Algebræ studio delectantur, unum alterumque specimen dedimus, quo præclarum ejus in Astronomia usum insinuaremus. Plura suppeditat GREGORIUS in *Elementis Astronomiæ*, & illustria admodum exempla petere licet ex *Commentariis Petropolitanis*.

§. 316. Erunt forsitan nonnulli, qui sibi persuadebunt, inanem operam sumi in tractatione analytica studii astronomici, propterea quod absque ea Astronomi sua invenerint, ac hodienum inventa antecessorum perficiant, novisque accessionibus nobilissimam scientiam locupletent. Enimvero facilis est responsio. Qui quæ ab aliis inventa sunt attenta mente considerant, eorum animis idea quædam exemplaris usus facultatum sese insinuat ad particulare hoc objectum restricta, quam, etsi confusam, imitantur quoad idem objectum, nescii omnino quemnam facultatum usum faciant; quemadmodum accidit iis qui in tractandis negotiis imitantur alios in casu simili, theoria omni destituti. Neque diffitendum, hac imitatione niti omnem praxin Artis inveniendi in Astronomia; quidni etiam in Mathesi reliqua, si a regulis Algebræ, seu Analyseos Mathematicæ recesseris; quamvis etiam in Algebræ praxi huic imitationi multus sit locus. Quam multum vero in hac imitatione tribuatur casui, & quam multis ideo tentaminibus locus sit, meum non est in præsenti exponere. Enimvero tota nostra tractatio analytica non alio tendit, quam ut idea ista confusa revocetur ad distinctam; quo facto, imitatio, quæ fuerat empirica, rationalis evadit, & multo latius extenditur, immo etiam casui subducitur. Nos jam potissimum intendimus, ut Philosophus imitetur Astronomum in qualibet Philosophiæ parte; immo Eruditus quicunque in suo scibili; cum de intellectu studio Matheseos perficiendo agamus, ut eodem extra Mathesin rite utamur. Hæc vero imitatio expectari nequit ab idea confusa, quæ Astronomo prodest in Astronomia excolenda. Immo si qui eam audent, quam sint infelices satis patet. Non deessent exempla illustria, quibus hoc doceri poterat; nisi consultius existimaremus ab iis producendis abstinere.

CAPUT

CAPUT X.

De Studio Geographiæ, Gnomonicæ, & Chronologiæ.

§. 317. Geographia mathematica, cum qua hic nobis negotium est, multum affinitatis habet cum Astronomia, præsertim sphærica, a cujus principiis tota pendet. Unde etiam Veteres eandem ab Astronomia non separarunt, sed quæ in eadem traduntur, ad Astronomiam retulerunt. Quamobrem quæ de studio Astronomiæ sphæricæ dicta sunt, de Geographiæ quoque studio tenenda sunt. Et quoniam Geographia, quemadmodum modo diximus, principiis Astronomiæ sphæricæ præsertim nititur; ad eam accedere minime debet nisi eorundem gnarus. Quemadmodum itaque, in Elementis nostris, Astronomiam Geographiæ præmisimus; ita etiam in Astronomia ante versari debet, quam ad Geographiam pedem promoveat, qui inoffenso pede in hac progredi voluerit. Quodsi quis, extra systema, Geographiam mathematicam tradere voluerit, ei multa explicanda sunt, quæ in Astronomia docentur; quemadmodum etiam a nonnullis factum vidimus.

§. 318. Qui nonnisi historicam Geographiæ cognitionem sibi acquirere student, iis sufficiunt, quæ ad Globum terrestrem, atque mappas geographicas, & tam illius, quam harum, usum cognoscendum faciunt. Ex capite itaque primo ea addiscere tenentur, quæ de figura Telluris, & circulis in ejus superficie concipiendis, habentur; prætermissis problematis ad investigandam semidiametrum Telluris spectantibus. Sufficit iisdem notasse, quæ de quantitate semidiametri Telluris, & unius milliaris Germanici, in pedibus Parisinis leguntur (§. 43 *Geogr.*). Curiosior si quis fuerit, addere potest magnitudinem superficiei, ac soliditatis Terræ (§. 44 *Geogr.*). Nec usu caret, si Tabulam, quæ in scholio problematis 7 (§. 46 *Geogr.*) exhibetur, de convertendis gradibus singulorum parallelorum in milliaria Germanica inspiciat. Ex capite secundo, definitiones distantiæ locorum, longitudinis item, ac latitudinis sibi perspectas reddere tenentur, & quod latitudo loci æqualis sit elevationi poli notent, ut intelligant, quid sibi velit Tabula Latitudinis & Longitudinis locorum (§. 60 *Geogr.*); prætermissis problematis de distantia locorum per Trigonometriam sphæricam solvendis. In capite tertio, ultra definitiones zonarum, & tempestatum statarum, non progrediendum, additis theorematis 8 & sequentibus, sed absque demonstrationibus. Eadem

fere tenenda ſunt, in perluſtrando capite quarto, nimirum ut, præter definitiones, nonniſi theoremata pleraque abſque demonſtratione notentur, & uſus Tabulæ climatum (§. 138 *Geogr.*) inſpiciatur. Niſi quis curioſior fuerit, caput quintum ſicco pede tranſire poteſt; ex ſexto autem, ſufficient definitiones. Ex ſeptimo, diviſionem plagarum ad dignoſcendos ventos cognoſci perutile eſt, una cum theorematis de ventorum proprietatibus, quorum uſus eſt in dijudicandis tempeſtatibus vagis. Inprimis autem horum ſtudio inſervit caput 8, de Globi terreſtris conſtructione & uſu. Immo ſuademus ut Globus ſemper ad manus ſit, in prima ſtatim tractatione Geographiæ; quo facilius intelligantur, quæ in anterioribus docentur. Tandem ex capite nono, quod de mappis geographicis agit, nonniſi ea haurienda ſunt, quæ rudem quandam earundem ideam animo ingenerant, & uſum ipſarum explicant. Nimirum ad manus eſſe debent mappæ, tum univerſales, tum particulares, & addiſcendum, quid denotent lineæ in iiſdem deſcriptæ, quidque indigitent numeri in margine adſcripti. Ita enim conſtructio intelligitur, quantum ſufficit ad earum uſum: neque eo fine requiritur, ut quis modum conſtruendi mappas geographicas capiat. Paucis adeo horis, ſtudium Geographiæ abſolvere poteſt, qui in hiſtorica ejus cognitione acquieſcit; ultra quam nemini progrediendum, qui aliud non intendit, quam ut mapparum geographicarum ideam quandam diſtinctam animo concipiat, quarum hodie promiſcuus omnium uſus eſt.

§. 319. Qui ad ſecundum cognitionis gradum adſpirant, Elementa Geographiæ integra, eo quo a nobis conſcripta ſunt ordine, perluſtrare debent; obſervatis iis, quæ ad nauſeam uſque inculcavimus, cum de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ ageremus: neque enim inter theoremata ac problemata Aſtronomiæ ſphæricæ & Geographiæ ulla differentia eſt, cum utrobique ad primum mobile referantur, ſeu a motu communi Solis & ſtellarum pendeant; ut adeo etiam, olim præſertim, problemata geographica ad problemata primi mobilis fuerint relata. Loquuntur demonſtrationes, principia ubivis peti ex Aſtronomia. Unde, me tacente, intelligitur ſcientificam Geographiæ mathematicæ cognitionem acquiri minime poſſe, niſi ab eo qui in Aſtronomia fuerit verſatus. Equidem non deſunt, qui, quæ de aſciis, amphiſciis, heteroſciis & periſciis, nec non de antœcis, periœcis & antipodibus docentur, pro futilibus habent, quæ utiliter ignorentur; judicium tamen præcipitant, vel terminorum inſuetorum ſono deluſi, vel ex eorum definitionibus non proſpicientes doctrinæ uſum. Quibus terminorum inſuetorum ſonus imponit, illi cum Scholaſticorum terminis metaphyſicis nondum intellectos comparant, & quod de his inculcari audiverunt

runt judicium, ad hos applicant, cœca imitatione, iis solenni qui de rerum valore ex ipsarum notionibus per se statuere nesciunt. Oppido autem falluntur: termini enim geographici accuratis definitionibus explicantur, quæ optime intelliguntur, modo terminos eas ingredientes ex anterioribus habueris perspectos; non vero definitionibus magis obscurantur, quemadmodum a Scholasticis fieri suevit. Præterea ex his ipsis definitionibus demonstrantur accurata methodo, quemadmodum in ceteris Matheseos partibus, quæ ad cognitionem Telluris mathematicam spectant, adeoque in Geographia prætermittenda non sunt (§. 1 *Geogr.*). Non minor est præcipitantia eorum, qui negant, quæ prospicere nequeunt. In Geographia mathematica doceri debet omnis differentia phænomenorum, quæ per universam Terræ superficiem a primo mobili pendent. Inter hæc vero etiam sunt umbrarum differentiæ, quæ corpora a Sole illuminata projiciunt, & differentiæ longitudinum dierum atque noctium, atque tempestatum statarum, nec non ortus & occasus stellarum. Has itaque cognoscere tenetur, qui omnem in diversis Telluris locis differentiam perspicere voluerit, etiamsi locum, quo ipse commoratur, nunquam fuerit egressus. Quæ ad umbras spectant, in doctrina de asciis, amphisciis, heterosciis & perisciis explicantur; quæ vero ad dierum, & tempestatum statarum, aliorumque phænomenorum agnatorum, differentias pertinent, doctrina de antœcis, periœcis, & antipodibus continet. Non igitur nugæ inanes sunt, quæ hic demonstrantur, sed veritates necessariæ, non modo animum sciendi cupidum oblectantes, verum etiam aliis in posterum inveniendis inservientes. Non jam inquirimus in casus, quibus interest cognosci statum Telluris in dato loco, quoad hæc phænomena. Qui enim nulla sciendi cupiditate flagrat, eum quoque parum movebit utilitas, quam nondum existimat suam, sed alienam judicat. Unicum moneri consultum duco, de constructione mapparum geographicarum, præsertim universalium. Mappæ universales non sunt nisi projectiones sphæræ in plano: unde sub hoc etiam nomine earum constructionem docuimus (§. 272 *& seq. Geogr.*). Non igitur diffitemur, si doctrinam de projectione sphæræ præmittere libuisset, quemadmodum Sphæricorum Elementa præmisimus Astronomiæ, multo concinnius constructionem istam demonstrari potuisse. Quoniam tamen brevitati consulere decrevimus, quæ de projectione sphæræ præsupponi debebant, ipsis demonstrationibus geographicis inseruimus. Non tamen ideo Elementa projectionis sphæræ tanquam inutilia rejicimus: probe enim novimus, quantus eorum sit usus, tum in constructione Astrolabiorum demonstranda, tum etiam in projiciendis eclipsibus solaribus; quas projectiones

jectiones hodie non inutiliter adhibent Aſtronomi. Quoniam vero nos ea non attingimus, in quibus potiſſimum uſus illorum ſeſe exerit; nec præter neceſſitatem theoriam noſtrorum Elementorum multiplicare voluimus, abunde perſuaſi, quod noſtrorum gnarus, abſque ulla difficultate, ea aliunde haurire poſſit, ſiquidem iiſdem habuerit opus.

§. 320. Abunde conſtat ex antecedentibus, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, eos via analytica progredi debere, ut inquirant in artificia, quibus veritas, quæ demonſtratur, in apricum fuerit perducta. Utimur, in eruendis plerisque quæ traduntur, Trigonometria, tam plana, quam potiſſimum ſphærica. Quamobrem quæ in Aſtronomia eo fine dicta ſunt, hic repetenda veniunt. Cetera ex principiis aſtronomicis, & geometricis, pauca quædam de umbris ex Opticis, communi methodo Logica deducuntur; adeoque patent per ea, quæ de uſu Logicæ in veritate a priori inveſtiganda docuimus in Opere logico, & uberius explicata fuerunt in ſuperioribus, cum de ſtudio Arithmeticæ & Geometriæ elementaris ageremus. Non itaque opus eſt, ut diutius hiſce immoremur, cum ad Geographiam accedere minime debeat, niſi Arithmeticæ, Geometriæ & Aſtronomiæ, immo etiam Opticæ gnarus. Equidem dubitandum non eſt, eſſe etiam Algebræ in ſolvendis problematis geographicis uſum, etſi hactenus ad Geographiam parum applicata fuerit. Neque etiam dubitamus fore ut, quemadmodum Algebra applicari cœpit ad partem Aſtronomiæ ſphæricam, ſeu problemata primi mobilis, in poſterum non defuturi ſint, qui ſolutiones problematum in Geographia adhuc deſideratorum dabunt. Sed cum ea, quæ noſtro ſcopo ſufficere viſa ſunt, abſque Algebræ auxilio tradi poſſint; hac vice conſultius viſum fuit a calculis algebraicis abſtinere. Neque enim Elementis Matheſeos omnia inſerenda ſunt, quæ hactenus fuerunt detecta, aut per ea ulterius detegi poterant; ne ſtudium Matheſeos, per ſe ſatis amplum, reddatur nimis diffuſum, & ejus faciamus deſertores, quos ad idem allicere & ad ulteriora præparare intendimus. Quid quod nec nobis conveniat tempus in Matheſi conſumere, quod Philoſophiæ reformandæ impendere debemus; cum hodie non deſint multi, qui Matheſi excolendæ utilem operam navant; nemo autem propemodum ſit, qui ſimilem Philoſophiæ præſtare velit. Unum tamen adhuc reſtat, quod ſilentio prætereundum non eſt. Conſtat hodie figuram Telluris non eſſe ſphæricam, quemadmodum credidere Veteres, ſed potius ſphæroidicam, prouti annotavimus (§.4 *Geogr.*). Neque ignotum eſt, ope Algebræ, in figuram Telluris inquiſiviſſe, non infelici ſucceſſu, Geometras præclaros. Problema adeo tam illuſtre non videbatur omittendum; quod præſertim præ-

præstantiam Analyseos recentioris tam aperte loquitur. Enimvero monuimus, jam loco citato, sub judice adhuc esse litem de vera Telluris figura. Quamobrem cum controversia ratiociniis solis definiri minime possit; & figura sphærica satisfaciat in Geographia, qualem tradere debuimus; a figura vera ejusdem determinanda abstinendum erat; præsertim quod ea, quæ a nobis tradita sunt de Analysi moderna, & ejus ad problemata physico-mechanica applicatione in Mechanica, abunde sufficiant ad intelligendas analyticas solutiones problematis de figura Telluris, quas dederunt Geometræ recentiores. Elementa nostra Matheseos non eo fine conscripsimus, ut Matheseos cultores a lectione aliorum librorum avocemus; sed ut eos ad eandem præparemus, & aptos efficiamus, non sine multo temporis ac laboris compendio, & ut iis pervia sit Mathesis, qui intellectus perficiendi gratia in eadem versari debent, quo eodem felicius extra eandem utantur: id quod ex tota hac tractatione de studio Matheseos recte instituendo abunde elucescit.

§. 321. In gratiam eorum, qui intellectus perficiendi gratia in Geographia versantur, ut eodem prompte extra eandem utantur, non est quod addam. Geographiam omnem methodo synthetica concinnavimus, qua usi sumus in Geometria elementari & aliis Matheseos partibus, inprimis etiam in parte Astronomiæ sphærica, ad quam proxime accedit. Quamobrem quæ eo fine ibidem inculcavimus, ea hic quoque observanda sunt. Neque vero existimandum est, propterea studium geographicum tuto negligi posse; cum ab eo sperandum non sit, quod non jam dederint disciplinæ aliæ, quibus ante operam navare tenemur, quam ad Geographiam pedem promoveamus. Etenim cum habitus omnis crebro exercitio acquiratur, & continuo exercitio conservetur ac perficiatur; non superflua videri debet opera, quæ Geographiæ analytice expendendæ impenditur. Neque est quod dicas, idem obtineri posse sola repetitione disciplinarum ceterarum. Præstat enim varietate obtinere, quod eorundem repetitio promittere videbatur. Quemadmodum nimirum varietas delectat, eorundem vero repetitio molesta accidit; ita quoque illa attentionem apprime hic necessariam excitat & conservat, quam hæc labefactat, ut difficilius conservetur. Exercitia itaque ad eundem habitum tendentia, quæ quoad hunc scopum eadem sunt, diversa tamen apparere debent; ita ut quasi continuo aliud agendo in eundem scopum collinees, & per diversa media finem tibi consequi videaris. Neque hoc singulare quidpiam ac insolitum existimandum. Sane in ipsa Arithmetica practica varietate exemplorum consequi studemus, quod repetitione ejusdem exempli obtineri poterat, si habitum acquirendum in se spectes.

§. 322. Hydrographia, quæ de navigatione per mare agit, apud nos nonnisi curiositatis gratia addiscitur. Quamobrem qui eam negligere voluerit, per nos negligat. Mathematicum tamen decet, ne eandem ignoret. Quodsi vero eandem perlustrare volueris, eodem prorsus modo in eo versaberis, quemadmodum in Geographia. Eadem enim methodo conscripta est, qua Geographiam tradidimus, &, perinde ac hæc, principiis astronomicis tota nititur; ut adeo hæc Matheseos pars longe utilissima fructus Astronomiæ sit &, si Astronomia non alium usum haberet, propter hunc solum, summo cum studio excoli mereretur. Qui animum sciendi cupidum possident, eos studium Hydrographiæ mirifice delectat; quatenus vident, quomodo ex principiis mathematicis, præsertim astronomicis, deducta fuerint quæ intellectui humano prorsus inaccessa videri poterant, & fœcunditatem principiorum mathematicorum, quæ in se sterilia apparebant, ipso facto experiuntur. Plura non addimus: quæ enim dici poterant, ex anterioribus abunde intelliguntur.

§. 323. Quod studium Chronologiæ attinet, de eo non multa nobis dicenda sunt. Pleraque enim, quæ in Chronologia traduntur, non majorem requirunt attentionem, quam quæ acquirendæ cognitioni historicæ sufficit. Qui nonnisi vulgarem Chronologiæ notitiam sibi comparare student, iis satisfaciunt definitiones diei, & noctis, epochæ diei civilis, horæ, horæ astronomicæ, Europææ, & Judaicæ, minuti primi denique, atque secundi, ex capite primo. Ex secundo, perspectas sibi reddere debent definitiones omnes, una cum quantitate mensis lunaris communis, & embolimæi, seu corollario primo definitionis 28. Ex capite tertio, sufficit annotasse, quæ de anno Juliano, & Gregoriano dicuntur. Si paulo curiosior fuerit, addet ea, quæ dicuntur de recente Judæorum & Turcarum anno. Ex capite quarto, ad intelligendum calendarium addiscant, quid sit cyclus Solis, cyclus Lunæ, & cyclus Indictionum, atque periodus Juliana; & ex capite quinto, petant, quid sit epocha Russorum, epocha mundi conditi Judaica, & epocha Muhamedica: qui vero in legendis Autoribus classicis versatur, addat definitiones epochæ Olympiadum, & epochæ Urbis conditæ. Denique, ad vulgarem Chronologiæ notitiam, sufficit aliqua Calendarii Juliani & Gregoriani cognitio, ex capite sexto haurienda, &, ubi quis curiosior fuerit, similem Calendarii Judaici, & Muhamedani, ex definitionibus potissimum capitis ultimi sibi comparet. Calculos enim, qui in problematis docentur, una cum corollariis, quibus eorum rationes continentur, tuto negligere poterit. Brevi adeo labore totum studium chronologicum absolvi poterit, in quo memoriæ omnes fere sunt partes. Me autem tacente, patet terminos nonnullos ex Astronomia per-

perſpectos eſſe debere, ut definitiones chronologicæ intelligantur.

§. 324. Qui accuratiorem Chronologiæ cognitionem appetunt, eam totam perluſtrare tenentur: id quod nullo fere negotio fiet, ubi in Aſtronomia fuerint verſati; cum eorum, quæ in Chronologia intricata ſunt, & hoc ſtudium perplexum atque moleſtum reddunt, nonniſi cognitionem hiſtoricam ſuggeramus. Hiſce principiis imbutus, & in Aſtronomia cum laude verſatus, adeat Autores, quos ſupra ſuo loco commendavimus, ubi ſpinoſis difficultatibus ſeſe immergere voluerit, ut judicium ferre queat, quid veri ſubſit iis, quæ aliorum fide aſſumuntur. Neque enim exiſtimandum eſt ſingula quæ dicuntur, ad chronologiam hiſtoricam ſpectantia, ex monumentis Veterum, quæ nobis ſuperſunt, eſſe adeo aperta & explorata, ut de eorum veritate ambigi minime poſſit. Hoc omnino monendum eſſe duximus; ne, qui Elementa noſtra Chronologiæ perlegit, miretur, cur vulgo conqueratur ſtudium Chronologiæ eſſe abſtruſum, perplexum, atque difficile; cum tamen nullum videatur, quod in eo collocandum, ſi comparetur cum eo, quod in tractandis ceteris Matheſeos partibus hactenus præcepimus.

§. 325. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, in Chronologia quoque quædam invenient, quæ ad ipſorum ſunt palatum. Juvabit perpendere, quomodo menſuræ temporis, ex motu ſiderum fuerint deductæ & ad uſum civilem aptatæ, ut tempus civile cum aſtronomico in concordiam reducatur: quod poſterius cum non uno modo factum ſit, quatenus arbitrium humanum in determinationem influit; obſervare hic licet, quæ in veritatibus neceſſariis locum minime habent. Singularem quoque hic attentionem merentur, quæ de characteribus temporis, præſertim artificialibus, & variis cyclis, atque periodo Juliana docentur. Denique probe perpendenda ſunt, quæ de Calendario Chriſtiano, & Judaico traduntur. Etſi enim calendarium Judaicum principiis nonnullis nitatur ſuperſtitioſis; calculus tamen, quo in computatione utendum, admodum ingenioſus eſt; ut ab Artis inveniendi cupido probe perpendi mereatur. Præbet Chronologia exemplum, quomodo veritates, quas cognovimus, ad uſum vitæ civilis aptentur; ubi ſummus rigor attendi nequit, id tamen agendum, ne ab eo longius recedas in præjudicium finis intenti. Simile quid occurrit, ubi Jus naturæ ad definienda negotia humana, tam privata, quam publica, adhibetur, cujus rigor ſummus obſervari nequit; ut adeo ex eodem condendum ſit Jus civile, ac Jus gentium arbitrarium, quod ab eo quam minimum recedat, & quo cavetur, ne fine civitatum particularium & civitatis maximæ, quam Gentes conſtituunt, excidamus. Suppeditat itaque Chronologia, modo in abſtrahendo

ſatis fueris acutus, nec deſtituaris illo acumine, quo abſtracta in concretis pervidemus, principia generalia, quæ notionum directricium loco eſſe poſſunt in iſtiusmodi caſibus. Qui in Philoſophia noſtra fuerint verſati, iis ſatis clara & perſpicua erunt, quæ dicuntur. Nimis autem prolixi eſſe deberemus, ſi uberius explicanda eſſent, ne ceteris quoque obſcura viderentur. Videmus adeo (id quod etiam haud pauca ante dicta ulterius confirmant), quam utile ſit ſtudium Philoſophiæ verioris, qualem nos profitemur, cum ſtudio mathematico conjungi; ſiquidem uſus omnis, quem hoc præſtat in intellectu perficiendo, compos fieri volueris. Ita demum obtinebitur, ut Matheſis proſit ad recte philoſophandum: id quod ſola applicatione, ad cognitionem Naturæ mathematicam promovendam, obtineri nequit; ut ut ea præclara ſit, & maxime commendandum ingeniis excelſis, ut hoc cognitionis genus excolatur.

§. 326. Gnomonica diſciplina tota practica eſt, in qua ſola praxis intenditur. Quamobrem a perplexis quoque demonſtrationibus abſtinuimus, quas legere nolunt, qui intelligere poterant; ceteri autem non capiunt. Quodſi quis theoriam omnem aſpernatur, nec niſi conſtructionem horologiorum ſolarium curæ cordique habet; ei ſatisfacient definitiones, & problematum reſolutiones. Si quæ problemata ipſi magis curioſa, quam utilia videntur; ſuo ſtabit judicio in omittendis iis, quorum notitia ſe carere poſſe exiſtimat. Deſcriptionem horologiorum ſolarium adeo perſpicue expoſuimus, ut eadem facilitate abſolvi poſſit, qua figuræ in Geometria elementari delineantur, & alia ejus problemata conſtruuntur. Ne tamen hæreat circa terminos, nec ſatis intelligat quid fieri debeat; omnino conſultum eſt, ut levem quandam Aſtronomiæ ſphæricæ, Geographiæ, & Chronologiæ notitiam ſibi comparet; qualem commendavimus iis, qui nonniſi hiſtoricam cognitionem ſibi comparare ſtudent. Inprimis autem hic uſui eſt, ſi ideas, quæ lumen praxi Gnomonicæ affundere debent, ne in ea prorſus cœcutias, imaginationi inſinuari cures. Exempli loco eſſe poteſt, ſi ipſam deſcriptionem horologiorum ſolarium, applicatione actuali horologii æquinoctialis ad planum in quo deſcribendum, oſtendas. Uſum hic habent machinæ gnomonicæ, quas in uſum deſcriptionis horologiorum ſolarium commendat, & brevi quodam Tractatu deſcripſit PARDIES; quamvis inſtituto præſenti ſufficiat horologium æquinoctionale ſimplici tantummodo modo deſcriptum, quemadmodum ex problemate quarto (§. 36 *Gnom.*) facile intelligitur.

§. 327. Etſi autem a perplexis & intricatis demonſtrationibus, quales dedit CLAVIUS, & quas parum amant ſtudio gnomonico ſeſe mancipantes, conſulto abſtinuerimus, ne nobis ſcriberemus, dum alios erudire volumus; id

id tamen egimus, ut, quanta fieri potuit brevitate ac facilitate, satisfaceremus iis, qui scientificam horologiorum solarium cognitionem appetunt, ne ignorent genuinas constructionum rationes. Ad hanc igitur qui adspirant, eo modo in Gnomica versentur, quo in Geometria elementari versandum esse docuimus, ubi secundus cognitionis gradus intenditur. Haurit Gnomonica principia sua ex Arithmetica, Geometria elementari, Trigonometria utraque, Astronomiæ sphærica præsertim parte, Geographia, & Chronologia. Antequam igitur ad illam tractandam accedat scientificæ cognitionis cupidus, harum tractationem præmittere debet. Hoc pacto, in omni Gnomonica nihil deprehendet, quod non satis intelligat, & de cujus veritate dubium quoddam supersit. Quoniam vero, quemadmodum modo diximus (§. 326), Gnomonica tota practica est; qui eidem operam navat, singula quoque horologia in charta delineare tenetur. Quodsi dicas, tibi nunquam propositum esse, ut aliquando horologium quoddam solare actu construas; sed sufficere, ut intelligas, quomodo construantur, & cur hoc pacto construi possint; consequenter te scopo tuo potiri posse, si tantummodo resolutiones problematum cum schemate conferas; me per omnia consentientem minime habes. Etenim si horologia in charta ipsemet delinees, non modo facilius & clarius eorum constructionem intelligis, verum etiam ipsorum ideam memoriæ firmius imprimis. Quotiescunque veritates practicas cognoscere studemus; suadendum omnino est, ut eas in nobismetipsis experiamur. Hinc etiam, non dissentiente CONFUCIO, summo Sinarum Philosopho, in Moralibus inculcare soleo, ut eorum, quæ docentur, veritatem in nobismetipsis experiri studeamus: quod quantam afferat utilitatem, in parte altera Philosophiæ practicæ universalis, a priori abunde demonstravimus. Qui adeo cognitioni scientificæ operam navat, in omni Mathesi solutiones problematum ipsemet tentare tenetur, sive constructiones geometricas, sive calculos arithmeticos præcipiant.

§. 328. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, resolutionem problematis tanquam incognitam supponere debent, & vi definitionis horologii, quod describi jubetur, inquirendum, quomodo describi debeat. Etenim, ex datis ratiocinando, colligendum quod quæritur. Non datur nisi definitio horologii describendi, quippe quæ ex anterioribus tanquam data supponi potest ac debet: quæritur modus idem describendi, quem resolutio explicat. Modus adeo describendi horologium, ratiocinando eruendus ex ejus definitione. Definitio horologii specialis supponit definitionem horologii solaris generalem. Quamobrem facile patet, eam quoque tanquam datam supponi debere; nisi eam inter principia referre velis, quæ vi

vi eorum, quæ definitioni ſpeciali inſunt, in memoriam revocantur. Ex definitione adeo petendæ ſunt primæ propoſitiones, quarum ope in memoriam revocantur principia, ex Aſtronomia vel aliunde cognita, ut ex illa ratiocinando colligi queat concluſio. Satis hæc intelliguntur ex ſuperioribus, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. *66 & ſeqq.*). Non diffiteor, faciliorem fore operam, ſi demonſtrationes problematum eo ordine concinnatæ eſſent, qui in methodo analytica obſervandus; non ſumendo reſolutionem tanquam hypotheſin theorematis, quemadmodum in demonſtrationibus ſyntheticis fieri ſolet (§. 51 *& ſeqq.*). Enimvero, ſi quis in Geometria elementari problemata analytice tractaverit, & methodum, qua ibidem uſus, in aliis imitatus fuerit; ejus vires nec ſuperabit analytica problematum gnomonicorum tractatio. Et quamvis tyronibus hoc difficile videatur, non tamen difficile erit eorum magiſtris, niſi quis intempeſtive docentium numero ſeſe ingerat, qui diſcentium ſubſellia potiore jure occupare debebat. Elementa Arithmeticæ Germanica, methodo analytica, conſcripſimus, eandemque in iis explicandis magis adhuc illuſtramus. Quodſi ergo quis ideam quandam exemplarem inde hauſerit; ea ipſi facem præferet, non modo in Gnomonica, ſed & in aliis Matheſeos partibus; immo extra eandem in diſciplinis aliis. Et ſi quis Elementa iſta vel non legit, vel legere nequit linguæ Germanicæ ignarus, aut etiam Batavæ, in quam converſa ſunt; ideam tamen quandam animo concipiet vi analyſeos demonſtrationum, quam ſupra (§. 38 *& ſeqq.*) ampliſſime expoſuimus. Non igitur opus eſſe judicamus, ut ad particularia deſcendamus.

§. 329. Ceterum Gnomonica in numero artium eſt, quemadmodum Mechanica practica, quæ machinarum compoſitarum ſtructuram explicat. Quoniam in Gnomonica conſtructiones horologiorum ſolarium demonſtrantur; ex ea diſcimus, quomodo Artes ſcientifica methodo tractandæ ſint. Deducitur ea prorſus a priori, atque adeo methodi artes ſcientifice tractandi ideam omnium optime exhibet. Artes ceteræ, ſi non omnes, ſaltem plurimæ, inventæ ſunt a poſteriori, etſi ſubinde in nonnullis a priori perfectæ. Ars poliendi vitra omnino a poſteriori detecta, perinde ac conſtructio teleſcopii; etſi hæc deinde a priori, per principia dioptrica, magis fuerit perfecta. Phænomena teleſcopiorum dudum ante a poſteriori innotuerunt, quam earum accuratas & rigoroſas demonſtrationes dederint Mathematici. Idem dicendum eſt de ſpeculis, quorum phænomena in Catoptrica demonſtrantur. Ad Gnomonicam tamen quam proxime accedit Ars navigandi, & conſtruendi globos artificiales, atque mappas geographicas, & hydrographicas. Quibus adeo animus fuerit ſcientiam artium excolendi,

di, illi hanc differentiam probe perpendere debent. Ex Gnomonica inprimis videre licet progressum artis a priori continuandum; quomodo scilicet inventa anteriora non modo ansam suppeditent de aliis cogitandi, quorum cogitatio alias animum minime subiisset; verum etiam ad ulteriora invenienda adjumento sint; ut adeo idem sit in arte, qui in scientia progressus, cum utrobique eædem deprehendantur rationes. Huc inprimis animum advertere debent, qui Artem inveniendi ad formam Artis reducere gestiunt, quemadmodum Logicam ad eandem redactam videmus. Nos, qui nullum Matheseos usum aspernamur, ad ea quoque animum advertimus, quæ vulgo non attenduntur; & usum, quem Mathesis habere potest in excolendo intellectu, ut eodem in omni Scientiarum genere, in quavis Arte, & in ipsis negotiis, tam privatis, quam publicis, prompte ac rite utamur, majoris facimus, quam quem per se habere potest; utut singula æquo pretio æstimantes, nec meritam detrahamus iis laudem, qui in aliqua Matheseos parte excolenda omnem ætatem consumunt. Neque enim ea est hominis ætas, immo nec eæ sunt ejus vires, ut unus omnia possit; &, nisi essent, qui particulari studio scientiam egregie promoverent, nec is a Mathesi expectari poterat fructus in omni sua extensione, quem tantopere commendamus, & cui tantum statuimus pretium. Quamvis adeo in Gnomonica multa occurrunt, quæ magis curiosa, quam utilia videntur iis, qui utilitatem ex necessitate ad vitam commode degendam metiuntur; immo quæ a severis inventorum censoribus ad lusus Mathematicorum referuntur, ipsis subinde Geometris excelsi ingenii, profundique acuminis non dissentientibus, propterea quod unusquisque suam amat & laudat Minervam; nobis tamen ea non contemnenda, sed magni facienda videntur, quatenus analytica eorundem consideratio prodest ad augendam Artem inveniendi; immo etiam sola eorundem scientifica cognitio intellectum perficit, etiamsi de eo perficiendo non cogites.

CAPUT XI.

De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris, & Architecturæ civilis.

§. 330. PYrotechnia paucas continet demonstrationes, quæ ex Geometria elementari principia sua mutuantur: quas negligere facile potest, qui soli praxi studet. Ceterum quæ ad praxin faciunt, non modo perspicue,

ſpicue, ſed & diſtincte propoſuimus; ut ideam diſtinctam eorum, quæ fieri debent, animo nullo negotio concipere detur. Nulli adeo dubitamus, quin ſtudium pyrotechnicum per facile reddiderimus. Si quis praxi operam dare voluerit, is omnino ipſo opere exequi tenetur, quæ præſcribuntur: quo facto ipſemet in ſe experietur, reſolutiones problematum eodem modo eſſe datas, quo reſolutiones Geometriæ practicæ, veluti triangulorum constructionem, linearum perpendicularium deſcriptionem, in Geometria elementari exhibuimus. Quodſi quis ante ſingulorum, quæ fieri jubentur, ideam diſtinctam ſibi comparavit, quam ad ea facienda ſe conferat; is non ſolum ad id, quod faciendum, majorem attentionem conferet, ſed & majore cum voluptate artem manuariam addiſcet. Qui in nuda cognitione hiſtorica acquieſcere volunt, iis quidem ſufficere poſſunt, quæ tradimus; ubi tamen occaſio offertur ipſis oculis uſurpandi ſingula, quomodo parentur, eam negligere minime debent; cum hoc pacto ideæ efficiantur clariores, quatenus diſtincte explicatis inſunt confuſe percipienda.

§. 331. Quibus ſecundus cognitionis gradus curæ cordique eſt, non modo addere debent perpaucas demonſtrationes, quæ hinc inde adjiciuntur; verum etiam eorum, quæ ex principiis geometricis demonſtrari nequeunt, rationes paſſim indicatas perpendere tenentur, & ad ea applicare ſtudeant, quæ ſine illarum allegatione proponuntur. Dantur equidem nonnulla in Pyrotechnia, quæ Geometriæ ſublimioris & Analyſeos recentioris gnarus legibus mathematicis adſtringere poterat, cum nunc ſolo arbitrio regantur; ſed nobis minime vacat in talia inquirere. Hanc igitur telam aliis pertexendam lubentiſſime relinquimus, nobiſque ſufficit ea tradidiſſe, quæ ante perſpecta habere debent, quam ingenii ſui vires periclitentur.

§. 332. Pleraque, quæ in Pyrotechnia traduntur, ſunt inventa, quæ artificum tentaminibus debentur, ubi caſus multas ſibi partes vindicat. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, & intellectum præſertim perficere intendunt, ut eodem extra Matheſin prompte ac rite utantur, hoc etiam inventorum genus probe expendere tenentur: neque enim rerum ceterarum, quemadmodum mathematicarum, tam exaſciata proſtat theoria, ut ſuppetant principia, quorum vi a priori detegere licet omnia, quæ quæruntur. Empirica inveniendi methodus, qua utuntur artifices experientiæ qua pollent omnem facientes uſum qui a notionibus confuſis expectari poteſt, in rebus utiliſſimis detegendis omne fert punctum, modo eadem rite uti noris: id quod tibi promittere poteris, ſi eundo per exempla, qualia ſuppeditat Pyrotechnia, eam revoces ad notiones diſtinctas. Qui vel ea legit, quæ in Prolegomenis de differentia Logicæ naturalis & artificialis docuimus, non

modo

modo dicta plene intelliget, verum etiam iisdem facilem habebit fidem. Quodsi attentius resolutiones problematum pyrotechnicorum expendas, easque tanquam inveniendas tibi proponas; methodo empiricæ inveniendi misceri rationalem, aut saltem misceri posse deprehendes: quemadmodum nemo hominum in actionibus suis totus empiricus est, ut non etiam rationi aliquæ deferantur partes. Et si forsan objecerit quispiam, te in modum inquirentem, quo eædem fuerint repertæ, haud raro, immo plerumque, incidere in alium ab eo, quo usi sunt inventores, prorsus diversum; non tamen inde conficitur, te nihil agere: sufficit enim si ostendere possis quod eo, quem concipis, modo reperiri potuerit quod quærebatur. Cum enim non alio fine in modum inveniendi inquiras, quam ut eundem in casu simili imiteris; eundem ex asse consecutus, si vel maxime de eo non cogitavit, qui quid invenit: id quod de omni analysi notandum, quam quasi divinando eruere studemus. Ceterum, si quæ compositiones occurrunt, quarum nullam reddidimus rationem; in eam eo modo inquirendum, quo rationem compositionis pulveris pyrii casu detectæ eruimus (§. 17. *& seqq. Pyrotech.*)

§. 333. Qui Architecturæ militaris nonnisi cognitionem historicam desiderant, ex definitionibus terminos sibi perspectos reddere tenentur; nec inconsultum est, si ad manus fuerit idea quædam materialis munimenti, sive ex ligno, sive ex charta, sive etiam ex argilla parata. Cum enim terminos non alio fine addiscant, quam ut munimenta videntes singula suis nominibus indicare valeant, & ut nominibus auditis respondentes iisdem ideæ imaginationi præsentes sistantur; ideæ hæ facilius memoriæ imprimuntur per conspectum ideæ materialis, quam notionibus distinctis, quibus definitiones constant. Quodsi tamen hæ accedant, imprimentur tanto firmius, & jucundius, ut facilius eadem retineantur, nec sine voluptate labore hoc defungaris. Deinde sufficit munimenti unius vel alterius Protographiam saltem conficere, quæ nonnisi ambitum totius munimenti & operum externorum exhibet, ut hoc pacto idea munimenti integri acquiratur, nec ejus deinde conspectus adspicientem confundat. Idem tenendum est de operibus hostium campestribus, quorum in praxi offensiva & defensiva opus est. Neque Inconsultum est, ut, terminis intellectis, ichnographias munimentorum ad manus sumat, & per eos easdem explicare discat. Rudis hæc Architecturæ militaris notitia usui est iter facientibus & loca munita invisentibus; tum etiam prodest ad intelligendas novellas publicas, quando de obsidionibus urbium munitarum loquuntur.

§. 334. Qui cognitionem Architecturæ militaris scientificam sibi acquirere student, Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlustrare debent. Ex capite igitur primo, principia sibi perspecta reddere tenen-

tur, ex quibus omne de diversis muniendi formis judicium pendet. Secundum hæc principia examinare debet diversas muniendi formas, quæ in capite secundo proponuntur. Neque parum sibi consulet, ubi deinceps ex STURMII Architectura militari hypothetica, simili examini alias adhuc muniendi formas subjiciat, vel ex aliis libris, quos de Architectura militari recensuimus, alias petat. Ita nimirum non modo principia ipsa sibi reddet multo clariora, eaque magis familiaria; verum etiam eorundem applicationem in suam magis rediget potestatem. Neque etiam contemnendus est calculus trigonometricus: quod qui faciunt, ejus utilitatem minime prospiciunt. Nemo non novit in qualibet muniendi forma non omnia sumi posse, principiis in capite primo expositis convenienter; sed per quædam assumta determinari cetera. Horum adeo quantitas ex iis, quæ sumuntur, per calculum geometricum eruenda, siquidem accurate de eadem constare debet. Nullum equidem dubium est, ex iisdem, constructione geometrica, easdem lineas, eosdemque angulos determinari, & illarum magnitudinem, ope scalæ geometricæ, horum vero quantitatem, ope instrumenti transportatorii, investigari posse; nemo tamen est qui nesciat, methodum hanc, non modo supponere constructionem accuratissimam, verum etiam ne hac quidem supposita adeo accurate investigantur, quemadmodum per calculum trigonometricum eruuntur quantitates linearum & angulorum. Quodsi excipias, in praxi acribiam trigonometricam observandam non esse, immo nec semper observari posse, si vel maxime velis; utrumque largior: non tamen hinc recte infertur, quod inutile sit nosse angulorum ac linearum magnitudinem quam accuratissime. Etenim hinc non modo certus es, te in ea definienda nullum admisisse errorem, qui facile irrepere poterat eam mechanice investigando; sed & hinc attentior efficitur animus, ne in praxi a rigore magis recedas, quam par erat. Taceo, quod ad scientificam Architecturæ militaris cognitionem etiam requiratur, ut constet quomodo ex iis, quæ principiis in parte prima expositis convenienter sumuntur, investigentur cetera, quæ per ea determinantur. Ut vero tanto minus in dubium revocari possit utilitas calculi trigonometrici in Architectura militari; hoc unum adhuc probe perpendi velim. Subinde per ea, quæ in methodo muniendi sumuntur, vi principiorum generalium, molesta est constructio geometrica, si quidem accurata desideretur. Quodsi vero lineæ aliæ supputentur, ex iis tanquam cognitis jam multo simplicior evadit & accuratior. Exemplum habemus in methodo muniendi *Blondelliana* (§. 151. *Arch. mil.*), cujus constructio, per calculum trigonometricum, ad *Paganianam* revocatur. Immo, ope hujus calculi, constructio, ex latere interno assumto, potest revocari ad alteram, quæ ex externo procedit, & contra: id quod subin-

ſubinde uſui eſſe poteſt, præſertim in munitionibus irregularibus. Munimenta irregularia expendimus capite tertio, & quænam hic ſint obſervanda, exponimus. Enimvero in methodo muniendi irregulari inprimis opus eſt, ut principia generalia conſtanter ob oculos verſentur, ne quid contra ea admittatur: id quod facile accidit, niſi per ea examinentur, quæ in delineandis munimentis irregularibus facis. Hic ſane haud raro cœcutiunt, qui ea non ſatis perſpecta habent, vel in eorum applicatione hæſitant. Unde apparet, quam neceſſaria ſit ſcientifica Architecturæ militaris cognitio, cum irregularia munimenta ſint frequentiora regularibus; ut adeo is demum Artis muniendi peritus ſit dicendus, qui in delineandis munimentis irregularibus non hæret, nec ceſpitat. Denique qui rationes quoque operum campeſtrium, quæ capite ultimo deſcribimus, perſpicere voluerit, is duo ſcholia, quæ in fine adjicimus, attente perlegat, ut proceſſus obſidionis ideam animo concipiat, & quænam obſeſſi defenſionis gratia faciunt, intelligat. Hinc enim multo clarius intelliguntur, quæ de illis præcipiuntur.

§. 335. Quodſi quis praxi Architecturæ militaris operam dare decreverit, ei ſcientificam ejus cognitionem quam maxime commendamus, experientia domeſtica deinde magis illuſtrandam, ac confirmandam. Ab eo autem cum expectetur, ut accuratas & nitidas munimentorum delineationes dare poſſit; in iis quoque delineandis multum operæ conſumere tenetur, donec tandem multiplici exercitio eum conſequatur habitum, quo ſe commendare poſſit. Vulgo peritiam Architecturæ militaris ex munimentorum delineationibus æſtimare ſolent, fallaci admodum judicio. Etſi autem in Arte muniendi excellere poſſit, qui in iis delineandis parum excellet; cum tamen qui eidem totum ſeſe dat, nec ea negligere debeat, quæ Artem ornant, nitidas quoque delineationes ab eo jure exigimus; tanto quidem magis, quo certius eſt, haud raro, immo plerumque contemni Artem ornatu iſto deſtitutam. Qui vero praxi operam dare, ipſamque Artem exercere non decrevit, etſi caſtra ſequatur; ei vix ſuademus, ut in habitu iſto comparando tempus fallat, quod longe utilius in aliis addiſcendis conſumere poterit.

§. 336. Quibus tertius cognitionis gradus curæ cordique eſt, in Architectura quoque reperient militari, quæ attentionem ipſius merentur, ſive in ſola Matheſi verſari voluerint, ſive intellectum perficere ſtuduerint, ut eodem prompte ac rite etiam extra eandem utantur. Cum Architectura militaris in numero diſciplinarum practicarum ſit, ratio ultima eorum, quæ in eadem traduntur, finis eſt, qui per eam intenditur. Quamobrem hic probe perpendendum venit, quomodo ex fine, qui in definitione indicatur, deducantur principia, quæ in capite primo propoſuimus; applicata vero deinde ad eadem Geometria, cetera

hinc deriventur, ſine quibus forma muniendi concipi nequit, multo minus munimenta actu excitare licet. Hinc enim non ſolum addiſcere datur, quæ ad cognitionem Artis mathematicam venandam uſui ſunt; verum etiam quomodo in diſciplinis practicis verſandum, ut ſatis adæquatas nanciſcaris ideas, quæ praxi ſufficiunt. Satis autem adæquata eſt, ſi in ea ſingula, quæ fieri debent, determinentur; quemadmodum ex tractatione Architecturæ militaris abunde eluceſcit, modo attentionem tuam in ea deſiderari minime patiaris. Diverſæ dantur muniendi formæ; ſed, ubi eas juxta principia in capite primo propoſita examines, non omnes cum iis æque conſentiunt. Unde aliæ aliis tanquam meliores præferuntur. Docet autem progreſſus Architecturæ militaris, quod primo inventæ muniendi formæ defectibus fuerint obnoxiæ, quos experientia detexit, primum ab inventoribus non animadverſas, iis autem mederi ſtuduerint, qui recentiores excogitarunt. Etſi in uſum Artis inveniendi non inutile foret, eo fine expendere omnes muniendi formas, quæ hactenus publici juris factæ, & quidem eo ordine, quo luci publicæ expoſitæ fuerunt; noſtri tamen inſtituti ratio minime ferebat, ut in tantas ambages deſcenderemus. Ne tamen hac in re prorſus deeſſemus Lectori ad tertium cognitionis gradum adſpiranti, ea tradidimus, quæ ad ideam quandam hujus facti animo concipiendam ſufficiunt, profuturam iis, qui in aliis diſciplinis practicis Architectos militares non infeliciter imitari voluerint. Non alia ſane de cauſa expoſuimus methodum muniendi *Belgicam*; utut propter defectus, quibus laborat, hodie antiquatam, ut nullius uſus eſſe videatur, niſi quatenus adhuc extent munimenta bene multa hac methodo conſtructa, & iiſdem ſubjunximus methodos muniendi Gallorum. Conſtat enim formam muniendi Belgicam, tanquam omnium optimam, celebratam fuiſſe; ejus autem nævis animadverſis, Gallos primum publicaſſe formas alias, quibus hiſce mederi tentarunt. Ceterum applicatio Trigonometriæ ad Architecturam militarem, in uſum tertii cognitionis gradus, etiam aliquam attentionem meretur; non modo quod hoc ipſo confirmetur, quod in Arte inveniendi locum mereatur; verum etiam ut ejus ampliſſimus uſus in majore luce conſtituatur.

§. 337. Architecturæ civilis cognitionem hiſtoricam acquiſiturus legat definitiones, & problemata; exceptis iis, quæ ad delineationes Ordinum architectonicorum; & eorum uſum in ordinandis januis, atque feneſtris ſpectant, & quæ de Ichnographia & Orthographia ædium agunt. Quodſi deſit occaſio ædificia juxta regulas architectonicas conſtructa contemplandi; Ichnographias & Orthographias externas ædificiorum æri inciſas perluſtret, ut ideam ædificii integri, juxta regulas architectonicas conſtructi, animo imprimat. Inprimis autem

autem terminos, & constructionem Ordinum architectonicorum sibi familiares reddat, ne in ornatu, qui inde petitur, cœcutiat. Hoc pacto obtinebit, ut non solum libros de Architectura civili conscriptos sine hæsitatione legere, sed quæ usui suo esse possunt, etiam addiscere, ac data occasione ad eundem transferre, queat. Historica igitur cognitio non ob solam curiositatem, sed & ob utilitatem, quam unicuique præstat, acquiritur. Sane qui peregrinantur, quemadmodum Germani facere solent studiis academicis absolutis, cognitione ista animum imbutum habere debent; ne in ædificiis, aliisque operibus architectonicis, spectandis ignorent, quid videant, laudaturi aliis, quod cur laudent, nullam afferre valent rationem. Male adeo sibi consulunt, qui studium architectonicum, quod ea fini intra paucas hebdomades absolvi poterat, in Academiis prorsus negligunt, non alia de causa, quam quod architecti fieri nolint. Perfacile autem hoc studium est, præsertim si ultra cognitionem historicam progredi nolueris. Quodsi otium suppetat, ruditer saltem delineare Ordinem aliquem architectonicum, veluti Toscanum, qui delineatu omnium facillimus, juvat; non modo ut idea Ordinis, sed etiam membrorum memoriæ firmius infigatur: id quod tanto magis suadendum, cum norim plerosque fieri desertores studii architectonici, quod tædiosum videatur terminorum notitiam sibi comparare.

§. 338. Scientificam Architecturæ cognitionem desiderans Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlegat, & eam attentionem afferat, quæ ad singula rite percipienda sufficit. Qui vel in Elementis Geometriæ versatus fuerit, ei attentio huc afferenda nulla fere videbitur: Mathematum vero prorsus ignarus non majorem hic requiri experietur, quam qua in legendo libro alio quocunque utendum; immo minorem, cum omnia distincte explicentur, quod vulgo fieri non solet; nec occurrant verba, quorum dubius est sensus; præter doctrinam vero de Ordinibus architectonicis nihil occurrat, cujus non habeat Lector ideam vulgari experientia acquisitam. Nemo autem hic expectet demonstrationes, quales in Geometria dedimus; sufficit enim addisci eorum, quæ præcipiuntur, rationes, ut intelligatur, cur hoc potius modo fieri debeant, quam aliter. Inprimis etiam probe perpendat in Ordinibus architectonicis multa esse arbitraria; quorum etsi dentur, atque a nobis datæ sint rationes, absit tamen, ut quis rationes istiusmodi desideret, quales sunt ceterorum, quæ necessarias habent. Sane in Arithmetica, quæ rigidas demonstrationes admittit, cum veritates numerorum non minus necessariæ sint, quam linearum & figurarum in Geometria, eorum, quæ arbitraria sunt, veluti legis numerandi & notarum numericarum, non dari possunt rationes, quæ veritatibus necessariis conveniunt. Qui praxi architectonicæ sese

 dedunt,

dedunt, iis inprimis opus est scientifica Architecturæ cognitione: Architectus enim in promptu habere debet rationes, quas reddat quærentibus, cur hoc vel illud ita fecerit (§. 3. *Arch. civ.*). Obtinebit præterea, ne cœca sit aliorum imitatio; quam haud raro esse fallacem, ne opus probetur intelligentium judicio, experientia loquitur. Non desunt exempla, quibus quod dictum est, confirmari poterat; sed nostrum jam non est perstringere ea, quæ ab aliis minus recte facta sunt, cum jam docere id unice intendamus, quomodo tractandum sit studium architectonicum, ut recte fiant omnia. Industriam præterea suam exercere debent in delineationibus architectonicis, quicunque Artem exercere decreverunt, & quæ paulo ante de delineationibus munimentorum annotavimus (§. 335), ea quoque hic notanda veniunt. Ex elegantia delineationum vulgo judicium fertur de peritia Architecti; etsi male, ac subinde non sine damno fundatoris. Quamobrem cum dandum non modo sit aliquid opinioni, sed & qui in Arte quadam excellit, ea negligere non debeat, quæ ad ornatum faciunt; nemo erit, qui ab Architecto elegantiam in delineandis ædificiis, aliisque operibus architectonicis, jure non desideret; quamvis non probemus contemni propterea Artem in eo, qui eadem excellit, quia elegantiam in delineando non possidet. Qui enim hoc faciunt, suo, & aliorum, quibus a consilio esse debebant, hoc faciunt damno. Immo si quis desideret delineationes elegantes; aliorum opera eædem perfici poterunt; modo, qui in Arte excellit, ea suppeditet, quæ ad eas perficiendas necessaria sunt.

§. 339. Qui denique ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos quoque juvabit Architectura civilis. In Architectura civili, regulæ omnes deducuntur ex fine, quem loquitur definitio ejusdem. Finis hic in eo consistit, quod ideam ædificii animo concipere, & juxta eam ipsum extruere debeamus, ita ut scopo fundatoris ex asse satisfaciat. Quamobrem huc potissimum animum advertere tenetur, qui tertium cognitionis gradum intendit, quomodo ex hoc fine deriventur regulæ omnes, ita ut rationes earundem tandem in hanc rationem ultimam resolvantur. Monuit jam VITRUVIUS, & nos in Elementis nostris a priori ex ipso fine Architecturæ, ostendimus, regulas Architecturæ omnes redire ad firmitatem, utilitatem seu commoditatem, & venustatem atque ornatum ædificii, vel alterius operis architectonici cujuscunque. Quamobrem regulæ omnes rationem sufficientem, vel in firmitate, vel in utilitate, vel in venustate atque ornatu, vel hisce binis, aut omnibus simul sumtis agnoscunt. Sufficit itaque inquirere, quomodo ex hisce fontibus, vel immediate, vel mediate fuerint deductæ. Cum paucissimæ sint, quæ Geometriæ auxilium postulant; hæc disquisitio plurimum proderit ei, qui disciplinas practicas a Mathesi sejunctas accurata metho-

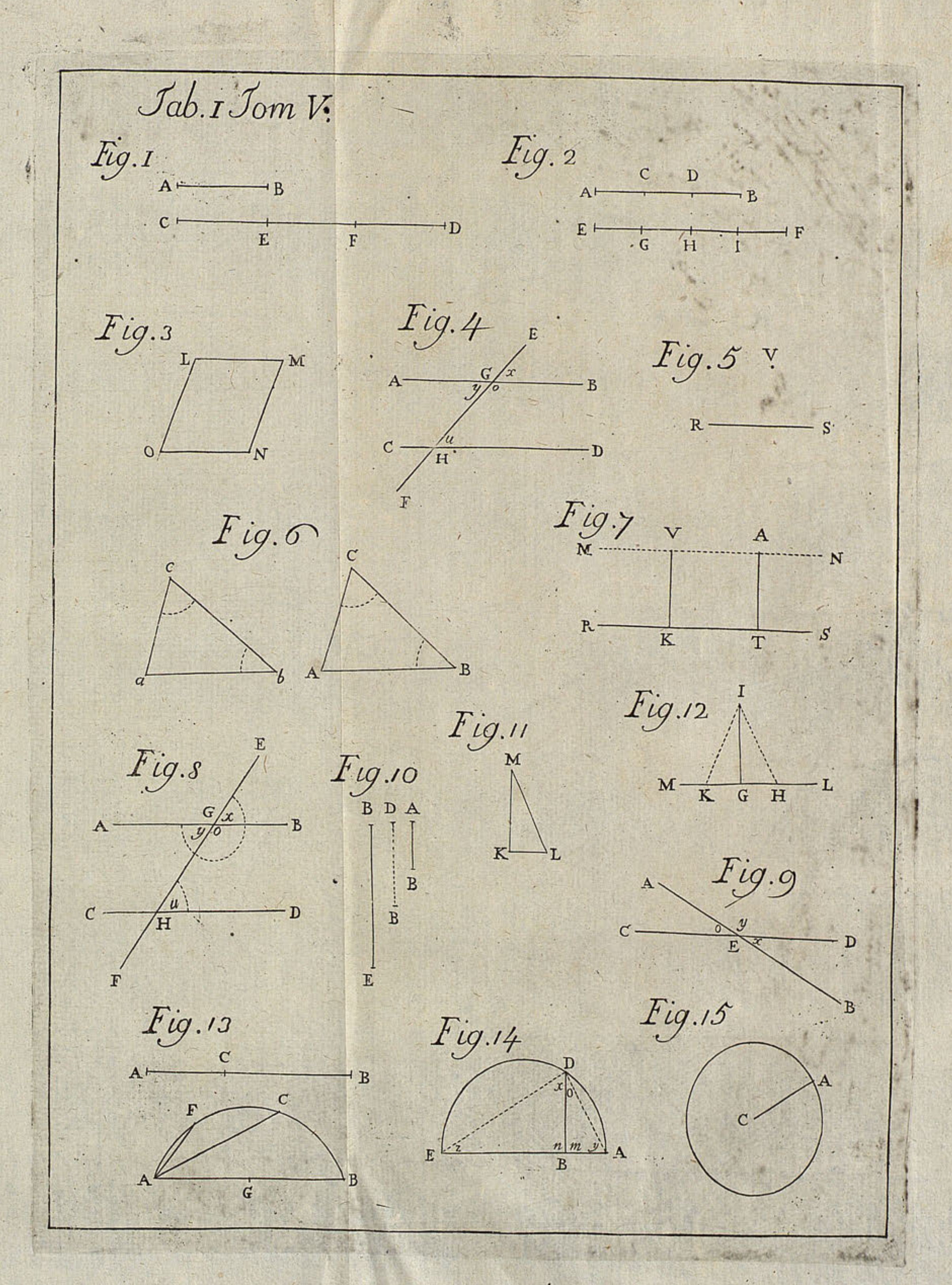
methodo pertractare voluerit. Notandum præterea, si quis ideam ædificii animo concipit, dato fundatoris scopo, eum inventorem agere, ac regulis Architecturæ civilis uti, tanquam principiis in ratiocinando. Quamobrem qui ad modum, quo hoc facit, animum attendit; is hinc addiscere valet, quomodo theoriæ ad tractanda negotia, quæ levi brachio tractari minime possunt, dextre ac rite applicentur. Suademus ergo ut ædificiorum, supposito fundatoris scopo, inveniatur constructio etiam ab iis, qui Artem exercere non intendunt: quod ut facilius succedat, ante in examinandis ædificiis juxta regulas architectonicas non inutiliter versabitur, quam ad telam istam pertexendam se accingit. Non adeo levem, nec contemnendæ utilitatis deprehendet demonstrationem, qui ædificium, dato fundatoris scopo, construendum sibi tanquam problema proponit, veluti *construere in data area, datoque loco, ædificium, quod huic fundatoris scopo ex asse satisfacit*; deinde quomodo extruendum sit eodem modo exponat, quo resolutiones problematum per universam Mathesin exhibuimus, & tandem demonstret pro datis circumstantiis scopo fundatoris ex asse satisfieri, siquidem hoc modo exstruatur. Etenim qui in expediendis negotiis, tam privatis, quam publicis, eam certitudinem consequi voluerit, quam consequi datur; plurimum hinc lucis fœnerabitur, quam aliunde vix ac ne vix quidem adeo commode expectet. Non igitur erubescimus studium Architecturæ civilis, hoc modo instituendum, commendare iis, qui ad negotia publica gerenda sese præparant; ut eorum rite tractandorum ideam quandam exemplarem animo insinuent. Plura addere possem, quomodo prudentia Architecti prodesse possit in gerendis negotiis; nisi principiis, quæ in Philosophia practica tradimus, imbutus per se hoc videre possit, ubi ea, quæ hic commendamus, exercitia non neglexerit.

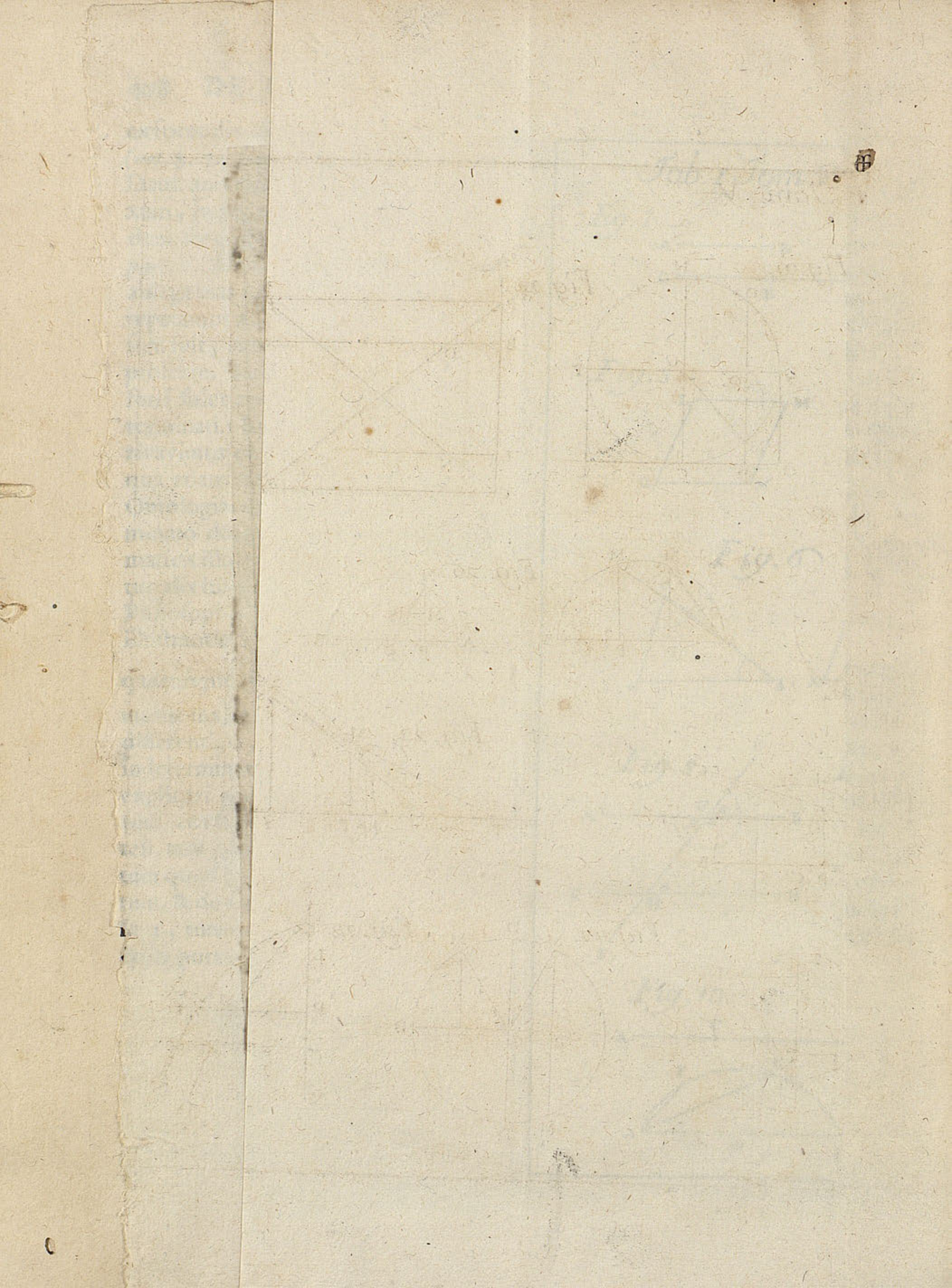
§. 340. Atque ita tandem nos satis docuisse confidimus, quomodo studium mathematicum tractandum sit, ut omnem consequamur usum, qui ab eo expectari potest. Non loquor nisi experta; ac ingenue profiteor, me nunquam ea, quæ hactenus in Philosophia conscripsi, & in posterum, si Deo ita visum fuerit, additurus sum, daturum fuisse, nisi adminiculis istis adjutus fuissem. Eadem experientia fretus docere quoque poteram, quomodo Mathesi uti possimus ad distinctas, & fœcundas, in Philosophia prima, notiones venandas; & quomodo studio mathematico perfici possit etiam appetitus; sed cum hoc a præsenti instituto alienum sit, quæ hic dici poterant, alii occasioni reservamus. Ne tamen dixisse videamur, quæ absona sunt, unum saltem alterumque exemplum in medium afferre lubet. Poteramus hic tantummodo provocare ad ea, quæ alibi jam tradidimus, veluti quod notio generum, & specierum (*not.* §. 72, 73 *Log.*) atque individui,

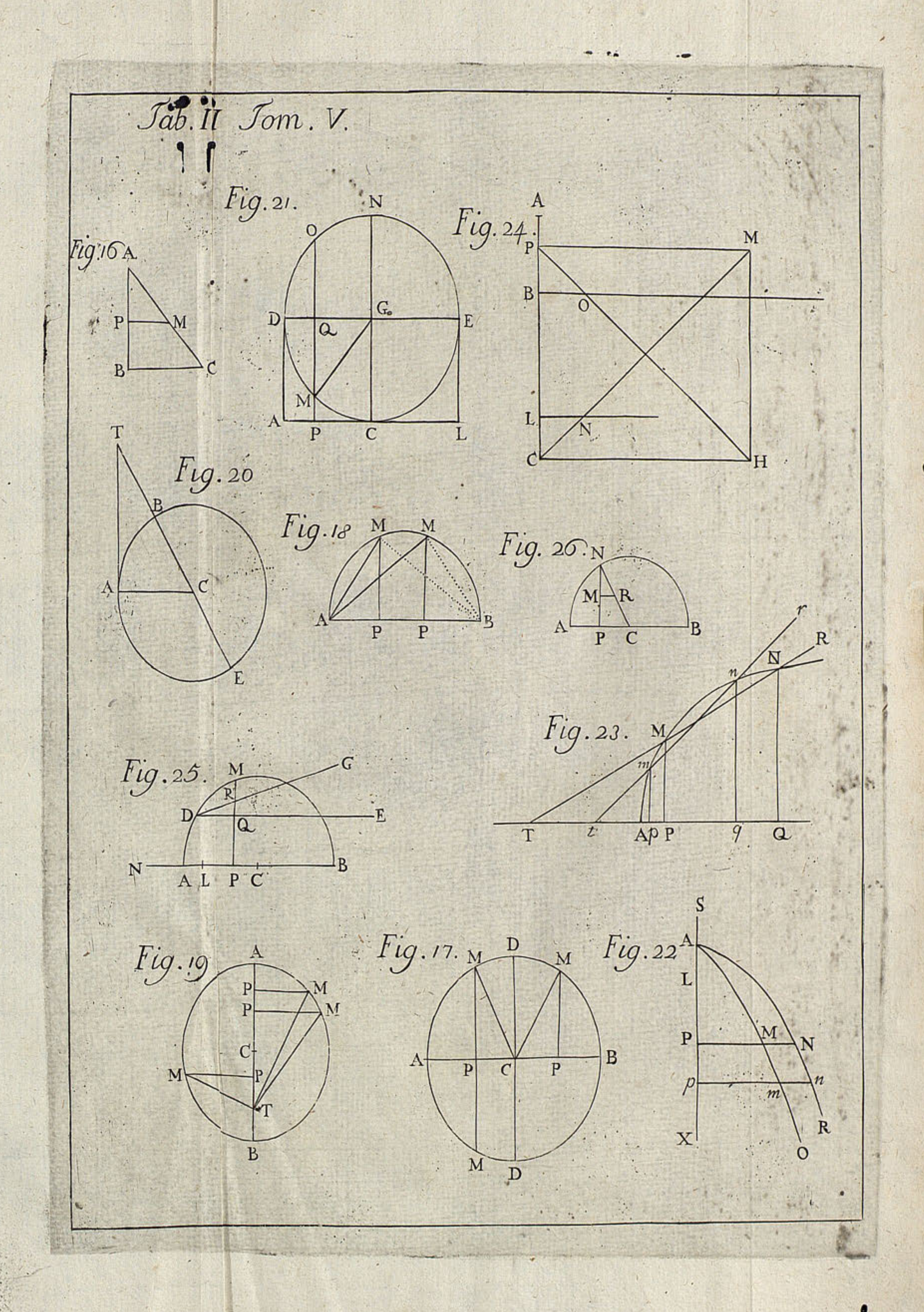
ex

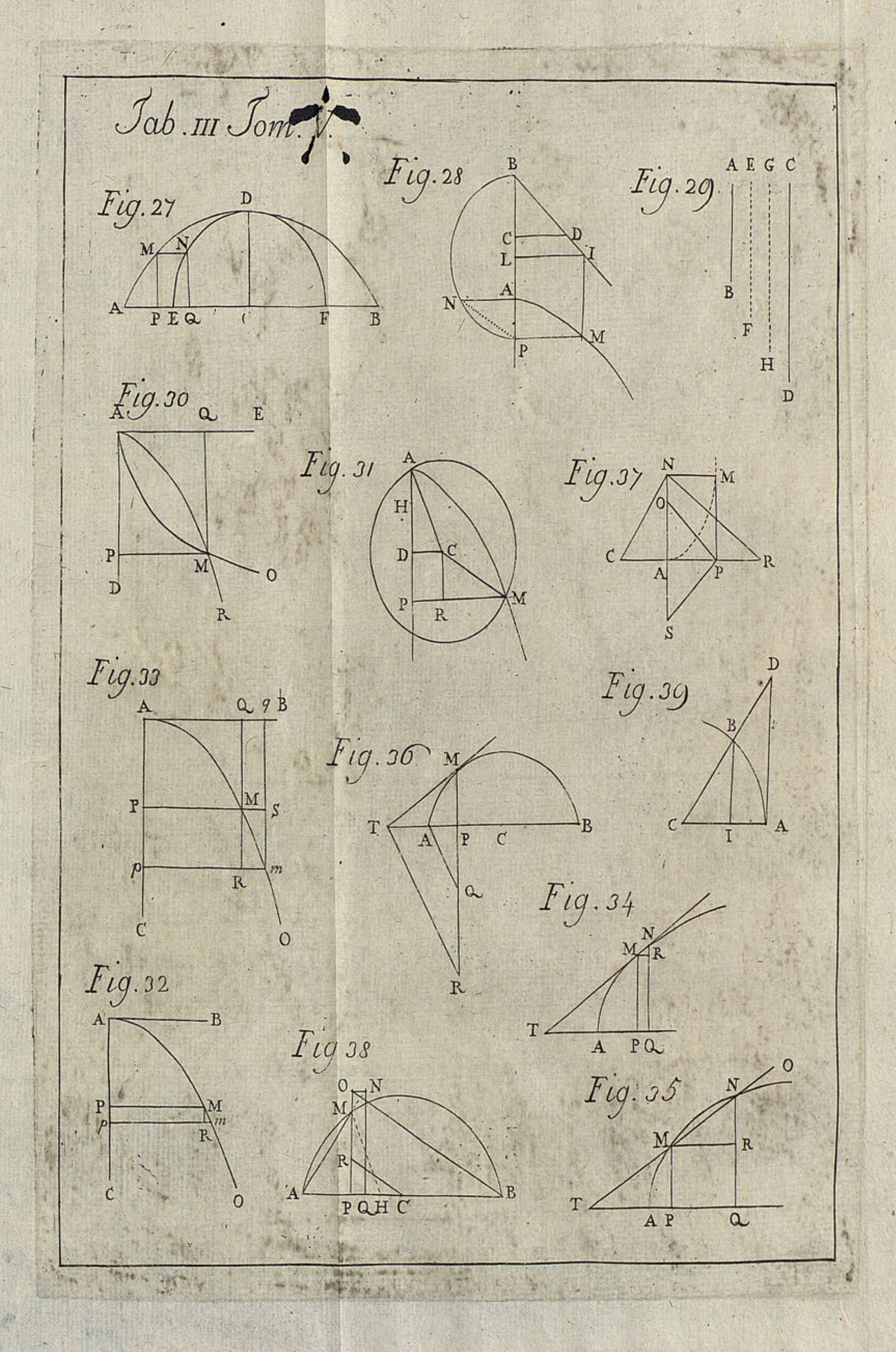
ex formulis algebraicis derivari possit (*not.* §. 74 *Log.*); & ipse modus, quo Deus universalia, eorundemque nexum, in singularibus intuetur, ex iisdem formulis eliciatur (*not.* §. 275 *part.* 1. *Theol. nat.*); sed ne lectorem ablegemus ad alibi quærenda, nec hic repetamus alibi dicta, consultius visum fuit, exempli loco, alia quædam proferre. Inter notiones difficiles referri solet notio determinati & indeterminati. Enimvero nos eandem derivavimus ex exemplis mathematicis: qua etiam de causa, singula quæ, in Ontologia, de determinato & indeterminato docuimus, exemplis mathematicis illustramus. Neque enim dantur alia hisce clariora, & notionem in Philosophia longe utilissimam felicius illustrantia. In formula algebraica quacunque, veluti si $\frac{a+b}{2}$ dicatur numerus major, summa existente a, & differentia b; numeri a & b dicuntur indeterminati; quia tam a, quam b explicari potest per numeros infinitos; consequenter de a affirmari potest, tum quod sit 6, tum quod sit 12, tum quod sit 19, & ita porro in infinitum, & de b affirmari potest, tum quod sit 2, tum quod sit 4, tum quod sit 5 & ita porro in infinitum. Indeterminata igitur dicitur summa, quatenus consideratur ut id, de quo affirmari potest numerus, 6, 12, 19 &c. nullus tamen adhuc de eadem affirmatur: quæ est ipsa notio indeterminati (§. 105 *Ontol.*). Ast si summa dicatur 6, determinata dicitur; quia jam constat, quinam numerus de ea sit affirmandus: quæ est ipsa notio determinati (§. 112 *Ontol.*). Idem patet de differentia b. Ordinis quoque notio distincta inter eas refertur, quæ difficiles sunt: sed ex seriebus infinitis, quarum termini ordine dicuntur progredi, haud difficulter eruitur. Ex. gr. in serie $\frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$, &c. in infinitum, ubi A terminum primum, B secundum, C tertium denotat; terminus sequens determinatur ex præcedente eodem modo, ac ideo ordo in progressu terminorum adesse dicitur. Ex identitate determinationis nascitur similitudo (§. 217 *Ontol.*). Ordo igitur hic est similitudo obvia in modo, quo termini se invicem consequuntur; quemadmodum vult definitio nostra ordinis (§. 472 *Ontol.*). Sed pauca hæc sufficiant.

Finis Commentationis de Studio Matheseos recte instituendo.

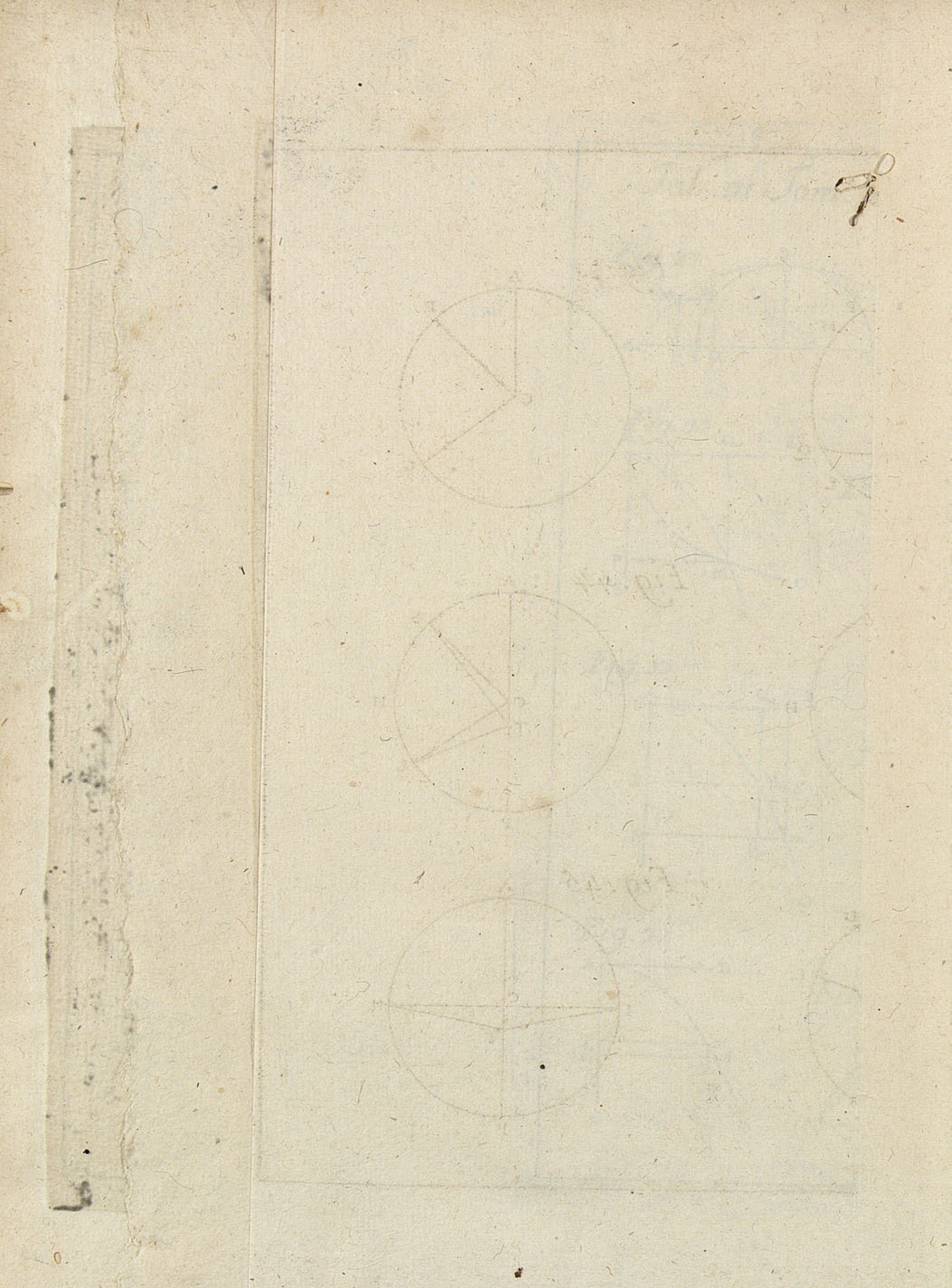

Tab. I Tom V.
Fig. 1
A
B
C
E
F
D
Fig. 2
C
D
A
B
E
G
H
I
F
Fig. 3
L
M
O
N
Fig. 4
E
A
G
x
y
o
B
C
u
H
D
F
Fig. 5
R
S
Fig. 6
C
a
b
C
A
B
Fig. 7
V
A
M
N
R
K
T
S
Fig. 8
E
A
G
x
y
o
B
C
u
H
D
F
Fig. 10
B D A
B
B
E
Fig. 11
M
K
L
Fig. 12
I
M
K
G
H
L
Fig. 9
A
C
o
y
E
x
D
B
Fig. 13
A
C
B
F
C
A
G
B
Fig. 14
D
x
o
E
z
n
m
y
A
B
Fig. 15
A
C

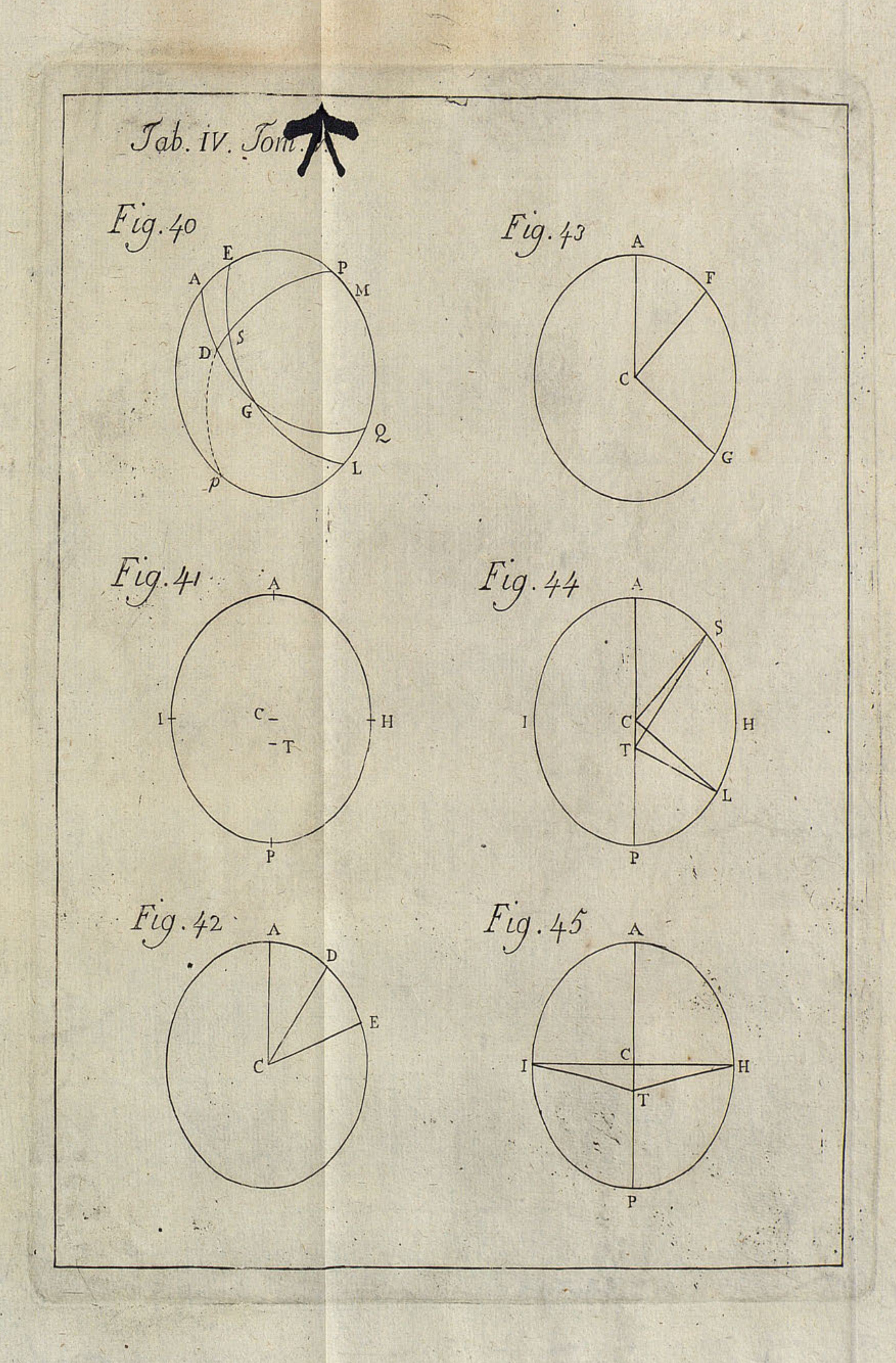


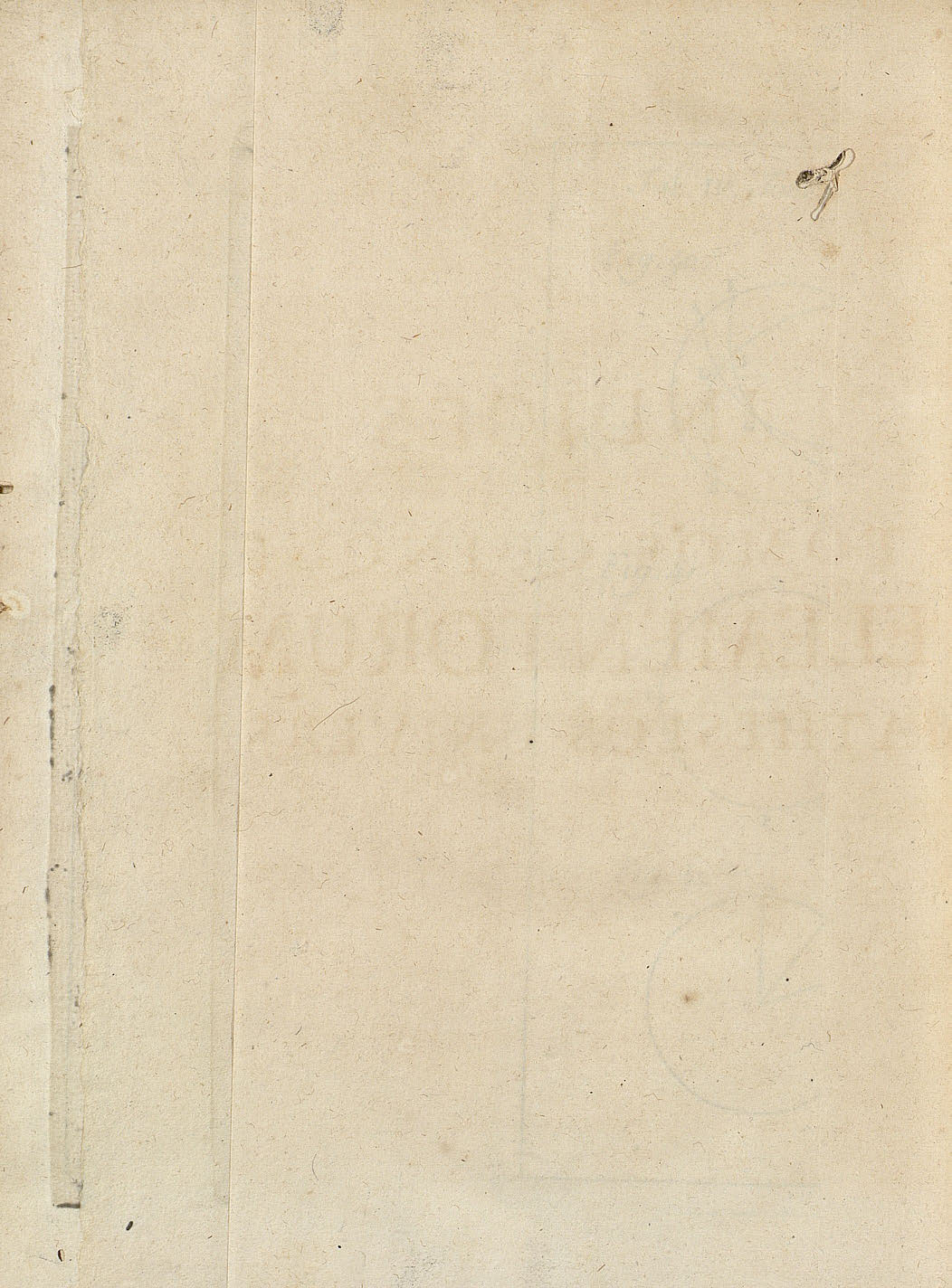

Tab. II Tom. V.
Fig. 16
A
P
M
B
C
Fig. 21.
N
O
D
G
E
Q
M
A
P
C
L
Fig. 24.
A
P
M
B
O
L
N
C
H
T
Fig. 20
B
A
C
E
Fig. 18
M
M
A
P
P
B
Fig. 26.
N
M
R
A
P
C
B
r
R
N
n
Fig. 23.
M
m
T
t
A
p
P
q
Q
Fig. 25.
M
G
R
D
E
Q
N
A
L
P
C
B
S
Fig. 19
A
P
M
P
M
C
M
P
T
B
Fig. 17.
M
D
M
A
P
C
P
B
M
D
Fig. 22
A
L
P
M
N
p
n
m
X
R
O



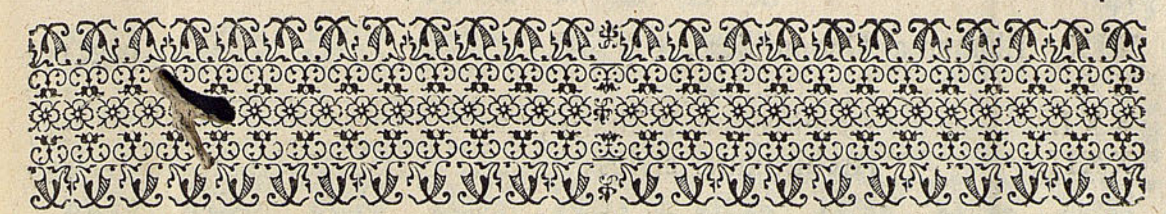
Tab. III Tom. V.
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 37
Fig. 33
Fig. 39
Fig. 36
Fig. 34
Fig. 32
Fig 38
Fig. 35




Tab. IV. Tom.
Fig. 40
A
E
P
M
S
D
G
Q
L
p
Fig. 43
A
F
C
G
Fig. 41
A
I
H
C
T
P
Fig. 44
A
S
I
C
H
T
L
P
Fig. 42
A
D
E
C
Fig. 45
A
I
C
H
T
P



INDICES
IN
TOMOS QUINQUE
ELEMENTORUM
MATHESEOS UNIVERSÆ.



I.

CONSPECTUS ELEMENTORUM MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

I. De Methodo mathematica brevis commentatio, pag. 1
II. Elementa Arithmeticæ, 15
III. Geometriæ, 95
IV. Trigonometriæ planæ, 211
V. Analyseos finitorum, 233
VI. infinitorum, 417

TOMUS II.

VII. Elementa Mechanicæ & Staticæ, 1
VIII. Hydrostaticæ, 253
IX. Aërometriæ, 279
X. Hydraulicæ, 331

TOMUS III.

XI. Elementa Opticæ, 1
XII. Perspectivæ, 77
XIII. Catoptricæ, 103
XIV. Dioptricæ, 171
XV. Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ, 291
XVI. Astronomiæ, 341

TOMUS IV.

XVII. Elementa Geographiæ & Hydrographiæ, 1
XVIII. Chronologiæ, 85

XIX. Elementa Gnomonicæ, pag. 151
XX. Pyrotechniæ, 197
XXI. Architecturæ militaris, 237
XXII. Architecturæ civilis, 287

TOMUS V.

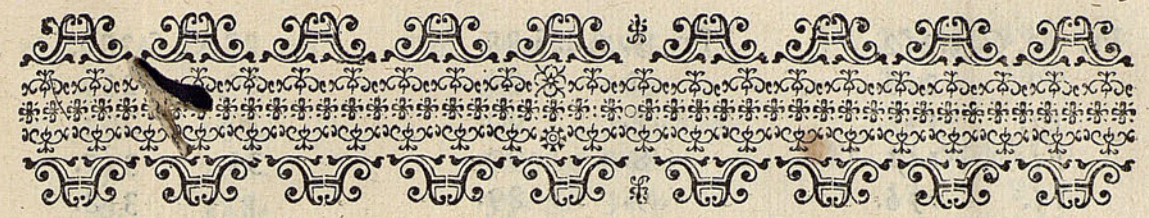
XXIII. De præcipuis scriptis mathematicis brevis Commentatio, 1

Cap. I. *De Cursibus, Operibus atque Lexicis mathematicis,* 3
Cap. II. *De Arithmetica,* 21
Cap. III. *De Geometria,* 24
Cap. IV. *De Scriptis analyticis,* 38
Cap. V. *De Trigonometria,* 55
Cap. VI. *De Statica & Mechanica,* 60
Cap. VII. *De Hydrostatica, Aërometria & Hydraulica,* 68
Cap. VIII. *De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva,* 73
Cap. IX. *De Astronomia,* 79
Cap. X. *De Chronologia, Geographia & Gnomonica,* 99
Cap. XI. *De Architectura civili,* 109
Cap. XII. *De Pyrotechnia,* 118
Cap. XIII. *De Architectura militari,* 120

XXIV. Commentatio de studio mathematico recte instituendo, 129

Cap. I. *De diversis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur,* 131
Cap. II. *De modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa,* 190
Cap. III. *De Studio Arithmeticæ, Geometriæ & Trigonometriæ planæ in specie,* 200
Cap. IV. *De Studio Algebræ seu Analyseos mathematicæ in specie,* 209
Cap. V. *De Studio Mechanicæ,* 317
Cap. VI. *De Studio Hydrostaticæ, Aërometriæ & Hydraulicæ,* 326
Cap. VII. *De Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ,* 333
Cap. VIII. *De Studio Sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ,* 346
Cap. IX. *De Studio Astronomiæ,* 350
Cap. X. *De Studio Geographiæ, Chronologiæ & Gnomonicæ,* 389
Cap. XI. *De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris & Architecturæ civilis,* 399

FINIS TOTIUS CONSPECTUS.



II.

INDEX

Ostendens paragraphos, in quibus definitiones & propositiones Elementorum Euclidis continentur.

Notes velim, Ar. designare Arithmeticam, G. Geometriam, An. Analysin finitorum.

Elementi I.
Def. 1. G. §. 6. 8. 9.
2. 10. 12.
3. 11.
4. 17.
5. 28.
6. 29.
7. 36.
8. 54.
9. 54.
10. 65. 78.
11. 66.
12. 66.
14. 32.
15. 37.
16. 37.
17. 39.
18. 135.
19. 34.
20. 87.
21. 97.
Def. 22. G. §. 104.
23. 88.
24. 89.
25. 90.
26. 91.
27. 92.
28. 93.
29. 98.
30. 100.
31. 99.
32. 101.
33. 103.
34. 81.
35. 102.
36. 111.
Post. 1. 20.
2. 21.
3. 131.
Ax. 1. Ar. 87. 89.
2. 88.
Ax. 3. Ar. 91.
4. 90.
5. 91. 92.
6. 93.
7. 94.
8. G. §. 161.
9. Ar. §. 84.
10. G. §. 250.
11. 50.
12. 145.
13. 262.
14. 170.
Prop. 1. 198.
4. 179.
5. 184.
6. 253.
7. 202.
8. 204.
9. 209.
10. 210.

Pr. 11. G. §. 212.
12. 216.
13. 147.
14. 147.
15. 156.
16. 188.
17. 247.
18. 189.
19. 189.
20. 190.
21. 300.
22. 205.
23. 208.
26. 251.
27. 255.
28. 255.
29. 233.
30. 232.
31. 258.
32. 239. 240.
33. 257.
34. 335. 337.
35. 383.
36. 383.
37. 385.
38. 385.
41. 386.
44. 391.
45. 391.
46. 338.
47. 417.
48. 417.
Elem. II.
Pr. 1. An. 91.
2. 93.
3. 86.
4. Ar. 261.
An. 95.
Pr. 5. An. §. 88.
6. 94.
7. 90.
8. 90.
9. 89.
11. 258.
Elem. III.
Def. 1. G. 171.
2. 47.
3. 47.
4. 225.
5. 225.
6. 45.
7. 77.
8. 70.
9. 56.
10. 46.
Pr. 1. 295.
3. 291.
4. 332.
5. 288.
6. 287.
7. 303.
8. 302.
9. 173.
10. 203.
14. 298.
15. 299. 301.
16. 304. 305.
17. An. 291.
18. G. 308.
19. 309.
20. 313.
21. 315.
22. 350.
25. 295.
26. 315.
27. 315.
Pr. 28. G. §. 289.
29. 289.
30. 293.
31. 317.
318.
319.
32. 323.
35. 381.
36. 379.
37. 380.
Elem. IV.
Def. 3. G. §. 116.
6. 117.
Pr 5. 294.
297.
6. 353.
7. 351.
11. An. 279.
12. G. 355.
15. 357.
Elem. V.
Def. 1. Ar. 30.
2. 142.
3. 126.
4. 131.
5. 219.
6. 155.
7. 158.
8. 155.
9. 156.
10. 159. 216.
11. 159. 216.
13. 173.
14. 169.
15. 190.
16. 193.
17. 193.
18. 194. 195.

Def. 19. Ar. §. 194.
20. [illegible]95.
Pr. 4. 185.
5. 188.
6. 188.
7. 168.
8. 203. 205.
9. 177.
10. 204. 206.
11. 167.
12. 155.
15. 178.
16. 173.
17. 193.
18. 190.
19. 188.
22. 194.
23. 198.
Elem. VI.
Def. 1. G. 175.
2. An. 261.
3. 258.
4. G. 227.
5. Ar. 159.
Pr. 1. G. 389.
2. 268.
3. 269.
4. 267.
5. 207.
6. 183.
8. 329.
9. 274.
10. 275.
12. 271.
13. 327.
16. 378.
17. 377.
18. 360.
Pr. 19. G. §. 398.
20. 403.
23. 376. 388.
30. An 258.
33. G. 314.
Elem, VII.
Def. 1. Ar. §. 3. 4.
2. 10.
3. 30.
4. 30.
5. 142.
6. 72.
7. 73.
11. 75.
12. 79.
13. 76.
14. 80.
15. 66. 69.
18. 246.
19. 248.
20. 155.
22. An. 248.
23. Ar. 74.
24. 126.
26. 159.
27. 217.
Ax. 7. 210.
9. 212.
Pr. 1. 230.
2. 228.
11. 188.
12. 187.
13. 173.
14. 194.
16. 207.
17. 178.
18. 178.
19. 297. 299.
Pr. 20. Ar. §. 298.
22. 198.
Elem. VIII.
Pr. 11. Ar. §. 259.
12. 259.
13. 260.
Elem. IX.
Pr. 21. An. §. 72.
22. 75.
23. 75.
24. 72.
25. 73.
26. 74.
27. 73.
28. 72.
29. 74.
30. 79.
35. 119.
36. 248.
Elem. X.
Def. 1. Ar. §. 31.
2. 31.
6. 39.
7. 43.
Pr. 3. 230.
5. 163.
6. 160.
7. 163.
8. 164.
117. G. 421.
Elem. XI.
Def. 1. G. §. 444.
3. 486.
4. 494.
6. 476.
8. 498.
9. 564.
11. 445.

Def. 12. G. §. 472.
13. 456.
14. 470.
15. 470.
16. 470.
17. 470.
18. 467.
19. 467.
20. 468.
27. 475.
28. 475.
29. 475.
30. 462.
Pr. 1. 478.
2. 480. 481.
3. 482.
4. 484.
5. 491.
6. 492.
7. 483.
8. 492.
9. 495.
10. 496.

Pr. 11. G. §. 505.
12. 502.
13. 488.
14. 497.
15. 500.
16. 499.
17. 501.
18. 506.
19. 508.
21. 452.
28. 537.
29. 535.
30. 535.
31. 535.
32. 573.
33. 578.
34. 580.
Elem. XII.
Pr. 1. G. 408.
2. 408.
5. 573.
6. 573.
7. 543.

Pr. 8. G. §. 578.
9. [illegible]80.
10. 547.
11. 573.
12. 578.
14. 573.
15. 580.
18. 579.
Elem. XIII.
Pr. 8. An. 294.
9. 275.
10. 279.
12. 268.
13. 299.
14. 305.
15. 302.
16. 311. & seqq.
17. 308. & seqq.
18. 301. 304. 307. 310. 311.

FINIS INDICIS SECUNDI.



III.

INDEX AUTORUM,

Qui in Commentatione de præcipuis ſcriptis mathematicis recenſentur.

Notes velim Numerum Romanum Caput, ceteros vero §. §. ejuſdem deſignare.

A.

ABalphatus Aſphahamenſis, III. 13.
Albategnius, IX. 2. 12.
Alberti, Andreas, VIII. 21.
de *Albertis*, Leo Baptiſta, XI. 1. 2. 3.
Alexander, Dominicus Jacobus, VI. 27. 31.
Alhazen, VIII. 2. 3. 31.
Alimarus, Dorotheus, X. 20.
Alingham, Wilhelmus, I. 8.
Alphonſus IX. IX. 25.
S. Andreas Hieroſolymitanus, X. 2.
Anonymi, VI. 26. VII. 8. IX. 2. 57. XI. 15. 26. 30. XIII. 17. 27.
Apollonius Pergæus, I. 1. 24. III. 11. 13. 25. 28. 29. IV. 1. VII. 14.
Aratus, X. 2.
Archimedes, I. 24. 34. III. 11. 12. 13. 29. VI. 1. VII. 1. 14.
Ardûſer, Joannes, III. 34.
des *Argues*, XI. 24.
Ariſtæus, III. 13. IV. 1.
Ariſtarchus Samius, I. 34. VII. 14.
Athenæus, I. 30.
Auzout, I. 31. 37.

BAchetus, Caſparus, IV. 2.
Bacon, Rogerius, VIII. 5.
Baker, Thomas, IV. 8.
Baldus, Bernhardinus, I. 30. XI. 1.
Balianus, Johannes Baptiſta, VI. 5. VII. 10.
Bara, J. VIII. 20.
Baratteri, Johannes Baptiſta, XI. 26.
Barlaamus Monachus, II. 5.
Barrowius, Iſaacus, III. 2. 11. 19. 29. IV. 8. 23. VIII. 14.
Bartholinus, Eraſmus, IV. 6.
Bartſchius, Jacobus, V. 10.
Bayerus, Johannes, IX. 35.
Johannes Hartmannus, II. 16.
Johannes Matthias, VI. 22.
de *Beaune*, Florimundus, IV. 6.
Bedford, Arturus, X. 6.
Beeren, Thomas Leonhardus, XII. 1.
Behr, Johannes Henricus, XIII. 25.
de *Belidor*, VII. 18. XII. 8. XIII. 34.
Berger, Chriſtianus Philippus, VI. 27. IX. 36.
Bernoulli, Daniel, VII. 12.
Jacobus, IV. 18. 21. IX. 39.
Johannes, IV. 14. 18. 19. 31. 33. 35. 36. X. 21.
Nicolaus, IV. 14. X. 21.
Beroaldus, Franciſcus, VI. 20.
Beſſon, Jacobus, VI. 20.

Beveregius, Guilielmus, X. 5.
Beyerus, Johannes Hartmannus, III. 31.
de *Beze*, I. 37.
Bierum, Henricus, X. 33.
de *Billy*, Jacobus, III. 26.
Bion, Joannes Theobaldus, I. 13.
Nicolaus, IX. 35. X. 35. 38.
de *Birac*, XIII. 37.
Biton, I. 30.
Blanchini, Franciscus, IX. 8. 39. X. 7.
Bleau, Guilielmus, IX. 35. X. 39.
le *Blond*, XI. 9.
Blondel, Franciscus, I. 37. X. 7. XI. 10. XII. 8. XIII. 427.
Baeckler, Georgius Andreas, VII. 16. XI. 5. XII. 7. XIII. 36.
Baecklerus, Joannes, III. 31.
Boëthius, Anitius Manlius Severinus, II. 1.
Bombelle, XIII. 27.
Bombelli, Raphaël, IV. 3.
Bonannus, Philippus, VIII. 19.
Bone, Edmundus, III. 39.
Bonjour, Guilielmus, X. 7.
Borellus, Johannes Alphonsus, III. 13. VI. 3.
de *Borgsdorf*, Ernestus Fridericus, XIII. 9.
Borromini, Franciscus, XI. 19.
Bose, Georgius Matthias, IX. 43.
Bosse, Abrahamus, VIII. 20.
Boyle, Robertus, VII. 3.
Braikenridge, Guilielmus, IV. 37.
Branca, XI. 9.
Brand, Augustinus, XII. 6. 7.
Braunius, Ernestus, XII. 1.
Bremond, I. 36.
Briennius, Manuel, I. 34.
Briggius, Henricus, V. 11.
Browne, Wilhelmus, VIII. 15.
Brunetti, Franciscus Xaverius, IV. 39.
Buchnerus, Joannes Sigismundus, XII. 1.
de *Buffon*, IV. 27.
Bullet, XI. 29.
Bullialdus, Ismaël, III. 23. IV. 17. V. 16. IX. 3. 18. 20. 28. 41.
Buonaroti, Michaël Angelus, XI. 7.
Byrgius, Justus, III. 39. IV. 38. V. 10. 14. IX. 2.

C.

Calvisius, Sethus, X. 3. 7.
de *Camus*, VI. 19.
Cantzlerus, Bernhardus, III. 32.
Capellus, Angelus. IX. 44.
Carré, IV. 20.
Cartesius, Renatus, IV. 6. 20. VIII. 7.
Casatus, Paulus, VI. 2.
Cassini, Johannes Dominicus, I. 37. IX. 6. 30. 53. X. 7. 24.
Jacobus, IX. 6. 30.
Castellus, Robertus, XI. 17.
Castronius, Benedictus Maria, X. 37.
Caswellus, Johannes, I. 34.
Cataneo, Petrus, XI. 9.
Cavalerius, Bonaventura, III. 12. 24. IV. 17. V. 15.
Ceva, Joannes, VII. 9.
Thomas, I. 35.
Chamberus, Joannes, II. 5.
de *Chambray*, Roland Freard, XI. 9.
Chambers, E. I. 19.
Chamberus, Johannes, II. 5.
de *Champdoré*, Duraeus, XI. 7.
Cherubim, VIII. 10.
Cheynaeus, Georgius, IV. 22.
Christmannus, Jacobus, X. 8.
Claramontius, Scipio, IX. 39.
Clarke, Joannes, IV. 39. VI. 16.
Samuel, VIII. 12.
Clavius, Christophorus, I. 24. II. 12. III. 33. IX. 24. 38. X. 7. 9. 26.
du *Clos*, I. 37.
Coehorn, XII. 4. 7. 27. XIII. 6. 26. 27.
Coetsius, Henricus, X. 32.
Collins, Joannes, I. 34. IV. 34.
Colombonus, Angelus Maria, X. 38.
Colson, Joannes, IV. 27.
Combachius, Johannes, VIII. 5.
Commandinus, Fridericus, III. 8. VII. 16.
Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, I. 39.

Commentarii de Bononienſi Scientiarum & Artium Inſtituto atque Academia, I. 40.
Conradi, Johannes Michaël, VIII. 17.
Copernicus, Nicolaus, IX. 2. 13. 26. 39.
Cotes, Rogerus, IV. 30. VI. 13.
Crabtrius, Guilielmus, IX. 4.
Craige, Johannes, IV. 23.
de *Crouzas* IV. 13. 19.
Cunitia, Maria, IX. 27.
Cunn, Samuel, II. 17. III. 39.
Curio, Jacobus, IX. 25.

D.

Daſypodius, Conradus, I. 15. III. 4.
Dechales, Claudius Franciſcus Milliet, I. 4. II. 12. III. 2. 29. V. 20. VI. 11. VII. 5. 15. X. 11. 14. XI. 23. XII. 1. XIII. 15.
Deidier, XIII. 27.
Demontioſius, Ludovicus, XI. 1.
Deran, Philippus, XI. 24.
Derham, Wilhelmus, VI. 26. IX. 39.
Deſaguliers, J. Theoph. VIII. 15.
Deſargues, VIII. 20.
Desgodetz, Antonius, XI. 13.
Detonvillæus, III. 14.
Dieuſſart, Carolus Philippus, XI. 9.
Dilichius, Wilhelmus, XIII. 15.
Diophantus Alexandrinus, I. 23. 27. IV. 2. 9.
Ditton, Henricus, VI. 15.
Humphredus, IV. 39.
Dodartus, I. 37.
Doegen, Matthias, XIII. 18.
Domckey, VI. 16.
Doppelmeyer, J. Gabriel, IX. 20. X. 31. 35.

E.

Ecchellenſis Maronita, Abrahamus, III. 13.
Eiſenſchmid, Joannes Caſparus, V. 10.
Elrich, Daniel, XII. 1.
Eratoſthenes, IV. 1.
Errardus, XIII. 27.
Eslerus, Joannes, IX. 24.
Euclides, I. 1. 2. 4. 7. 23. 24. 29. 32. 34. II. 6. 4. III. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 10. IV. 1. VII. 14. VIII. 1. X. 15.
Eulerus, Leonhardus, VI. 18. VII. 12.
Euſtachius de Divinis, I. 35.
Eutocius, I. 34.

F.

Faber Stapulenſis, Jacobus, II. 3.
Fabry, Honoratus, IV. 37. VIII. 26.
Fâſch, Joannes Ludolphus, I. 22.
Faulhaber, Joannes, IV. 38. XIII. 30.
du *Fay*, Abbas, XIII. 5.
Fermatius, I. 31. IV. 8.
Feuillée, Franciſcus, X. 22.
Ludovicus, IX. 9.
Finæus, Orontius, III. 2.
Fiſcher ab Erlachen, Johannes Bernhardus, XI. 18.
Flamſtædius, Joannes, I. 34. IX. 7. 28. 33. 34.
von Flemming, Joannis Fridericus, XIII. 37.
Fluſſates Candalla, Franciſcus, III. 2.
de *Fontenelle*, Bernhardus, I. 37. IV. 33.
Fournier, Georgius, X. 14.
Frenicle de Beſſy, I. 31. 37.
Freytag, Adamus, XIII. 1.
Frezier, XI. 25.
Friſius, Gemma, II. 14.
Frontinus, *Sextus Julius*, VII. 13.

G.

Galilæus Galilæi, III. 39. VI. 4. VIII. 6. IX. 39. 41.
Gallonus, IV. 25.
Gaubil, IX. 9.
Gauppe, Johannes, X. 33.
Gauricus, Lucas, IX. 10. XI. 1.
Gautier, Henricus, XI. 27.
Gaza, Theodorus, X. 2.
Gellibrand, Henricus, V. 12.
Gemma Friſius, II. 14.
Germanus, Georgius, I. 24.
Ghetaldus, Marinus, I. 1. IV. 6. 9. VII. 1.
Ghislerius, Antonius, IX. 56.
Girardus, Albertus, I. 23.
Glaſer, Johannes Chriſtophorus, XIII. 35.
Goldmann, Nicolaus, III. 39. XI. 11.

Gooden, Jacobus, V. 19.
Gordonius, Georgius, X. 18.
de *Gottignes*, Ægidius Franciſcus, IV. 15.
Goulon, XIII. 31.
de *Graaf*, Abrahamus, I. 6. IV. 12.
Grandus, Guido, I. 35. III. 16.
s'Graveſand, G. J. IV. 12. VIII. 25.
Gray, Joannes, I. 36.
Gregorius à S. Vincentio, I. 35. III. 14.
Jacobus, IV. 22. VIII. 14. 15.
David, III. 2. IV. 22. VIII. 15.
IX. 22. 40.
Griendel von Aach, Johannes Franciſcus, VIII. 19. XIII. 14. 21.
de *Grotte*, Alexander, XIII. 7.
Gruber, Bernhardus, X. 37. 38.
Sebaſtianus, XIII. 25.
Guarinus, X. 27.
Guiſnée, IV. 11.
Guldinus, Paulus, III. 18. IV. 8.
Gulielminus, Dominicus, I. 40. VII. 11.
15. XI. 26.

H.

HAdley, J. VIII. 15.
Halfpenny, Guilielmus, XI. 22.
Halley, Edmundus, III. 13. 28. IV. 12.
IX. 3. 7.
du *Hamel*, Johannes Baptiſta, IX. 39.
Hanke, Johannes, IX. 43.
Hartmannus, XIII. 26.
Harriot, Thomas, IV. 5.
Harris, J. I. 18. IV. 6.
Harsdœrffer, Philippus, I. 42.
Hartſœker, Nicolaus, VIII. 9.
Haſius, Johannes Matthias, III. 37. XIII. 33.
Hauſen, Chriſtianus Auguſtus, III. 16.
Hawney, Wilhelmus, V. 18.
Hayes, Carolus, IV. 24.
Hazan, Iſaacus, IX. 25.
Heer, Chriſtophorus, XIII. 14. 30.
Heidenmann, Chriſtophorus, XIII. 14.
Heniſchius, Georgius, II. 10. IV. 3.
ab *Herberſtein*, Ferdinandus Erneſtus Comes, III. 26.
Herigonius, Petrus, I. 1. II. 12. III. 2. VIII. 1.
Herlinus, Chriſtianus, III. 4.
Ludovicus Andreas, XIII. 11.
Hermannus, Jacobus, I. 3. VI. 17.
VII. 11. 15.
Heron Alexandrinus, I. 30. VII. 16.
Hertel, Chriſtianus Gottlieb, VIII. 18.
Herward ab Hohenburg, Johannes Georgius, II. 18.
Hevelius, Johannes, XI. 3. 31. 35. 39.
Hipparchus, IX. 2. 32. X. 2.
de la *Hire*, Philippus, III. 14. 15. 33.
IV. 11. VI. 10. VII. 19. IX. 6. 30.
43. 44. X. 28.
Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences, I. 37.
Hodgſon, Jacobus, X. 15.
Hooke, Robertus, VIII. 19. IX. 3.
Horoccius, Jeremias, IX. 4. 17. 39.
Horrebowius, Petrus, IX. 41. 50. 51. 54.
Hortenſius, Martinus, V. 6.
de l'*Hoſpital*, Marchio, IV. 11. 19. 20. 23.
39. VI. 12.
Hoſtus, I. 29.
Hugenius, Chriſtianus, I. 31. 35. III. 14.
20. 25. IV. 6. 14. VI. 5. 7. 8. 12. 24.
VIII. 8. 13. 18. IX. 39. 48. X. 21.
Hulſius, Levinus, III. 39.
Hyde, Thomas, IX. 32.

I.

JAcquier, Franciſcus, VI. 16.
Intieri, Bartholomæus, IV. 37.
Joannes de Sacro Boſco, I. 24. IX. 24. X. 9.
Joannes Peccamus, VIII. 4.
Jones, Wilhelmus, IV. 21. 30. 32. 34.
Jordanus, II. 3.
Iſaacus Monachus, X. 2.
Julius Africanus, I. 30.
Jungenickel, Andreas, VI. 2.
Jurin, Jacobus. X. 12.

K.

KEill, Joannes, III. 8. IV. 34. 35. 36.
VI. 9. 12. 23. X. 18.
Kepplerus, Joannes, III. 12. V. 10. VII. 3.
VIII. 6. IX. 16. 17. 18. 27. 32. 39. 40. 55.
Kerſey, Joannes, IV. 9.

Kinck-

Kinckhuysen, Gerhardus, IV. 12.
Kircherus, Athanasius, I. 2. III. 40. VIII. 16.
Klimmius, Joannes Albertus, IX. 44.
Kolbans, Johannes Christophorus, VIII. 17.
Kresa, Jacobus, V. 22.

L.

de *Lagny*, I. 37.
Lalovera, Antonius, III. 26.
Lambion, Lambertus, XIII. 30.
Lamy, Bernhardus, III. 6. IV. 10. VI. 2. VII. 5. VIII. 21.
Landsbergius, J. H. XIII. 12.
Langhansen, Christophorus, IX. 43.
Langley, Batty, III. 36. XI. 29.
de *Lanis*, Franciscus Tertius, VII. 4.
Lansbergius, Philippus, I. 26. V. 7. IX. 13. 16. 17. 28.
Lauterbach, Joannes Balthasar, XI. 14.
van Leeuwenhoek, Antonius, VIII. 19.
Leibnitius, Godofredus Guilielmus, I. 11. 12. 21. 34. II. 15. IV. 10. 20. 22. 23. 31. 33. 34. 35. IX. 16.
Leotaudus, Vincentius, II. 12.
Leupoldus, Jacobus, VI. 20. VII. 19.
Leutmannus, Joannes Georgius, IV. 26. VIII. 18.
Leyborn, Wilhelmus, I. 5.
Liebknecht, J. G. X. 13.
Limpergh, Petrus, VI. 23.
Longomontanus, Christianus Severinus, IV. 14. 16. 27.
Lorenzini, Laurentius, III. 22.
Lorinus, Bonajutus, XIII. 19.
de *Lorme*, Philibertus, XI. 24.
Lowthorp, Joannes, I. 36.
Lucas Paciolus de Burgo S. Sepulchri, II. 6. IV. 3.
Ludovicus, Ferrariensis, IV. 3.
Ludolphus à Ceulen, III. 21.

M.

Mac Laurin, Colinus, IV. 37.
Maffejus, Scipio, XI. 17.
Maginus, Joannes Antonius, IX. 55.
le *Maître*, Alexander Christianus, XIII. 20.
de *Malesieux*, III. 6.
Mallet, Allain Manesson, III. 30. XIII. 28.
Manfredi, Eustachius, I. 40. IX. 52. 53. 56. X. 7.
Gabriel, I. 40. IV. 20.
Maphæus, Thomas Pius, X. 7.
Maraldus, IX. 6.
de *Marchettis*, Angelus, III. 7. 27.
Marinonius, Joannes Jacobus, VIII. 13.
Mariottus, I. 31. VI. 11. VII. 2. 10. 19. VIII. 13.
Marolois, XIII. 27.
de *Martino*, Nicolaus, III. 16.
Martius, Georgius Conradus, XIII. 25.
Maurolycus, Franciscus, I. 32. II. 9. VII. 14.
de *Maupertuis*, IX. 25. 39.
S. *Maximus* Martyr, X. 2.
de *Medrano*, Don Sebastian Fernandez, XIII. 24.
Megerlinus, Petrus, IX. 41.
Meider, Gerhardus, XIII. 1.
Menechmus, IV. 8.
Menelaus, VII. 14.
Mercator, Nicolaus, I. 5. IV. 21. IX. 23. 27.
Mersennus, Marinus, I. 31. 37. VII. 14.
Metius, Adrianus, II. 14. III. 34. X. 39.
Meyer, Cornelius, XI. 26.
Mezzavacca, IX. 56.
Michaëlis, Georgius, X. 32.
Mieth, Michael, XII. 2.
Milnes, Jacobus, III. 14.
Miscellanea Berolinensia, I. 38.
Mœstlinus, Michaël, IX. 2. 24.
de *Moivre*, Abrahamus, IV. 14. 29.
Molerus, Elias, IX. 43.
Molyneux, Wilhelmus, VIII. 8.
de *Monmort*, Remundus, IV. 14.
Moore, Jonas, I. 3.
Morinus, Johannes Baptista, IX. 27. 58.
Morlandus, Samuel, II. 15.
Motte, Benjaminus, I. 36.
Muet, XI. 15.
Müller, Johannes Ulricus, X. 32.
Münsterus, Sebastianus, X. 8. 29.
Muhammedes Tixinus, IX. 32.
van *Musschenbroek*, Petrus, X. 23.

Mydorgius, Claudius, III. 14. VII. 14.

N.

NEperus, Joannes, II. 18. V. 8. 14.
Neubauer, Christianus, XIII. 8.
Newton, Joannes, V. 13. IX. 20. 28.
Newton, Isaacus, I. 34. IV. 12. 16. 18. 20. 21. 22. 23. 26. 27. 30. 35. VI. 13. VII. 6. 11. VIII. 12. 15. IX. 16. 40. X. 6.
Niceron, Joannes Franciscus, VIII. 22.
Nicomachus, II. 1. 6.
Nieuwentyt, Bernhardus, IV. 33.
Noël, Franciscus, IX. 9. 22.
Norvvood, Richardus, V. 17.

O.

de OMerique, Hugo, IV. 16.
Ori, Rabbi, X. 8.
Origanus, David, IX. 55.
de l'*Orme*, Philibertus, XI. 2. 6.
Osvvaldus, Erasmus. IX. 10.
Otho, L. Valentinus, V. 4.
Oughtredus, Guilielmus, I. 27. IV. 4. V. 16. VI. 2. 26. VII. 1.
Ozanam, I. 7. 17. 33. 43. III. 15. 39. 33. IV. 10. 11. V. 20. 21. XIII. 24.

P.

de PAgan, Comes, III. 23. IX. 19. 28. XIII. 2. 17. 27.
Palladius, Andreas, XI. 4. 5. 9. 10.
Palma, Johannes Baptista, III. 26.
Pappus Alexandrinus, I. 34. III. 13. 17. 28. 29. IV. 1. VI. 1. VII. 14.
Pardies, Ignatius Gaston, III. 6. VI. 2. 11. X. 36.
Parent, VI. 11.
Pascal, III. 14. IV. 14.
Paschalius, Julius, VI. 20.
Patoun, Archibaldus, X. 17.
Peletarius, Jacobus, III. 2.
Pemberton, Henricus, IV. 16. 27. 30.
Pena, Joannes, VIII. 1. 6.
Perrault, I. 37. VI. 3. 6. 24. XI. 2.
Petavius, Dionysius, X. 2. 5.
Philander, Guilielmus, XI. 1.
Philo, I. 30.
Philosophical Transactions, I. 36.
Picardus, I. 31. VII. 10. 19. X. 24. 28.
Pitiscus, Bartholomæus, V. 3. 5.
Pitot, X. 21.
Polenus, Joannes, II. 15. VII. 13. IX. 40.
Polynier, Petrus, III. 7.
Porphyrius, I. 34.
Porta, Joannes Baptista, VIII. 6.
Portius, Lucas Antonius, VII. 16.
Post, Petrus, XI. 16.
Prestet, Joannes, IV. 9. 10.
Psellus, II. 2.
Ptolomæus, Claudius, I. 34. V. 1. IX. 2. 10. 11. 32. 58. X. 9.
Purbachius, Georgius, V. 7. IX. 2. 11. 24. 25.
Puzzo, Andreas, VIII. 24.

Q.

QUadrus, Joannes Ludovicus, X. 38.
Quartaironius, Dominicus, X. 7.

R.

RAbuel, Claudius IV. 7.
de *Ramellis*, Augustinus, VI. 2.
Ramus, Petrus, III. 5. VII. 14.
Ranzovius, Henricus, IX. 58.
Raphson, Josephus, IV. 12. 35.
de *Rees*, K. F. II. 14.
Regiomontanus, Joannes, V. 2. 14. IX. 2. 11. 24. 25.
Reidius, I. 56.
Reinholdus, Erasmus, III. 38. IX. 26.
Rembold, Johannes Christophorus, VIII. 23.
Renau, X. 21.
Reyherus, Samuel, II. 18.
Reyneau, Carolus, IV. 25.
Rheticus, Georgius Joachimus, V. 3. IX. 39.
Rhodius, Ambrosius, VIII. 4.
Riccatus, Jacobus, I. 40.
Ricciolus, Joannes Baptista, IX. 5. 22. 28. 32. 39. X. 4. 10. 11.
Riccius, Michaël Angelus, IV. 21.
Richardus, Claudius, III. 13.
Richerus, I. 37.
Rimpler, Georgius, XIII. 10. & seqq.
Risnerus, Fridericus, VIII. 2. 3.
Rivius, Gualterus H. XI. 2.
Rizettus, Joannes, I. 40.

Rober-

Robervallius, Ægidius Perſonerus, I. 31. 37. IV. 8.
Robins, Benjamin, VII. 12.
Rœmerus, Olaus, I. 37. VII. 10. IX. 50. 51. 54.
Rohault, Jacobus, VI. 2.
Rolle, IV. 13.
Romanus, Adrianus, I. 25.
Ronayne, IV. 32.
Rondelli, Geminianus, V. 15.
Roſetti, Donatus, XIII. 7. 20.
de *Roſſi*, Dominicus, XI. 12.
Roſtius, Joannes Ludovicus, IX. 45.
Rothmannus, Chriſtophorus, IX. 2.
Rozard, XIII. 23.
Rudolphus, Chriſtophorus, IV. 3.
Ruggieri, Ferdinandus, XI. 20.
de *Ruſenſtein*, Henricus Rufius Baro, XIII. 3.

S.

SAccherius, Hieronymus, III. 9.
de *Saint Julien*, Chevalier, XII. 5. 7. XIII. 24. 27.
Salmaſius, Claudius, XI. 1.
Santini, Vincentius, III. 16.
Sardius, XIII. 27.
Scaliger, Joſephus, I. 24. X. 1.
Scamozzi, Vincentius, XI. 8. 9.
Scarlet, Eduardus, VIII. 15.
Scheffelt, Michaël, III. 39.
Scheinerus, Chriſtophorus, VIII. 11. IX. 39.
Scheiter, Joannes Bernhardus, XIII. 8. 27.
Scheubelius, Joannes, III. 3.
Scheubler, Joannes Jacobus, X. 34.
Schickardus, Wilhelmus, IX. 2. 35.
Schildknecht, Wendelinus, XIII. 16.
Schmidius, Joannes Andreas, III. 6.
Schonerus, Joannes, III. 5. V. 2. IX. 25. 35. 37. 46. 58.
Andreas, IX. 46.
à *Schooten*, Franciſcus, III. 25. IV. 6. 7. 14.
Schottus, Caſparus, I. 2. 41. II. 12. III. 40. VI. 28. 29. VII. 16. IX. 48.
Schreckenfuchſius, Eraſmus Oſwaldus, IX. 24.
Schvventerus, Daniel, I. 42. III. 31.
Schyrlæus de Rheita, Antonius Maria, IX. 42.
Scipio Ferreus, IV. 3.
Serenus, III. 13.
Sererius, Joſephus, I. 13. 20.
Serlius, Sebaſtianus, XI. 4.
le *Seur*, Thomas, VI. 16.
Seyler, Joannes Chriſtianus, XI. 9.
Sharpius, Abrahamus, III. 35. IX. 7.
Simienovvitz, Caſimirus, XII. 1.
Sluſius, Renatus, IV. 8.
Smith, Jacobus, XI. 2. 3.
Robertus, IV. 30. VIII. 26.
Snellius, Willebrordus, I. 1. III. 21. V. 6. VIII. 7. IX. 2. 19. 23.
Speckle, Daniel, XIII. 13.
Stadius, Joannes, IX. 55.
Stengel, Johannes Peterſon, X. 32.
Stephanus de Angelis, III. 24.
Stevinus, Simon, I. 23. VI. 2. 3. VII. 14.
Stifelius, Michaël, II. 7. IV. 3. V. 14.
Stirling, Jacobus, IV. 26. 28.
Stone, Edmondus, IV. 19.
Strada, Jacobus, VI. 20. XI. 4.
Strauchius, Ægidius, IX. 35. X. 5.
Streete, Carolus, IX. 28.
Thomas, IX. 20.
Sturmius, Joannes Chriſtophorus, I. 9. III. 11. X. 30. XIII. 22.
Sturmius, Leonhardus Chriſtophorus, I. 10. III. 38. VII. 19. X. 13. XI. 7. 11. 21. XIII. 5. 10. 27.
Sully, Henricus, VI. 27.
Surirey de St. Remy, XII. 3.
Sutherland, Wilhelmus, XI. 28.
Süttinger, Daniel, XIII. 10.
Svvizer, Stephanus, VII. 16.

T.

TAcquet, Andreas, I. 28. II. 11. III. 2. 11. 33. VIII. 14. IX. 15. 38.
Tartaglia, Nicolaus, II. 8. III. 2.
Tatius, Achilles, X. 2.
Taylor, Jacobus, I. 8.
Brook, IV. 31.
Teyler, Joannes, XIII. 33.

Theo-

Theodosius, I. 1. 4. 24. III. 11. 29. VII. 14.
Torricellius, Evangelista, I. 31. 37. III. 12. VI. 5.
Traberus, Zacharias, VIII. 16.
Trapezuntius, Georgius, IX. 10.
Trevigar, L. IV. 39.
Trevv, Abdias, III. 32.
de *Tschirnhausen*, Ehrenfried Waltherus, IV. 12.
Tycho de Brahe, IX. 2. 27. 32. 47.

V.

VAlk, Gerardus, IX. 37.
Varcinus, Amatus, I. 4.
Varenius, Bernhardus, X. 12.
Varignonius, IV. 19. VI. 3. 4. 14. VII. 11.
de *Vauban*, Comes, XIII. 5. 17. 23. 26. 27. 32..
Ubaldus, Guidus, VI. 2. VII. 14.
de la Vergne, Jacobus, XIII. 21.
Veteranus, Simon Laurentius, I. 28.
Victoria, X. 2.
Vieta, Franciscus, I. 1. 24. 25. IV. 4. 9. X. 7.
Vignola, Jacobus Barozzius, XI. 7. 9. 10.
de *Ville*, Antonius, XIII. 17. 27.
Villemot, Philippus, IX. 16.
Vingboon, Philippus, XI. 16.
Virdungus, Joannes, IX. 25.
Vitalis, Hieronymus, I. 16.
Vitellio, I. 31. VIII. 3.
Vitruvius, XI. 1. 10.
Viviani, Vincentius, I. 33. III. 13. 22. 26.
Vlacq, Adrianus, V. 11. 21.
Ulugh Beigh, IX. 32.
Vogel, Johannes, XI. 23.
Voigtel, Nicolaus, III. 38.
Ursinus, Benjamin, V. 9.
Uttenhoeffer, Casparus, X. 34.

W.

WAller, Richardus, X. 24.
Wallisius, Joannes, I. 34. II. 12. IV. 17. 18. VI. 7. 8. VII. 5.
Waltherus, Bernhardus, IX. 2. 25.
Wardus, Joannes, X. 18.
Sethus, V. 16. IX. 18. 19. 20.
Warnerus, Waltherus, IV. 5.
Weidlerus, Joannes Fridericus, III. 38.
Weigelius, Ethardus, X. 7. 10.
Weinig, Joannes Christophorus, VII. 2.
Wells, Eduardus, II. 12.
Welperus, Eberhardus, X. 29. 30.
Wernerus, Joannes, IX. 2. 25.
Wertmüller, Johannes Jacobus, XIII. 29.
Whiston, Guilielmus, III. 2. IV. 12. IX. 23. 28.
Wideburgius, Joannes Bernhardus, IX. 43.
Wilhelm, Joannes, XI. 23.
Wilhelmus, Landgravius Hassiæ, IX. 2.
Willichius, Jodocus, II. 2.
Wilson, Henricus, III. 33. V. 16. X. 16.
Wing, Vincentius, IX. 2. 10.
de *Witt*, Joannes, IV. 6. IX. 38.
Wolfius, Christianus, I. 11. II. 13. III. 10. VII. 7.
Jeremias, XI. 21.
Wormbser, David, XIII. 19.
Wotton, Henricus, XI. 1.
Wren, Christophorus, VI. 7.
Wurstisius, Christianus, IX. 24.
a *Wurtzelbauer*, Joannes Philippus, IX. 49.

X.

XYlander, Guilielmus, II. 2. IV. 2. 3.

Z.

ZAhn, Joannes, VIII. 16.
Zanottus, Franciscus Maria, I. 40.
a *Zesen*, Philippus, XIII. 28.
Zimmermann, Joannes Jacobus, IX. 29. 41. 43.
Zumbach de Kœsfeld, Lotharius, IX. 36.
van Zyl, Joannes, IV. 23.

FINIS INDICIS TERTII.

IV. IN-



IV.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO I. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *c* Commentationem de methodo mathematica, *a* Arithmeticam, *g* Geometriam, *t* Trigonometriam planam, *f* Analysin finitorum, *i* Analysin infinitorum; & numeros §§. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime præcedentem.

A.

Abaci Pythagorici constructio, *a.* 109. necessitas, 110.
Abscissa, *f.* 37.
Additio. Definitio, *a.* 61. quomodo absolvatur, 96. 98. in numeris concretis, 99. examen, 101. 107. hujus fundamentum, 103. signum, 63. quomodo addiscatur, 97.
Additio iterata ejusdem numeri quid sit, *a.* 62.
Æqualitas. Definitio, *a.* 15. signum, 18. 19. unde colligatur, 87. 88. 91. 93. 94. 175. 176. 177.
Æqualitas angulorum unde colligatur, *g.* 167.
Æquatio. Definitio, *f.* 133. natura explicata, 329. reductio per analogias, 259. 266. 268. 289. transformatio in aliam, 354. in locales resolutio, 620.
Æquatio algebraica quænam dicatur, *f.* 378.
Æquatio biquadratica quomodo construatur, 616. & *seqq.* 622. quomodo resolvatur, 362. quomodo ad cubicam reducatur, 361.
Æquatio Circulorum superiorum generalis, 517.
Æquatio Cissoidis, 548.
Conchoidis, 538.
Æquatio cubica. Definitio, 139. quomodo resolvatur, 358. quomodo construatur, 607. & *seqq.* 622.
Æquatio Ellipsis, 420. 431. 432. 454.
evolutæ quomodo inveniatur, *i.* 321.
exponentialis. Definitio, 270.
Æquatio hyperbolæ respectu axis, *f.* 459. & *seqq.* 534. intra asymptotos, 488. 490. respectu diametri, 500, 502.

Æquatio hyperbolarum infinitarum, *f.* 425.
Æquatio parabolæ externæ, 419. internæ respectu axis, 388. respectu diametri, 416.
Æquatio parabolarum infinitarum, 519.
Æquatio simplex. Definitio, 138. constructio geometrica, 252.
Æquatio quadratica. Definitio, 139. constructio geometrica, 253. reductio ad inventionem linearum reciprocarum, 263. 265.
Æquationum superiorum constructio geometrica, 605. *& seqq.*
Æquemultiplicium proportio, *a.* 219.
ex *Æquo proportionalia*, 194. 198.
Aggregatum. Definitio, 61.
Algebra. Definitio, *f.* 132. applicatio ad problemata arithmetica determinata, 144. *& seqq.* indeterminata, 223. *& seqq.* ad Geometriam elementarem, 250. *& seqq.* sublimiorem, 367. *& seqq.* Trigonometriam planam, 316.
Alternatio rationum, *a.* 173.
Altitudo figuræ. Definitio, *g.* 115. qualis linea sit, 227.
Altitudo oblongi, 229.
quadrati, 229.
Altitudo trianguli quomodo inveniatur, 394. quomodo ex lateribus computetur, 287.
Altitudo trianguli rectanguli, 228.
Altitudines, quomodo metiamur, *g.* 284. *& seqq.* *t.* 75. 83.
Anagrammata omnia possibilia detegendi modus, *f.* 131.
Analysis mathematica. Definitio, *f.* 1.
Analyseos perfectæ exemplum, *a.* 84. 85.
Angulus. Definitio, *g.* 54. quomodo denominetur, 55. describatur, 155. alteri æqualis construatur, 208. metiendi modus, 152. bisectio 209. 269. 270. trisectio, *f.* 629. quantitas a cruribus independens, *g.* 140. quomodo hæc æstimetur, 58. 59.
Anguli quomodo distinguantur, *g.* 58. quomodo in figura rectilinea per calculum eruantur, *t.* 54.
Angulorum æqualitas und[illegible]gatur, *g.* 141. 142.
Angulorum æqualium quales sint mensuræ, *ibid.*
Angulorum circa idem punctum constitutorum ratio ad rectum, 159. 160.
Angulorum congruentia, 166.
similium ratio, 174.
Angulus acutus. Definitio, *g.* 66. relatio ad rectum, 146.
Anguli alterni. Definitio, *g.* 68. ratio intra parallelas, 233.
Anguli contigui. Definitio, *g.* 60.
Angulus contactus. Definitio, 76. qualis sit, 305. 306.
Angulus deinceps positus. Definitio, 62. qualis sit, 63. 64. quando in campo eum metiri teneamur, 150. 151.
Angulorum deinceps positorum ratio ad rectum, 147. quot iidem sint graduum, 148.
Angulus ad centrum. Definitio, *g.* 72. qualis sit, 73. ratio ad angulum ad peripheriam, 313.
Angulus extra centrum. Definitio, 74. 75. mensura, 315.
Anguli homologi. Definitio, *g.* 110.
Angulus obliquus. Definitio, 66.
Angulus obtusus. Definitio, 66. relatio ad rectum, 146.
Angulorum obtusorum sinus, *t.* 6.
Anguli oppositi. Definitio, *g.* 69.
oppositus externus, ibid.
internus, ibid.
Angulus ad peripheriam. Definitio, *g.* 70. Mensura, 314.
Anguli ad peripheriam quando æquales, 315.
Angulorum in polygono summa quomodo inveniatur, 343.
Angulorum in polygono regulari quantitates, 345. quomodo inveniantur, 344. 349.
Angulus segmenti. Definitio, *g.* 77.
Anguli majoris segmenti mensura, 323.

Anguli minoris segmenti mensura, *g.* 322.
Angulus in segmento. Definitio, *g.* 70.
Angulus in majore segmento qualis, 318. ratio ad angulum majoris segmenti, 323.
Angulus in minore segmento qualis, 319. ratio ad angulum minoris segmenti, 323.
Angulus in semicirculo qualis, 317.
Angulus rectus. Definitio, *g.* 65. mensura qualis, 143. 144.
Anguli recti quando æquales, 145.
Angulus solidus. Definitio, 445. 448. proprietates, 446. *& seqq.* æqualitas, 449. similitudo, 451. magnitudo, 452.
Anguli verticales. Definitio, *g.* 67. ratio ad se invicem, 156.
Annuli area quomodo inveniatur, 433.
Antecedens rationis, *a.* 126.
Antilogarithmus, *t.* 31.
Arcus. Definitio, *g.* 41. quomodo bisecetur, 293. perficiatur, 295. trisecetur, *f.* 629. per datum numerum multiplicetur, 326. in communi mensura per calculum inveniatur, *t.* 49.
Arearum ichnographiæ quomodo perficiendæ, *g.* 363. *& seqq.*
Areæ curvæ elementum, *i.* 99.
Arithmetica. Definitio, *a.* 1.
Arithmetica practica. Definitio, *a.* 1. an sit methodus inveniendi, 2.
Arithmetica infinitorum. Definitio, *i.* 333. usus in Geometria, 348. *& seqq.*
Arithmetica irrationalium. f. 59. *& seqq.*
Arithmetica speciosa. Definitio, *f.* 2.
Arithmetice proportionalia. Definitio, *a.* 323. proprietates, 324. *& seqq.*
Artis characteristicæ præstantia, *a.* 52.
Artis inveniendi regulæ ab Algorithmo abstractæ, *a.* 125.
Asymptotus Cissoidis, *f.* 549.
Conchoidis, 537.
Asymptoti Hyperbolæ. Definitio, 474.
Asymptoti curvarum algebraicarum quomodo determinentur, *t.* 46.
Atramentum in Geometria practica quale commendandum, *g.* 124.
Axioma. Definitio, *c.* 30. quænam propositiones in hunc numerum referantur, 31. abusus circa ea vitandus, 32. quomodo numerus minuatur, 33. quænam cum axiomatis confundantur, 34.
Axiomata mathematica, *a.* 81.
Axis conjugatus. Definitio, *f.* 461.
Axis sphæræ, *g.* 470.
Axis transversus. Definitio, *f.* 459.

B.

Baculi quomodo in linea recta terræ infigantur, *g.* 125.
Basis figuræ. Definitio, 112. 113.
Binomium quomodo ad dignitatem quamcunque evehendum, *f.* 95. *& seqq.*
Biquadratum. Definitio, *a.* 252.

C.

Calculus differentialis. Definitio, *i.* 1. regulæ, 10. *& seqq.*, usus in determinandis tangentibus, 20. *& seqq.* in determinandis maximis & minimis, 61. *& seqq.*
Calculus differentio-differentialis. Definitio, *i.* 293. usus in determinandis evolutis curvarum & radio osculi, 313. *& seqq.* item puncto flexus contrarii, 301. *& seqq.*
Calculus exponentialis. Definitio, *i.* 263. regulæ, 266. 267. usus, 271. *& seqq.*
Calculus integralis. Definitio, *i.* 91. usus in quadrandis curvis, 97. *& seqq.* in rectificatione curvarum, 143. *& seqq.* in cubandis solidis, 196. *& seqq.* in doctrina Logarithmorum, 255. in methodo tangentium inversa, 72. *& seqq.*
Calculus literalis in integris, *f.* 27. *& seqq.* in fractis, 41. *& seqq.* pro potentiis, 54. *& seqq.* usus in inveniendis theorematis, 72. *& seqq.*
Calculus potentiarum, *f.* 54. *& seqq.*
Calculus summatorius. Definitio, *i.* 91.
Calculi universalis idea, *a.* 95.
Cathetus. Definitio, *g.* 96.
Centrum. Definitio, *g.* 37.
Centrum Hyperbolæ. Definitio, *f.* 461.

Centrum sphæræ, g. 470.
Chorda. Definitio, g. 38. quænam maxima, 299. quomodo ex arcu inveniatur, 171. quomodo ex alia Chorda data, i. 184.
Chordarum proprietates, f. 310. & seqq. relatio ad se invicem, g. 301. in circulo ductarum proprietates & symptomata, 289. 290. 291. 292. 298. 312. se mutuo secantium proprietates, 334. 381.
Chorda arcus dimidii quomodo inveniatur, g. 423.
Chordæ arcuum multiplorum quomodo inveniantur, f. 326.
Circinus qualis esse debeat, g. 133.
Circulus. Definitio, g. 37. descriptio, 131. 132. 294. per quæ determinetur, 294. quando alterum secet, 197.
Circuli ad triangulum sibi æquale reductio, g. 410. subtangens, i. 23. subnormalis quomodo determinetur, 38. rectificatio, 153. 157. 158. quadratura, 124. area quomodo inveniatur, g. 419. & seqq.
Circulo quomodo quadratum circumscribatur, g. 351. quomodo polygonum regulare, 335.
Circuli concentrici. Definitio, g. 44. symptomata, 137.
Circuli eccentrici. Definitio, g. 44. quinam sint, 49. 287. 288.
Circuli se extus tangentes quales sint, g. 49.
Circuli se intus tangentes quales sint, 287.
Circuli se mutuo secantes quales sint, 288.
Circuli superiorum generum. Definitio, f. 516. æquatio, 517.
Circulorum æqualitas unde colligatur, g. 171.
Circulorum congruentia unde colligatur, g. 164. 296.
Circulorum ratio ad se invicem, 409. 412.
Circulorum sectio, 203.
symptomata, 287. & seqq.
Circulorum infinitorum maxima applicata, i. 65. subtangens, 24. subnormalis, 39.
Cissois Dioclis. Definitio, f. 54[illegible]. æquatio, 548. genus, 550. pr[illegible]tates, 545. & seqq. subtangens, i. 31. subnormalis, 43. quadratura, 133.
Citationum usus in demonstrando, c. 44.
Combinationes omnes possibiles quomodo inveniantur, f. 220.
Combinationum numerus quomodo inveniatur, 219.
Commensurabilia. Definitio, a. 31. quænam sint, 160. ratio ad se invicem, 163. 164. rationis exponens, 166.
Communicantia irrationalia, f. 63.
Complementum ad totum quid dicatur, a. 9.
Compositio rationum, 190.
Compræsentia quid significet, 27.
Conchilis, f. 535.
Conchois Nicomedis *prima* & *secunda.* Definitio, f. 535. æquatio, 538. proprietates, 536. 537. punctum flexus contrarii, i. 310. quadratura, 138. subtangens, 49. subnormalis, 49.
Conchoidum species, f. 540. 543.
Conchoides infinitæ, 541.
Congruentia Definitio, g. 3. quid sit, 161.
Congruentia angulorum, 166. linearum, 163. magnitudinum, 162.
Conoides parabolicum quomodo cubetur, i. 202. 214. 352. quomodo superficies ejus complanetur, 223.
Conoidis hyperbolici cubatio, i. 208. 209.
Conus. Definitio, g. 467. proprietas, 468. constructio, 523. ad prisma reductio, 547. quomodo soliditas inveniatur & superficies, g. 548. i. 199. 220. 351. quomodo superficies ad triangulum, g. 519. ad sectorem reducatur, 520.
Conus rectus. Definitio, g. 467.
scalenus. Definitio, g. ibid.
Coni truncati constructio, 524. soliditas & superficies computanda, 549.
Coni superiorum generum. Definitio, f. 527.
Conorum æqualitas unde colligatur, g. 542. ratio ad se invicem, 572. & seqq.

Cono-

Conorum æqualium proprietas, g. 580. quinam ma[illegible]am superficiem habeat, *i*. 87.
Conorum sim[illegible] ratio, 570. 578.
Consequens rationis terminus, *a*. 126.
Contraharmonice proportionalium inventio, *f*. 194. 195.
Convergentia linearum. Definitio, *g*. 83. proprietas, 261.
Conversio rationum, *a*. 193.
Corollarium. Definitio, *c*. 49. quando demonstratione indigeat, 50.
Corpora Platonica, *g*. 454.
Corpus. Definitio, *g*. 444. quomodo construatur, 529. quomodo soliditas inveniatur, 559.
Corporis cavi soliditas quomodo inveniatur, *g*. 563.
Corpus irregulare. Definitio, 453. quomodo soliditas inveniatur, 559. 561.
Corpus regulare. Definitio, 453. proprietas, 455. quomodo soliditas ac superficies inveniatur, 558. *& seqq.* quomodo hæc corpora construantur, 525. *& seqq.* quot eorum sint, 530.
Corporum similium proprietates, *g*. 565. *& seqq.* ratio inter se, 578. *f*. 128.
Cosecans. Definitio, *t*. 11.
Cosinus. Definitio, *t*. 11. quomodo inveniatur, 16. angulorum multiplorum quomodo inveniatur, *f*. 325.
Cotangens. Definitio, *t*. 11.
Crus anguli. Definitio, *g*. 54.
Cubatio solidorum rotatione genitorum, *i*. 197.
Cubus, *cubicus numerus*. Definitio, *a*. 248. logarithmus qualis, 339. quomodo in progressionem arithmeticam resolvatur, *f*. 171.
Cubicorum numerorum in serie naturali progredientium differentiæ, *f*. 84. summatio, 200.
Cubocubus, *a*. 252.
Cubus cubi, ibid.
Cubocubocubus, ibid.
Cubus, solidum. Definitio, *g*. 459. proprietates *g*. 460. 461. quale corpus, 530. constructio, 513. quomodo superficies & soliditas inveniatur, 531. 532. quomodo dato corpori æqualis inveniatur, 576. parallelepipedo æqualis construatur, *f*. 628.
Cubi duplicatio, *f*. 625.
Cuborum ratio inter se qualis, *g*. 534.
Cubi diametri ad sphæram ratio, 552.
Curva. Definitio, *g*. 22. quadratura, *i*. 100. *& seqq.*
Curva algebraica. Definitio, *f*. 377. divisio, 381. 382. quomodo natura investigetur, 579. *& seqq.* puncta quotcunque inveniantur, 631.
Curvarum algebraicarum æquatio generalis, *f*. 385. subtangens, *i*. 32.
Curva primi, *secundi*, *tertii* &c. *generis*. Definitio, *f*. 381.
Curva ex evolutione descripta, *i*. 313.
Curva exponentialis. Definitio, *i*. 269. constructio, 268. quadratura, 285. subtangens, 271. *& seqq.* subnormalis quomodo inveniatur, 283.
Curva mechanica. Definitio, *f*. 381.
Curva normalis constantis, *i*. 235.
subnormalis constantis, 227.
subtangentis constantis, 242.
tangentis constantis, 250.
Curva transcendens. Definitio, *f*. 380.
Cyclois. Definitio, *f*. 573. proprietates, *f*. 574. *& seqq.* quadratura, *i*. 131. 132. 181. rectificatio, 168. subtangens, 52. circulus eam osculans, 328. sui evolutione seipsam describit, 330.
Cyclois punctum flexus contrarii habens, 304.
Cylindrus. Definitio, *g*. 465. constructio, 518. quomodo superficies & soliditas inveniatur, 541. superficiei ad parallelogrammum reductio, 516.
Cylindrorum æqualitas unde colligatur, 535. ratio inter se, 572. *& seqq.*
Cylindrorum æqualium proprietas, 580.
similium ratio, 570. 578.

Cylindrus rectus, *g.* 465.
scalenus, 465.

D.

DEcagoni regularis circulo inscribendi latus quomodo inveniatur, *f.* 275.
Definitio quid sit, *c.* 13. quomodo dividatur, 16. quotuplici modo consideretur, 30.
Definitiones superfluæ num dentur in Mathesi, 56.
Definitio nominalis quænam sit, *c.* 17. quomodo ad eam perveniatur, 19. *& seqq.* quomodo realitas demonstretur, 23. 24.
Definitio realis quænam sit, 18. quomodo inveniatur, 25. *& seqq.* quomodo possibilitas demonstretur, 29.
Demonstratio quam habere debeat formam, *c.* 46. 47. quænam circa eam observanda, 39. *& seqq.*
Demonstrationes quomodo tyronibus facilitentur, *g.* 158. num superfluæ dentur in Mathesi, *c.* 56.
Denominator rationis. Definitio, *a.* 36. *f.* 113. num. 117. & quando cum exponente idem, 115.
Determinari eodem modo quænam dicantur, *g.* 119.
Diagonalis. Definitio, *g.* 111. in quadrato quomodo se habeat ad latus, 421. in polygono quocunque quomodo omnis inveniatur per calculum, *t.* 51. 53.
Diameter circuli. Definitio, *g.* 39. quomodo circulum dividat, 135. quomodo inveniatur, 328. 434. quam rationem ad peripheriam habeat, 413. 414. quomodo inveniatur, 425. quanta sit, 426. 427.
Diameter curvæ. Definitio, *f.* 368. quomodo in Parabola, 414. 415. in Ellipsi, 449. 450. 452. in Hyperbola determinetur, 492. 493.
Diameter conjugata. Definitio, *f.* 374.
transversa. Definitio, *f.* 373.
Differentia. Definitio, *a.* 64.
Differentiales, *t.* 31.
Differentiale. Definitio, *i.* 6. signum, 8. gradus, 296. quomodo integretur, 95. quomodo denuo differentietur, 267. *& seqq.*
Differentiale areæ. Definitio, *i.* 97. arcus, 144.
Differentiale exponentiale quomodo integretur, *i.* 267.
Digitus. Definitio, *g.* 25.
cubicus, Definitio, *g.* 477.
quadratus. Definitio, *g.* 118.
Dignitas. Definitio, *a.* 250. gradus, 252. signa, 254.
Dissimilitudo. Definitio, *a.* 24.
Distantia. Definitio, *g.* 15. exemplum, 16. puncti a linea & plano, 225. puncti a puncto in plano 192. punctorum peripheriæ a centro circuli, 193.
Distantiæ locorum quomodo inveniantur, *g.* 194. 195. 228. *& seqq.* *t.* 56. 65. 74.
Divergentia linearum. Definitio, *g.* 83. proprietas, 261.
Dividendus. Definitio, *a.* 69.
Divisio. Definitio, *a.* 69. signum, 71. examen, 124. regulæ, 117. 119. 120.
Divisio ejusdem per majus & minus, 202. majoris & minoris per idem, 182.
Divisio rationum, 193.
Divisor. Definitio, 69.
Dodecaëdrum. Definitio, *g.* 475. constructio, 528. quale corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 310. quomodo latus sphæræ inscribendi inveniatur, 308. hujus ratio ad radium, 314.
Dolii soliditatem in mensura fluidorum reperire, *g.* 588. *& seqq.*
DURERI *curva fornicum* qualis sit, *f.* 601.

E.

EFficientes. Definitio, *a.* 66.
Elementum areæ, *i.* 98.
lineæ curvæ, 144.
solidi rotatione geniti, 197.
superficiei ejusdem, 219.
Ellipsis. Definitio, *f.* 420. descriptio, 426. 435. 436. 515. 594. 598. 600. proprietates,

tates, *f.* 421. *& seqq.* quod sit sectio conica, 5[illegible] maxima applicata, *i.* 66. osculator [illegible]lus, 325. quadratura, 126. *& seqq.* rectificatio, 172. subtangens, 25.

Ellipsis Apolloniana, *f.* 522.

Ellipses infinitæ. Definitio, *f.* 522. maxima applicata, *i.* 66. subnormalis, 40. subtangens, 26.

Elliptoides. Definitio, *f.* 522.

cubicales, ibid.

biquadraticæ, ibid.

Epicyclois. Definitio, *f.* 576.

superior, ibid.

inferior, ibid.

Error in metiendis altitudinibus admissus quomodo æstimetur, *t.* 76. *& seqq.* in metiendis distantiis admissus quomodo æstimandus, 58. *& seqq.* 66. *& seqq.*

Evoluta, *i.* 313.

Examen quomodo differat a demonstratione, *a.* 102.

Examen additionis, *a.* 101. *& seqq.*

subtractionis, 106. 107.

multiplicationis, 122.

divisionis, 124.

extractionis radicum, 289.

angulorum rite dimensorum, *g.* 151.

Experientia quid sit, *c.* 34. ejus objectum, 35. quomodo Mathematici circa eam versentur, 36. 37.

Exponens dignitatis. Definitio, *a.* 251.

Exponens rationis. Definitio, *a.* 136. quando sit terminus primus, 138. quomodo se habeat ad unitatem, 140. quomodo exprimatur, 141.

Exponens rationis potentiarum qualis sit, 290.

Extensionis notio, *g.* 2.

Extractio radicis quadratæ, *a.* 269. *& seqq.*

Extractio radicis cubicæ, *a.* 282. *& seqq.*

Extractio radicis ex dignitate. Definitio, 256.

Extractio radicis ex linea recta, *g.* 331.

Extractio radicis ex æquatione quadratica, *f.* 143. cubica, 358. biquadratica, 362. quacunque per approximationem, 363. *& seqq.* ex serie infinita, 366.

Extractio radicis indeterminatæ, 98. *& seqq.*

F.

F*Actum.* Definitio, *a.* 66. ex quoto in divisorem, 212.

Facta quales numeri, 211.

æqualium factorum, 201. 208.

Facti Logarithmus, 337.

Factores. Definitio, 66.

Factorum & efficientium quando eadem ratio, 178.

Familia curvarum. Definitio, *f.* 383.

Figura. Definitio, *g.* 32. 33. in campo designatio, 369.

Figura æquiangula, 105.

æquilatera, 88.

circulo inscripta, 116.

circulo circumscripta, 117.

curvilinea, 37.

Figura irregularis. Definitio, 106. constructio, 359. 360. 361.

Figura mixtilinea, 34.

multilatera, 104.

obliquangula, 97.

plana, 36.

Figura polygona, 104.

quadrilatera, 97.

Figura rectilinea. Definitio, 34. divisio in partes æquales, 441.

Figura regularis. Definitio, 106. proprietates, 348. 401. quomodo circulo inscribatur, 342.

Figura rectangula, 97.

Figuræ congruentes quales sint, 177.

Figuræ inter se æquiangulæ, 109.

æquilateræ, 108.

Figuræ similes quales sint, 175. 176. earum ratio, 406. circulo inscriptarum & circumscriptarum ratio, 408.

Fluidi quantitatem in dolio non pleno determinare, 600.

Fluxio. Definitio, *i.* 6. signum, 9.

Focus. Definitio, *f.* 395.

Focus Parabolæ, quomodo inveniatur, *f.* 396. *& seqq.* proprietates, 418.
Focus Ellipsis quomodo inveniatur, 463. proprietates, 434. 457. 458.
Focus Hyperbolæ quomodo inveniatur, 463. proprietates, 464. 465. 470. 503. 504.
Fractio. Definitio, *a.* 38. scriptio, 59. 60. quando integro major, minor, eidem æqualis, 221. quænam major, minor altera, 225. quomodo ad minores terminos reducatur, 231. *& seqq.* quomodo ad eandem denominationem, 235. quomodo in aliam datæ denominationis convertatur, 303.
Fractionis Logarithmus quomodo inveniatur, 351. *& seqq.* quomodo valor ad communem mensuram reducatur, 304.
Fractiones quænam æquales, *a.* 225. quod sint rationes, 129.
Fractionum algorithmus, 236. 237. 239. *& seqq.* 243. identitas unde colligatur, 226. reductio ad alias æquales, 227. in infinitum certa lege decrescentium summa quomodo inveniatur, *i.* 334.
Fractio decimalis. Definitio, *a.* 361. scriptio, 306. 364. 365. logarithmus quomodo inveniatur, 366. 368. quomodo alia ad eam reducatur, 305.
Fractio decimalis exacta. Definitio, 370.
Fractio decimalis approximans. Definitio, 370.
Fractionum decimalium algorithmus, 373. *& seqq.*
Fractiones sexagesimales. Definitio, 385. algorithmus, 391. *& seqq.* quomodo scribantur, 387.
Fractio spuria quænam dicatur, 222. quomodo ad integra reducatur, 223.

G.

Geometria. Definitio, *g.* 1.
sublimior. Definitio, *f.* 367.
Geometrice proportionalia quænam dicantur, *a.* 323.
Gradus. Definitio, *g.* 41. inæqualitas in circulis inæqualibus, 42.

H.

Harmonica proportio. Definitio, *f.* 186. *Harmonice proportionalium* inventio, 187. *& seqq.*
Helix, *f.* 569.
Heptagonum. Definitio, *g.* 104.
Heterogenea quænam sint, *a.* 32.
Hexaëdrum. Definitio, *g.* 475. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 304. sphæræ inscribendi latus quomodo inveniatur, 302. hujus ad sphæræ semidiametrum ratio, 314.
Hexagonum. Definitio, *g.* 104.
Hexagonum regulare quomodo construatur, 358. quomodo circulo inscribatur, 357.
Homogenea quænam sint, *a.* 32.
Hyperbola. Definitio, *f.* 459. descriptio, 471. 472. quod sit sectio conica, 513. quadratura, *i.* 120. 123. rectificatio, 175. 179. subtangens, 27. circulus eam osculans, 317. recta ad eam perpendicularis, 74. 75.
Hyperbolæ intra asymptotos constructio, *f.* 489. proprietates, 475. *& seqq.* subtangens, *i.* 29. subnormalis, 42. quadratura, 123.
Hyperbola æquilatera. Definitio, *f.* 505. proprietates, 506. *& seqq.* descriptio, 531. 532.
Hyperbola Apolloniana quænam dicatur, 425.
Hyperbolæ infinitæ. Definitio, *f.* 425. subtangens, *i.* 28. quadratura, 118.
Hyperboloides. Definitio, *f.* 425.
Hypothenusa. Definitio, *g.* 95.

I.

Ichnographia arearum quomodo perficienda, *g.* 363. *& seqq.*
Icosaëdrum. Definitio, *g.* 475. constructio, 527. quale corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 311. sphæræ inscribendi latus quomodo inveniatur, 311. hujus ad semidiametrum sphæræ ratio, 314.

Inæqualia. Definitio, *a.* 15. eorum ad se invicem ratio, 16. 17. 21.
Inclinatio plani ad planum. Definitio, *g.* 476.
Incommensurabilia. Definitio, *a.* 31. ratio ad se invicem, 163. 164. quod dentur, *g.* 422.
In directum situm quid significet, *g.* 61.
Infinitesima. Definitio, *i.* 2.
Infinitinomium quomodo ad dignitatem quamcunque elevetur, *f.* 102. 103. 104.
Insistere quando angulus dicatur, *g.* 56.
Instrumentum transportatorium quodnam & quale sit, *g.* 153. 154.
Instrumenti transportatorii rectilinei constructio, *t.* 42. usus, 43. 44.
Integrorum per fractiones divisio, *a.* 245. ad fractiones reductio, 224.
Inversio rationum, 169.
Irrationalium ad eandem denominationem, *f.* 59. 146. ad simpliciorem expressionem reductio, 61. algorithmus, 67. 68. ratio rationalis quomodo inveniatur, 64.
Judicium quando & quomodo acuatur studio Matheseos, *c.* 53. 54.

L.

L*Amellarum Neperianarum* constructio, *a.* 113. usus, 115.
Latus Coni. Definitio, *g.* 467.
Latus educere ex dignitate quid significet, *a.* 256.
Latus figuræ. Definitio, *g.* 35. quomodo quodlibet in figura rectilinea per calculum eruatur, *t.* 52.
Latus hexagoni regularis quomodo se habeat ad radium circuli circumscripti, *g.* 356.
Latus numeri polygoni. Definitio, *f.* 208. quomodo inveniatur, 213.
Latus pentagoni regularis quomodo ex data diagonali inveniatur, *f.* 294.
Latus polygoni regularis circumscripti quomodo ex latere inscripti inveniatur, *g.* 424.
Latus potentiæ. Definitio, *a.* 252.
Latus quadrati parallelogrammo vel triangulo æqualis quomodo inveniatur, *g.* 395.
Latus rectum. Definitio, *f.* 388.
transversum. Definitio, 459.
Latera homologa quænam dicantur, *g.* 110.
Latera polygonorum regularium in fractionibus decimalibus radii, *g.* 47.
Limites æquationis quomodo inveniantur, *f.* 356.
Linea. Definitio, *g.* 10. termini, 11. proprietas, 12. 13. usus, 14. quænam brevissima inter duo puncta, 191.
Linea, pars digiti, 25.
Linea curva. Definitio, *g.* 22.
Linearum congruentia, 163.
Lineæ convergentes. Definitio, 83. unde convergentia colligatur, 262. 263.
Lineæ divergentes. Definitio, 84. unde divergentia colligatur, 261.
Linea normalis, 78.
obliqua, 80.
Linea parallela. Definitio, *g.* 81. quomodo alteri ducatur, 258.
Linearum parallelarum symptomata, 230. *& seqq.* 238. *& seqq.* 260.
Linea perpendicularis. Definitio, 78. quando sit, 79. quomodo ducatur.
Linearum proportionalium inventio, *g.* 271. *& seqq.* 327. 338. duarum mediarum in continua proportione inventio, *f.* 624. proprietates, *g.* 377. 378.
Lineæ reciprocæ. Definitio, *f.* 261. quomodo inveniantur, 262. *& seq.*
Linea recta. Definitio, *g.* 17. differentia ab alia, 18. quomodo gignatur, 19. ducatur, 121. bisecetur, 210. in partes æquales, 274. proportionales dividatur, 275. quomodo media & extrema ratione secetur, *f.* 258. quomodo eam metiamur, *g.* 126 *& seqq.* quando centro applicata in peripheria terminetur, 173.
Linearum rectarum sectio qualis sit *g.* 250. congruentia, 168. *& seqq.*

Linea recta ad planum perpendicularis. Definitio, 486.
Linea secantium. Definitio, *f.* 562. proprietates, 563.
Linea sinuum. Definitio, 560. proprietates, 561.
Linea tangentium. Definitio, 562. proprietates, 563.
Locus geometricus. Definitio, *f.* 584.
planus, 585.
solidus, 585.
primi, secundi, tertii &c. *ordinis*, 585.
Locus ad circulum. Definitio, 584. constructio, 589.
Locus ad rectam. Definitio, 584. constructio, 586.
Locus ad ellipsin quomodo construatur, 588.
Locus ad hyperbolam quomodo construatur, 590. 591.
Locus ad parabolam quomodo construatur, 587.
Logarithmica. Definitio, *f.* 552. proprietates, 554. *& seqq.* circulus osculator, *i.* 332. quadratura, 134. *& seqq.* 274. *& seqq.* rectificatio, 177. subnormalis, 280. subtangens, 54. 243.
Logarithmi. Definitio, *a.* 334. proprietates, 337. *& seqq.* quomodo fuerint computati, 346. quomodo in Logarithmica, *f.* 555. in Hyperbola, *i.* 256. per arcus tractoriæ repræsententur, 253. quomodo inveniantur, 255. quomodo eisdem respondentes numeri inveniantur, 260. differentiale quomodo integretur, 266.
Logarithmorum Canonis constructio, *a.* 346.
Logarithmus hyperbolicus binarii, *i.* 257.
Logarithmus secantis quomodo inveniatur, *t.* 30.
Logarithmus sinus quomodo inveniatur, *i.* 261. *t.* 28.
Logarithmus tangentis quomodo inveniatur, *t.* 29. *i.* 262.
Logistica speciosa. Definitio, *f.* 2.
Logistica linea. Vide Logarithmica.
Logistici solidi cubatio, *i.* [illegible] *& seqq.*
Logistica spiralis. Definitio, *f.* 557.
Logisticæ spirales infinitæ f. 559.

M.

Magnitudo scalaris. Definitio, *a.* 250.
Majoritas unde colligatur, 89. 90. ejus signum, 22. 23. 204.
Majus. Definitio, *a.* 20.
Mathesis quomodo & quando judicium acuat, *c.* 53. 54.
Maxima chorda in circulo, *i.* 64. *g.* 299.
Maxima vel minima applicata in curvis algebraicis quomodo determinetur, *i.* 63.
Media proportionalis linea quomodo inveniatur, *g.* 327. quomodo inveniantur duæ in proportione continua, *f.* 624.
Medii arithmetici inventio, *a.* 330.
Medius proportionalis numerus quinam dicatur, 156. quomodo inveniatur, 301.
Mensura. Definitio, *g.* 23, 24.
Mensura anguli. Definitio, 57. quo radio describatur, 139.
Mensura anguli ad peripheriam, 314.
extra centrum, 316.
figuræ. Definitio, 118.
Mensura linearum. Definitio, 25. divisio, 26. diversitas in diversis locis, 26. unius ad aliam reductio, 130. ex qua materia fieri debeat, 127. *& seqq.*
Mensura numeri, communis, maxima, communis maxima. Definitio, *a.* 77. 78. communis maxima quomodo inveniatur, 228. 230.
Mensura solidi. Definitio, *g.* 477.
Mesologarithmus, *t.* 31.
Methodus mathematica. Definitio, *c.* 1. cur ita dicatur, 52. forma, 2. 13. 14. 15. ab objectionibus vindicata, 55. *& seqq.*
Methodi tangentium inversæ exempla, 286. *& seqq.*
Methodus de maximis & minimis. Definitio, *i.* 61.
Metiri quid significet in Geometria, *g.* 23.

[redacted]quid in Arithmetica, *a.* 74.
Minuend[redacted]umerus quinam dicatur, *a.* 64.
Minus. De[redacted], *a.* 20. unde colligatur, 89. 90. 206. signum, 22. 23.
Minutiæ physicales, *a.* 385.
Minutum primum, secundum &c. Definitio, *a.* 388.
Minutum primum, secundum &c. *gradus*, *g.* 41. qualis sit fractio, 43.
Miraculosa in definitionibus geometricis admittenda, *g.* 469.
Multa. Definitio, *a.* 7.
Multiplicatio. Definitio, *a.* 66. quid sit, 67. signum, 68. regulæ, 111. 112. 115. 116. examen, 122.
Multiplicandus. Definitio, 66.
Multiplicator, 66.
Multitudo. Definitio, 8.

N.

NOmen rationis, *a.* 136.
Normalis linea. Definitio, *g.* 78.
Normæ constructio & usus, 212. 216. examen, 321.
Notæ numericæ, *a.* 49. 51.
Notæ fractionum decimalium. Definitio, 372.
Notio. Definitio, *c.* 4. differentia, 5. *& seqq.* qualis in definitionibus mathematicis admittatur, 13. *& seqq.*
Notio adæquata. Definitio, *c.* 10. gradus, 11.
Notio clara. Definitio, 6. divisio, 8. 9.
confusa, 9.
distincta. Definitio, 8. divisio, 10. 12.
inadæquata, 12.
obscura, 7.
Numerare quid in Arithmetica significet, *a.* 74.
Numerandi lex, 44. 46.
Numerus. Definitio, 10. *& seqq.* quomodo scriptus enuncietur, 55. quomodo occulte scribatur, 53. 54.
Numeri compositi inter se. Definitio, *a.* 80.
Numeri dati cur in divisione & multiplicatione non debeant esse homogenei, 70.
Numeri heterogenei inter se, 35. 36.
homogenei, 36.
Numeri primi inter se, *a.* 39.
Numerorum nomina, 45. 47. 48. notæ, 49. 51. progressio, 50.
Numerus abstractus quinam, *a.* 34.
angulorum. Definitio, *f.* 208. 209.
compositus, *a.* 76.
concretus, 34.
Numerus cubicus. Definitio, *a.* 248. genesis, 276. *& seqq.* tabulæ horum numerorum quomodo construantur, *f.* 85.
Numerus determinatus, *a.* 13.
effabilis, 39.
fractus, 38.
Numerus heptagonus. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus hexagonus. Definitio, 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus indeterminatus, *a.* 13.
ineffabilis, 43.
Numerus integer. Definitio, 37. quid exprimat, 139. quando radicem perfectam non habeat, 293. 294.
Numerus irrationalis. Definitio, *a.* 43. per lineas expressio, *g.* 420. *f.* 630.
Numerus impar. Definitio, *a.* 72. proprietates & symptomata, *f.* 72. *& seqq.*
Numerus numerans, *a.* 33. 34.
numeratus, 33.
Numerus octogonus. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus par. Definitio, *a.* 72. proprietates & symptomata, *f.* 77. *& seqq.*
Numerus pentagonus. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus perfectus quinam sit & quomodo inveniatur, *f.* 248.
Numerus polygonus. Definitio, 206. quomodo inveniatur, 210. summetur, 212.

Numerus primus in se, 475.
Numerus pronicus Definitio, *f.* 196. quomodo inveniatur, 198.
Numerus pyramidalis primus, secundus &c. triangularis, pentagonalis &c. Definitio *f.* 214. summatio, 216. 217.
Numerus surdus, *a.* 43.
Numerus triangularis. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. summetur, 212.
Numerorum proportionalium symptomata analytice investigata, *f.* 173. *& seqq.*

O.

OBliqua linea. Definitio, *g.* 80.
Oblongum. Definitio, 100. constructio, 339.
Octaëdrum. Definitio, *g.* 475. constructio, 526. quale corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 307. latus sphæræ inscribendi quomodo inveniatur, 305. hujus ad radium ratio, 314.
Octogonum. Definitio, *g.* 104.
Octogoni regularis latus quomodo inveniatur, *f.* 272.
Opponi quænam dicantur, *g.* 85. 86.
Ordinata ratio, *a.* 194.
Ordinatim applicatæ. Definitio, *f.* 370.
Ordo Mathematicorum an jure taxetur, *c.* 57.
Ordo naturæ quinam, 57.
scholæ quinam, 57.
Osculatio curvarum, *i.* 314.

P.

PArabola. Definitio, *f.* 388. constructio, 393. 400. 401. proprietates respectu axis, 390. *& seqq.* respectu diametri, 416. 417. quod sit sectio conica, 511. circulus osculator, *i.* 323. ad eam perpendicularis, 72. 78. quadratura, 103. 104. 107. 349. 350. rectificatio, 146. hujus dependentia a quadratura hyperbolæ, 147. subnormalis, 36. subtangens, 21.
Parabolæ externæ proprietas, *f.* 419.
secundi generis rectificatio, *i.* 150.
Parabola Apolloniana quænam dicatur, *f.* 519.
Parabolæ infinitæ seu *sup[...]um generum.* Definitio, *f.* 519. constructio, 581. 583. circuli osculatores, *i.* 323. quadratura, 105. 106. rectificatio, 152. subnormalis, 37. subtangens, 22. quod sint sectiones conorum superiorum, *f.* 528.
Paraboloides cubicales, biquadraticales, surdesolidales &c. Definitio, *f.* 519.
Parallela linea. Definitio, *g.* 81. quomodo ducatur, 258. symptomata, 255. *& seqq.* 260.
Parallelismi constructio & usus, 258. 259.
Parallelogrammum. Definitio, *g.* 102. bisectio, 439. in partes æquales divisio, 440. proprietates, 335. 337.
Parallelogramma quotnam sint, 336.
Parallelogrammorum ratio, 388. proprietas, 388. æqualitas unde colligatur, 383. 384. 389. similium proprietates, 396 *& seqq.*
Parallelopipedum. Definitio, *g.* 462. proprietates, 463. 464. descriptio in plano, 510. constructio, 514. bisectio, 537. 111. superficies & soliditas quomodo inveniatur, 536.
Parallelopipedorum æqualitas unde colligatur, 535. ratio, 572. *& seqq.* æqualium proprietas, 580. similium ratio, 578.
Parameter. Definitio, *f.* 388.
Pars aliquanta. Definitio, *a.* 30.
Pars aliquota. Definitio, *a.* 30.
Partes. Definitio, *a.* 9. quando similes, 170.
Partium similium ratio ad totum, 170. inter se, 171.
Pennæ optimæ quænam sint, *g.* 123.
Pentagonum. Definitio, 104.
Pentagoni regularis latus circulo inscribendi quomodo inveniatur, *f.* 279.
Perimeter, *g.* 31.
Peripheria circuli, 37. 41.
Permutatio rationum, *a.* 173.

Perpen-

Perpendicularis linea. Definitio, *g.* 78. quomodo dicatur, 210. 212. 216. symptomata & proprietates, 213. *& seqq.* 217. 224.
Perpendicularis ad curvam quanta sit, *i.* 76. 85.
Perpendicularis ad parabolam, 72. 78.
Perpendicularis ad hyperbolam æquilateram, 74.
Perpendicularis ad hyperbolam scalenam, 75.
Pertica cubica, *g.* 477.
quadrata, 118.
Perturbata ratio, *a.* 198.
Pes, *g.* 25.
cubicus, 477.
quadratus, 118.
Planum, *g* 36.
Planum plano parallelum, 498.
ad planum perpendiculare, 494.
Plura. Definitio, *a.* 7.
Polus conchoidis, *f.* 535.
Polygonum. Definitio, *g.* 104.
Polygonum regulare quomodo construatur, *g.* 352. *t.* 48. quomodo circulo inscribatur & circumscribatur, *g.* 353. 355. *t.* 46. quomodo circulus eidem circumscribatur, *g.* 347. ejus ad circulum inscriptum & circumscriptum relatio, 416. proprietas, 407. area quomodo inveniatur, 402. 416.
Polygonorum similium proprietas, *g.* 403. 406.
Polynomium quomodo ad dignitatem quamcunque evehatur, *f.* 101.
Postulatum. Definitio, *c.* 30. quænam propositiones huc referantur, 31.
Potentia. Definitio, *a.* 250. signa, 254. logarithmus, 339. quomodo prodeat, 341. quomodo ex additione numerorum imparium procreetur, *f.* 170. 171.
Potentiarum proportio, 259. 260.
Potentiæ numerorum naturalium quæcunque quomodo summentur, *f.* 203. 205.
Potentia hyperbolæ. Definitio, *f.* 477. quomodo determinetur, 478. *& seqq.*
Potestas. Definitio, *a.* 250. signa, 254.
Practica Italica, *a.* 316. *& seqq.*
Prisma, *rectum*, *obliquum*, *triangulare*, *quadrangulare* &c. Definitio *g.* 456. proprietates, 457. 458. in plano descriptio, 510. constructio, 515. superficies & soliditas quomodo inveniatur, 539.
Prismatum ratio, 572. *& seqq.* æqualitas unde colligatur, 535.
Prismatum æqualium proprietas, 580.
similium ratio, 578.
Prismatis triangularis ad pyramidem reductio, 543. 545. ad parallelopipedum ratio, 538.
Problema quale sit & quibus constet partibus, *c.* 48. quomodo algebraice solvatur, *f.* 141.
Problema Deliacum, *f.* 626.
Problemata arithmetica, *f.* 144. *& seqq.* arithmetica indeterminata, 223. *& seqq.* geometrica 250. *& seqq.* geometrica indeterminata per Algebram soluta, 255. *& seqq.*
Problematis Keppleriani solutio, *i.* 193.
Productum quid dicatur, *a.* 66.
Progressio arithmetica. Definitio, *a.* 333. proprietates, *f.* 106. summa quomodo inveniatur, 107. 108.
Progressionis arithmeticæ problemata per Algebram soluta, *f.* 164. *& seqq.*
Progressio geometrica. Definitio, *a.* 322. proprietates, *f.* 118. *& seqq.* summa quomodo inveniatur, 120.
Progressionis geometricæ problemata per Algebram soluta, *f.* 182. *& seqq.*
Progressionum geometricarum ab unitate incipientium proprietates, *f.* 126.
Proportio. Definitio, *a.* 155.
Proportio æquemultiplicium, 219.
Proportionum regulæ, 301. *& seqq.*
Proportio continua. Definitio, *i.* 156.
contraharmonica, *f.* 193.
discreta, *a.* 156.
Proportionalitas quid sit, *a.* 157.

Proportionales quantitates quænam dicantur, 155.
Propositionis partes, *c.* 39. 40.
Propositiones Elementi II. EUCLIDIS analytice demonstratæ, *f.* 86. *& seqq.*
Punctum. Definitio, *g.* 6. theoria, 7. 8. 9.
Punctum flexus contrarii. Definitio, *i.* 301. quomodo determinetur, 302. 309.
Punctum regressus, 301.
Pyramis. Definitio, *g.* 472. proprietates, 473. 474. in plano descriptio, 512. constructio, 515. 521. ad prisma triangulare reductio, 543. 545. 546. superficies ac soliditas quomodo inveniatur, 548. *i.* 351.
Pyramidum æqualitas unde colligatur, *g.* 542. ratio, 572. *& seqq.*
Pyramidum æqualium proprietas, 580. *similium* ratio, 578.

Q.

Q*Uadratrix* curvæ, *i.* 234.
Quadratrix DINOSTRATIS. Definitio, *f.* 564. subtangens, *i.* 55.
Quadratix Tschirnhusiana, *f.* 566 568.
Quadratorum numerorum in serie naturali differentiæ, *f.* 81. 83. quomodo summentur, 200. quomodo duorum summa in duo alia quadrata dividatur, 230. logarithmus, *a.* 338. Vid. numerus quadratus.
Quadratum. Definitio, *g.* 98. constructio, 338. area quomodo inveniatur, 370. *& seqq.*
Quadratorum ratio ad se invicem, 374. additio, 419.
Quadratiquadratum, *a.* 252.
Quadrato-cubus, ibid.
Quadratocubocubus, ibid.
Quadratoquadratum, ibid.
Quadratoquadratocubus, ibid.
Quadratum Cubi, ibid.
Quadratum surdesolidi, ibid.
Quadrata reciproca quomodo construantur, *f.* 285. 286.
Quadrilateri circulo inscripti proprietas, *g.* 350. *f.* 324.
Quadrilaterorum similium proprietas, *g.* 350.
Quantitas quid sit, *a.* 13. 14. quomodo ad dignitatem evehatur, 255. *f.* 95. quomodo differentietur, *i.* 12. *& seqq.*
Quantitatum signa, *a.* 57. 58.
Quantitatum permutatio quomodo inveniatur, *f.* 129.
Quantitas affirmativa, *f.* 16.
Quantitas constans. Definitio, *f.* 375. signum, 376.
Quantitas exponentialis. Definitio, *i.* 264. signum, 265. constructio, 268.
Quantitas infinite parva. Definitio, 2. quando habeatur pro nulla, 3.
Quantitas nihilo major, *f.* 16.
minor, 16.
Quantitas positiva. Definitio, *f.* 17. quomodo prodeat, 17.
Quantitas privativa. Definitio, 16. quomodo prodeat, 17.
Quantitas variabilis. Definitio, 375. signum, 376.
Quantitates continue æquidifferentes. Definitio, *a.* 322. proprietates, 324. *& seqq.*
Quantitates discretim æquidifferentes. Definitio, *a.* 322. proprietates, 324. *& seqq.*
Quantitates harmonice proportionales. Definitio, *f.* 186. quomodo inveniantur, 187. *& seqq.*
Quantitates incommensurabiles num dentur, *a.* 165.
Quantitates positivæ & privativæ quando se mutuo destruant, *f.* 21. num rationem ad se invicem habeant, 24.
Quantitates privativæ quid sint, 19. 20. num inter se homogeneæ, 23. quod positivis heterogeneæ, 23.
Quartus æquidifferens numerus quomodo inveniatur, *a.* 331.
Quartus proportionalis numerus quomodo inveniatur, 302.
Quotus. Definitio, *a.* 69. logarithmus, 343.

343. ad dividendum ratio, 174. ex divisione ... per factorem unum prodiens, 210. quando numerus rationalis, 161. quando irrationalis, 162. ex divisione radicis per radicem quando numerus integer, 291.
Quoti quando numeris divisis proportionales, *a.* 181.

R.

Radius circuli. Definitio, *g.* 39. eorum æqualitas, 40.
Radius circuli octogono regulari circumscribendi quomodo inveniatur, 274.
Radius circuli decagono regulari circumscribendi quomodo inveniatur, *f.* 278.
Radius circuli parabolam osculantis quomodo inveniatur, *i.* 322.
Radius curvedinis. Definitio, *i.* 314. quomodo determinetur, 320.
Radius evolutæ. Definitio, *i.* 314.
Radius osculi. Definitio, *i.* 314. quomodo determinetur, 320.
Radix binomia. Definitio, *a.* 258.
Radix cubica. Definitio, *a.* 248. ratio ad cubum, 249. quomodo extrahatur, 282. & *seqq.*
Radix multinomia, 258.
polynomia, ibid.
trinomia, ibid.
Radix quadrata. Definitio, *a.* 246. relatio ad quadratum, 247. quomodo extrahatur, 269. & *seqq.*
Radix æquationis. Definitio, *f.* 134. quomodo transmutetur, 333. & *seqq.* quomodo in falsam mutetur, 332.
Radix æquationis vera, 135.
falsa, 136.
imaginaria, 137.
Radix pronica quomodo extrahatur, 199.
Radix ex æquatione biquadratica quomodo extrahatur, *f.* 362.
Radix ex cubica quomodo extrahatur, 355.
Radix ex quacunque per approximationem quomodo extrahatur, 363. & *seqq.*
Radix ex quadratica quomodo extrahatur, 143.
Radix ex dignitate quomodo extrahatur, *a.* 256.
Radix ex serie infinita quomodo extrahatur, *f.* 366.
Radix ex quantitate irrationali composita quomodo extrahatur, 360.
Radices imaginariæ quænam dicantur, 71.
Radices rationales ex æquatione quomodo extrahantur, *f.* 351. & *seqq.*
Radices universales quænam dicantur, 70.
Radicum extrahendarum theorema generale, *f.* 98. & *seqq.*
Radicum signum, *a.* 295.
Radicum imaginariarum algorithmus, *f.* 71.
Radicum quadratarum surdorum ratio, *g.* 420.
Radicum universalium algorithmus, *f.* 70.
Ratio. Definitio, *a.* 126. termini, 126. 127. genera, 130. usus, 132.
Rationum symptomata demonstrata, *a.* 169. & *seqq.* analytice investigata, *f.* 124.
Rationum identitas. Definitio, *a.* 149. 150. natura, 151. designatio, 152. 153. unde colligatur, 168. 177.
Rationum similitudo in quo consistat, 154. unde colligatur, 167.
Ratio æqualitatis. Definitio, 130.
Ratio composita. Definitio, *a.* 159. exponens, 214. quando una alteri æqualis, 218.
Ratio dupla, 142.
duplicata, 159. 216.
inæqualitatis, 131.
inæqualitatis majoris, 132.
Ratio inæqualitatis minoris. Definitio, 132. nomina quomodo inveniantur, 147. memoriæ facile mandentur, 148.
Ratio irrationalis, 134. 135.
Ratio major, 158.
minor, ibid.
multiplex, 142.
multiplex superparticularis, 145.
superpartiens, 146.
multiplicata, 159.

Ratio quadruplicata, 159.
rationalis, 134. 135.
sesquialtera, 143.
sesquitertia, ibid.
subdupla, 142.
subduplicata, 159.
submultiplex, 142.
submultiplex subsuperparticularis, 145.
submultiplex subsuperpartiens, 146.
submultiplicata, 159.
subquadruplicata, 159.
subsesquitertia, 143.
subsesquialtera, ibid.
subsuperparticularis, ibid.
subsuperpartiens, 144.
subsuperparticularis, 143.
subtripla, 142.
subtriplicata, 159.
triplicata, 159. 216.
Ratio summæ numerorum in infinitum certa lege decrescentium ad totidem terminos maximo æquales, *i.* 341. *& seqq.*
Recta. Vid. linea recta.
Rectæ in tres partes continue proportionales divisio, *f.* 603.
Rectangulum. Definitio, *g.* 100. area quomodo inveniatur, 375.
Rectangulorum ratio. 376.
Rectificatio curvæ. Definitio, *i.* 143. methodus, 144.
Regula quale instrumentum, *g.* 121. ex qua materia parari debeat, 122.
Regula aurea quænam dicatur, *a.* 307.
Regula centralis Bakeri, *f.* 623.
Regula Conchoïdis, 535.
Regula de quinque, *a.* 312.
Regula Renaldiniana polygonum regulare circulo inscribendi confutata, *f.* 292.
Regula Societatis, *a.* 314.
Regula trium sive *de tri* quænam sit, 307. ubinam locum habeat, 307. usus in vita communi explicatus, 308. *& seqq.*
Regula trium composita, 312. 313.
directa, 311.
inversa, *ibid.*
Residuum. Definitio, *a.* 64.
Rhombus. Definitio, *g.* 99. constructio, 340. area quomodo inveniatur, 387.
Rhomboides. Definitio, 101. constructio, 341. area quomodo inveniatur, 387.

S.

Scalæ geometricæ constructio, *g.* 277. usus, 278.
Scholion in Mathesi quid sit, *c.* 51.
Scrupulum primum, *secundum* &c. *g.* 388.
Secans. Definitio, 7. quomodo inveniatur, 26. *i.* 166. arcus multiplex quomodo inveniatur, *f.* 328.
Secantium proprietates, *g.* 302. 303. ex eodem puncto ductarum relatio, 380.
Secans complementi. Definitio, *t.* 11.
Sectio circuli per rectam qualis, *g.* 52. per circulum qualis, 53.
Sectiones conicæ. Definitio, *f.* 386. quænam sint, 387. *& seqq.*
Sectiones conicæ superiorum generum, 528. *& seqq.*
Sectio linearum. Definitio, *g.* 50.
Sectio media & extrema ratione facta, *f* 258.
Sectionis planorum theoria, *g.* 478. *& seqq.*
Sectio rectarum mutua, 51.
Sector circuli. Definitio, *g.* 46. ad triangulum reductio, 415. area quomodo inveniatur, 435. *i.* 154. *& seqq.*
Sectoris elliptici quadratura, *i.* 186. 192.
hyperbolici quadratura, 189. 194.
Segmentum circuli, *majus*, *minus.* Definitio, *g.* 44. area quomodo inveniatur, 436. *& seqq.* *i.* 170.
Segmenti sphærici soliditas quomodo inveniatur, *i.* 199.
Segmentum superficiei sphæricæ quomodo inveniatur, *i.* 222.
Semicirculorum sectio, *g.* 202.
Semidiameter. Definitio, 39.
Semiordinata. Definitio, *f.* 370.
Series convergentes. Definitio, *f.* 52.
divergentes, ibid.
Serliana curva fornicum qualis sit linea, *f.* 598.

Signa

[illegible] *exponentium indeterminatorum* tam rationum quam dignitatum, *f.* 13. 14. operationum arithmeticarum, 8. *& seqq.*
Signa quantitatum, *f.* 3. *& seqq.*
Signa rationum universalia, 114.
Similia. Definitio, *a.* 24. qualia sint, 25. differentia interna, 26. quomodo a LEIBNITIO definita, 27.
Similitudo. Definitio, *a.* 24. signum, 28. 29. principium, *g.* 120.
Similitudo corporum, 564. *& seqq.* polygonorum regularium ejusdem ordinis, 404. 405.
Sinus sive *Sinus rectus.* Definitio, *t.* 2. proprietas, 3. mensura, 13. ex dato arcu quomodo inveniatur, *i.* 160. graduum 18. *f.* 277. gr. 22, min. 30. *f.* 273. gr. 30. *t.* 15. gr. 36. *f.* 281. gr. 45. *f.* 270. arcus dimidii, *t.* 17. dupli, *t.* 18. arcus differentiæ, *t.* 20. angulorum multiplorum, *f.* 325. arcuum exiguæ differentiæ quomodo inveniatur, *t.* 19. *& seqq.*
Sinus artificialis, *t.* 31.
Sinuum canon quomodo construatur, *t.* 15. *& seqq.*
Sinus complementi. Vide Cosinus.
Sinus totus. Definitio, *t.* 2. proprietas, 4.
Sinus versus. Definitio, *t.* 2. proprietas, 4. quomodo ex arcu inveniatur, 163.
Situm eundem quænam habeant, *g.* 5.
Situs planorum theoria, 478. *& seqq.*
Solidum. Definitio, *g.* 444. quomodo dato æquale inveniatur, 577.
Solidi cissoidalis cubatio, *i.* 210.
hyperbolici, 216. 217.
logistici, 211. 212.
Sphæra. Definitio, *g.* 470. proprietas, 471. ad pyramidem reductio, 550. *i.* 200. ad cylindrum circumscriptum ratio, *g.* 551. *i.* 201. soliditas quomodo inveniatur, *g.* 556. *i.* 199. superficies quomodo inveniatur, *g.* 556. *i.* 221.
Sphærarum similitudo, *g.* 571. ratio, 579.
Sphæroidis elliptici soliditas quomodo inveniatur, *i.* 203. *& seqq.*
Spiralis ARCHIMEDIS. Definitio, *f.* 569. proprietas, 570. subtangens, *i.* 50.
Spiralium quadratura, *i.* 137.
Spirales infinitæ. Definitio, *f.* 572. subtangens, *i.* 50. 51.
Spiralis parabolicæ punctum flexus contrarii quomodo determinetur, *i.* 312.
Stereometria doliorum, *g.* 582. *& seqq.*
Strues lignorum quomodo metiamur, 382.
Subnormalis. Definitio, *f.* 408. quomodo inveniatur, *i.* 35.
Subnormalis curvæ exponentialis quomodo inveniatur, *i.* 283.
Subnormalis ellipseos quomodo determinetur, *f.* 440. *i.* 37.
Subnormalis hyperbolæ quomodo determinetur, *f.* 491.
Subnormalis parabolæ quomodo determinetur, *f.* 440. *i.* 36.
Subtangens. Definitio, *f.* 408.
Subtangens curvæ algebraicæ quomodo inveniatur, *i.* 20. *& seqq.*
Subtangens curvæ exponentialis quomodo inveniatur, *i.* 271. *& seqq.*
Subtangens ellipseos quomodo determinetur, *f.* 440. 448. *i.* 25.
Subtangens hyperbolæ quomodo determitur, *f.* 491. *i.* 27.
Subtangens parabolæ quomodo determinetur, *f.* 410. *i.* 21.
Subtractio. Definitio, *a.* 64. signum, 65. regulæ, 103. in numeris concretis, 104. examen, 106.
Subtrahendus, 64.
Summa. Definitio, *a.* 61.
Summandi numeri, ibid.
Superficies. Definitio, *g.* 28. termini, 29. 30.
Superficies corporis rotatione geniti quomodo inveniatur, *f.* 219.
Superficiei sphæræ ad circulum maximum ratio, *g.* 554.
Superficierum corporum ratio analytice investigata, *f.* 128.
Surdesolidum, *a.* 252.
secundum, ibid.

Surdesolidum tertium, *a*. 252.
Syllogismorum forma an in demonstrando attendenda, *c*. 47.

T.

TAngere quid significet in Geometria, *g*. 47.
Tangere circulum extus, intus, ibid.
Tangens circulum quomodo ducatur, *g*. 311. *f*. 291. ejus ad secantem ex eodem puncto ductam relatio, *g*. 379.
Tangens curvam quomodo inveniatur, *i*. 161.
Tangens in Trigonometria. Definitio, *t*. 7. proprietates, 8. *& seqq* quomodo inveniatur, 26. arcus multipli quomodo inveniatur, *f*. 327.
Tangentis 45° magnitudo, *t*. 32.
Tangentium circulum proprietates, *g*. 304. 307. *& seqq*. 325. 326.
Tangentium & secantium ex eodem puncto ductarum relatio, *g*. 334.
Tangens artificialis, *t*. 31.
complementi, 11.
Tangentium methodus inversa. Definitio, *i*. 224. in quo consistat, 225. exempla, 226. *& seqq*.
Termini rationis, *a*. 126.
Terminorum usus in rebus distincte concipiendis, *a*. 56.
Tetraëdrum. Definitio, *g*. 475. constructio, 525. quale sit corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f*. 301. latus sphæræ inscribendi quomodo inveniatur, 299. hujus ad radium ratio, 314.
Theorema. Definitio, *c*. 38. quænam in eo consideranda, 39. *& seqq*.
Theorema Newtonianum evehendi binomium ad dignitatem quamcunque, *f*. 95. *& seqq*.
Totum. Definitio, *a*. 9. relatio ad partem, 84. 86.
Tractoria, *i*. 250. *& seqq*.
Trapezoides. Definitio, *g*. 103.
Trapezium, ibid.
Triangulum. Definitio, *g*. 87. per quæ [illegible] terminetur, 182. 206. 265. 266. constructio, 180. 205. 234 [illegible]. area quomodo inveniatur, 392. *i*. 107. divisio in partes æquales, *g*. 440. ratio ad parallelogrammum, *g*. 386. 391. *i*. 348.
Triangulorum æqualitas unde colligatur, *g*. 179. 204.
Triangulorum æqualium proprietas, 393.
Triangulorum congruentia, 179. 204. 251.
Triangulorum proprietates, 188. *& seqq*. 239. 240. 244. 246. 247. 268. 297. 300. *t*. 33. 35. resolutio trigonometrica, *t*. 36. *& seqq*. similitudo, *g*. 183. 207. 235. 237. 252. 267.
Triangulorum similium proprietates, 396. *& seqq*.
Triangulum acutangulum. Definitio, *g*. 93.
Triangulum æquicrurum. Definitio, *g*. 89. constructio, 199. per quæ determinetur, 200. proprietates & symptomata, 184. 248. 253. similitudo, 201.
Triangulum æquilaterum. Definitio, *g* 88. constructio, 198. proprietates & symptomata, 185. 186. 187. 241. 254.
Triangulum obliquangulum. Definitio, *g*. 94.
Triangulum obtusangulum. Definitio, 92. proprietates, 221. *& seqq*. 241.
Triangulum rectangulum. Definitio, 91. proprietates, 218. *& seqq* 241. 244. 329. 417.
Trianguli regularis circulo inscribendi latus quomodo inveniatur, *f*. 268.
Trigonometria canonica a Tabularum necessitate liberata, *i*. 167.
Trigonometria plana. Definitio, *t*. 1.
Trochois. Definitio, *f*. 573.
proprietates, 574. *& seqq*.

U.

VAriationes omnes quantitatum combinatarum & permutatarum quomodo inveniantur, *f*. 222.
Vertex anguli, *g*. 54.
curvæ, *f*. 369.
figuræ, *g*. 114.

Unciæ potentiarum quinam numeri dicantur, *f.* 9. æquales sint numeri, 218.
Unitas. Definitio, *a.* 4.
Unitates eædem quænam sint, *a.* 5. 6. *diversæ* quænam sint, ibid.
Unum. Definitio, *a.* 3.
Virgulæ pithometricæ constructio, *g.* 582. *& seqq.* 595. 598.

Z.

ZEnsus, *a.* 253.
Zensicubus, ibid.
Zensizensizensus, ibid.
Zensizensus, ibid.
Zensurdesolidus, ibid.

FINIS INDICIS QUARTI.

V.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO II. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *m.* Mechanicam, *f.* Hydrostaticam, *a.* Aërometriam *h.* Hydraulicam, & numeros §§. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

ACceleratio motus gravium qua lege fiat, *m.* 85. *& seqq.*
Acceleratio motus aquæ quomodo fiat, *h.* 249. *& seqq.*
Actionis & reactionis æqualitas & contrarietas, *m.* 528. 529.
Æquilibrium in aëre æquiponderantium quomodo tollatur, *a.* 158.
Æquiponderantia in aëre quando non æquiponderent in aliis fluidis, *f.* 58.
Æquilibrium fluidorum diversæ gravitatis specificæ, *f.* 36. homogenorum, 34.
Æquiponderatio. Definitio, *m.* 122. theoria, 144. *& seqq.*
Aër. Definitio nominalis, *a.* 3. existentia, 13. 14. quod telluri circumfundatur, 44. quod comprimi possit, 15. 17. quomodo intra vas comprimatur, 65. quomodo ope antliæ in data ratione dilatetur, 52. num comprimatur in ratione ponderum, 72. *& seqq.* quod sit elasticus, 18. quod gravis, 21. quod rarefiat, 23. quod condensetur, 24.
Aër inferior quod superiore densior, *a.* 154. specifice gravior, 155.
Aëris compressi in vase ope antliæ ratio ad primitivum, *a.* 66. *& seqq.* compressi in vase in aqua submerso elater quantus sit, 108. compressi vi elastica quomodo aqua moveatur, *h.* 87. 89. *& seqq.*
Aëris densitas ubi eadem, *a.* 46. 47.
Aëris ex vase educti per antliam quantitas quomodo inveniatur, 103.
Aëris pes cubicus quantum ponderet, 56. 57.

Aëris rarefactione quomodo aqua expellatur, *h.* 91.
Aëris residui in vase ope antliæ evacuato ratio ad primitivum, *a.* 50. 51.
Aërometria. Definitio, 1. quænam in ea tradenda, 2.
Alarum molendini situs optimus quomodo determinetur, *h.* 316.
Altitudines jactuum sub diversis angulis quomodo sint inter se, *m.* 504. 505.
Altitudo ascensus ponderis super plano inclinato quomodo se habeat, 269. 270.
Altitudo jactus quomodo se habeat ad parametrum, 503.
Altitudo maxima, ad quam grave oblique projectum ascendit, 499. 501. 502.
Altitudo viva fluminis, *h.* 228.
Alveus fluminis. Definitio, *b.* 185.
artificialis, 186.
naturalis, *ibid.*
Amplitudo semitæ projectilis. Definitio, *m.* 489. quomodo sit ad semitam, 491. *& seqq.* quando semiparametro æqualis, 495. quando maxima, 494. quomodo maxima inveniatur, 497. quomodo ceteræ ex ea eruantur, 496.
Anemometrum. Definitio, *a.* 181. constructio, 182.
Angulus directionis. Definitio, *m.* 240.
Angulus elevationis in motu projectorum. Definitio, *m.* 478. quomodo determinetur, ut projectile feriat locum datum, 506.
Angulus incidentiæ. Definitio, 550.
Angulus reflexionis. Definitio, 551.
Antliæ attractivæ constructio, *h.* 110.
Antliæ Ctesibianæ constructio, 113. *& seqq.*
Antliæ pneumaticæ. Definitio, *a.* 38. inventor, 39. constructio, 40. usus, 41. *& seqq.* capacitas quomodo determinanda, 54. 55.
Antliæ pneumaticæ quomodo inter se comparandæ, 53.
Aqua quomodo vires ad agitandas machinas concipiat, *m.* 900. per exiguum orificium in vas immittatur, *h.* 149. per sectionem canalis horizontalis fluat, *h.* 235. *& seqq.* quo derivari possit, 9. quomodo ex loco uno in alterum derivetur, 13. *& seqq.* in locum excelsiorem deducatur, 126. 127. per siphonem ascendat, 66. ope catenarum situlis instructarum elevetur, 116.
Aqua prosiliens quantum ascendat, *h.* 49. *& seqq.* 56. 57.
Aquæ gravitas specifica, *f.* 77.
Aquæ libere fluentis in alveo qua de causa acceleretur, *h.* 200. quantum acceleretur, 201. *& seqq.*
Aquæ quantitas in vas inversum ascendens, dum eidem immergitur, quomodo determinetur, *a.* 109. *& seqq.*
Aquæ saltus per lumen horizontale, *h.* 58. *& seqq.* per verticale, 49. *& seqq.*
Aquarum quantitates per tubos effluentes, *h.* 20. *& seqq.*
Arcus circuli centrum gravitatis, *m.* 165.
Ars libellandi. Definitio, 904. regulæ, 911.
Ascensus aquæ prosilientis, *h.* 49. *& seqq.* 56. 57.
Ascensus celeritate per descensum acquisita factus quomodo se habeat, *m.* 339.
Ascensus in lineis curvis demonstratus, *m.* 334. *& seqq.*
Assarium. Definitio, *h.* 104. constructio, 106.
Axis quid significet in Mechanica, *m.* 756. 757.
Axis in peritrochio. Definitio, 756. theoria & praxis, 792. *& seqq.*
Axis oscillationis. Definitio, 379.

B.

BArometrum. Definitio, *a.* 89. theoria, 124. *& seqq.* constructio, 131.
Baroscopium. Definitio, 89. sensibilioris constructio, 136. *& seqq.*
Baroscopii compositi constructio, 134.
inclinati theoria, 141. *& seqq.*
Basis corporis gravis quid sit, *m.* 221.

C.

Calcando quomodo machina moveatur, *m.* 886. 888.
Calcatio quid sit, 874.
Canalis quid dicatur, *h.* 3.
Cavitas corporis specifice gravioris quanta esse debeat, ne fluido leviori supernatet, *f.* 111.
Celeritas. Definitio, *m.* 13. quod tempori proportionalis, 14. 15. quid proprie sit, 16. quomodo a Mathematicis consideretur, 114. quando eadem ex ictu corporum resultet, 534. quando in conflictu non mutetur, 590. quando mutetur, 560. 562. 576. quanta aquæ per foramen vasis erumpentis, *h.* 48.
Celeritas absoluta. Definitio, *h.* 305.
Celeritas acquisita per descensum perpendicularem, *m.* 92. in plano inclinato, 29. 192. 303. *&* *seqq.* in curva, 308.
Celeritas aquæ in alveo an major in fundo, quam superficie, *h.* 206. per canalem declivem fluentis num augeatur ob pressionem a superiori, 243. *&* *seqq.*
Celeritas corporum elasticorum in concursu quomodo determinetur, *m.* 571.
Celeritas fluidi per siphonem effluentis, *h.* 81. *&* *seqq.* vi aëris compressi ejecti, 92. *&* *seqq.*
Celeritas in motu composito quomodo inveniatur, *m.* 252.
Celeritas media in fluminibus quomodo inveniatur, *h.* 238. *&* *seqq.* aquæ per canalem horizontalem fluentis, 263. *&* *seqq.*
Celeritas penduli in puncto infimo qualis sit, *m.* 401.
Celeritas projectilis quomodo inveniatur, 514.
Celeritas respectiva. Definitio, *h.* 305.
Celeritates quando in conflictu corporum permutentur, *m.* 563. 565.
Celeritates acquisitæ in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.* 603. *&* *seqq.* in diversis planis inclinatis eodem tempore quomodo se habeant, 301. 302.
Celeritates amissæ in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.* 603.
Celeritates aquarum per tubos effluentium, *h.* 36. *&* *seqq.*
Celeritas terminalis in motu corporum quænam dicatur, *m.* 727. quomodo determinetur, 728. *&* *seqq.*
Celeritates terminales in fluminibus. Definitio, *h.* 237. quomodo inveniantur, 239.
Celeritatum locus in motu gravium quænam sit curva, *m.* 99.
Celeritatum quadratorum summa in conflictu corporum elasticorum quod conservetur, 593.
Centrum gravitatis. Definitio, *m.* 122. cur pro gravi corpore sumi possit, 125. quando idem cum centro magnitudinis, 141. quomodo determinetur, 157. quomodo mechanice determinetur, 186. quomodo se habeat ante & post conflictum, 598. 560.
Centrum gravitatis arcus circuli, *m.* 165. coni, 174. coni truncati, 184. conoidis hyperbolici, 179. parabolici, 175. 176. truncati, 185. corporis humani, 187. cylindri, 143. lineæ rectæ, 142. lunulæ HIPPOCRATIS, 169. parabolæ, 159. 162. parabolæ truncatæ, 170. parabolarum infinitarum, 160. 161. 163. parabolici mixtilinei spatii, 189. parallelepipedi, 172. parallelogrammi, 172. perimetri trianguli, 190. perimetri figuræ irregularis cujuscunque, 191. pyramidis truncatæ, 184. pyramidis, 174. sectoris circuli, 166. segmenti circuli, 168. segmenti sphæræ, 177. segmenti sphæroidis elliptici, 180. semicirculi, 167. sphæræ, 178. sphæroidis truncati, 185. sphæroidis elliptici, 181. dimidii, 182. trianguli, 158.

Centri gravitatis status num mutetur ab actione corporum in se invicem, *m.* 602.

Centrum gravitatis commune duorum corporum seu ponderum quomodo determinetur, 144. 149. quomodo plurium, 151. 192. ponderum æqualium, 145.

Centrum magnitudinis. Definitio, *m.* 132.

Centrum motus. Definitio, *m.* 228.

Centrum oscillationis. Definitio, *m.* 423. quomodo determinetur, 426. 429. 432. quomodo in figuris in latus agitatis, 445. *& seqq.*

Centrum oscillationis coni, *m.* 459. 466. conoidis parabolici, 462. hyperbolici, 464. infinitorum parabolicorum, 463. cylindri, 457. hemisphærii, 461. 467. lineæ rectæ, 433. parabolæ, 440. 441. 451. 453. parabolarum infinitarum & curvarum agnatarum, 440. 442. 452. rectanguli, 435. 448. solidorum rotatione genitorum, 454. sphæræ, 460. sphæroidis elliptici, 465. trianguli æquicruri, 436. 437. 438. 449. 450.

Centrum percussionis. Definitio, *m.* 527. quando cum centro oscillationis idem, 547. quando idem cum centro gravitatis, 549.

Centrum velocitatis, *h.* 268.

virium. Definitio, *m.* 654.

Ceræ gravitas specifica, *f.* 77.

Circuli area quomodo inveniatur, *m.* 198.

Clavicula. Definitio, *h.* 5. constructio, 7. 8.

Clepsydræ divisio, 45. *& seqq.*

Cochlea. Definitio, *m.* 760. theoria, 847. *& seqq.* praxis, 852. *& seqq.*

Cochlea mas, *m.* 760.

fœmina, ibid.

Cochlea ARCHIMEDIS quomodo construatur, *h.* 122. *& seqq.*

Cochlea infinita seu *perpetua*. Definitio, *m.* 855. theoria, 856. 858. *& seqq.* praxis, 862. *& seqq.*

Compressio. Definitio, *a.* 5.

Compressio aëris in vase sub aqua detento, *a.* 106.

Conatus. Definitio, *m.* 18.

Condensatio. Definitio, 6.

Condensatio aëris quomodo æstimanda, 114. *& seqq.*

Coni centrum gravitatis, *m.* 184. centrum oscillationis, 459. 466. soliditas quomodo inveniatur, 202. 204. 205. quomodo superficies, 201. 203.

Conoidis hyperbolici centrum gravitatis, *m.* 179. centrum oscillationis, *m.* 464.

Conoidis parabolici centrum gravitatis, 175. 176. centrum oscillationis, 462.

Conoidis truncati centrum gravitatis, 185.

Conoidum parabolicorum infinitorum centrum oscillationis, *m.* 463.

Corpora æqualium basium quantum ab aëre premantur, *a.* 45.

Corpora gravia num eadem celeritate descendant, *m.* 133. 134.

Corporis humani centrum gravitatis, 187.

Corporis pars immergenda in fluido quando inveniatur, *f.* 105.

Corporis specifice gravioris gravitatio in fluido specifice leviori, *f.* 55. *& seqq.*

Corporum in aëre æquilibratorum æquilibrium quando tollatur, *a.* 158.

Corpus motu reflexo qua via ab uno termino ad alterum accedat, *m.* 558.

Corpus asperum. Definitio, *m.* 935.

Corpus durum, 520.

elasticum, 522.

fluidum, *f.* 3.

molle, *m.* 521.

solidum, *f.* 4.

Cunei theoria, *m.* 865.

Currus onustus cur difficilius trahatur super plano inclinato, quam horizontali, 277.

Curva, in qua grave descendens eam constanter ei ponderi absoluto æquali premit, 672.

Curva in qua grave descendens eam constanter eadem vi, sed non ponderi absoluto

[illegible] æquali premit, 673. quæ a pondere descendente premitur in ratione dignitatum altitudinum, 675.

Curva accessus & recessus æquabilis. Definitio, 347. quomodo inveniatur, 349.

Curva æquilibrationis. Definitio, 369. quomodo inveniatur, 371. quomodo describatur, 373.

Curva brachystochrona. Definitio, 355. quomodo inveniatur, 357.

Curva celerrimi descensus. Definitio, 355. quænam sit, 357.

Curva elastica Bernoulli, 675.

Curva isochrona. Definitio, 331. quomodo inveniatur in hypothesi Galilæana, 334. in hypothesi directionum convergentium, 336. hujus rectificatio, 338. quadratura, 339. quomodo inveniatur in quacunque accelerationis hypothesi, 343.

Curva isochrona paracentrica. Definitio, *m.* 347. quomodo inveniatur, 349.

Curva oligochrona. Definitio, 355. quomodo inveniatur, 357.

Curva resistentiæ in motu gravium, 708.
  instantaneæ, 682.
  totalis, ibid.

Curva synchrona. Definitio, 366. quomodo construatur, 368.

Curva tautochrona. Definitio, 351. quænam sit, 352.

Cycloidis proprietates mechanicæ, *m.* 352. 357. 675. proprietates singulares, 311. 388. quomodo per data tria puncta describatur, 361.

Cyclois externa circularium segmentorum repræsentatrix, 358.

Cylindri centrum gravitatis, 143. oscillationis, 457. soliditas, 197. 200. 201. superficies quomodo inveniatur, 200.

D.

D*Ensitates* quando sunt ut massæ, *s.* 14. quando ut gravitates, 16. quando reciproce ut volumina, 23.

Densitatum ratio, 24. 25.

Densitates fluidorum quomodo se habeant, *s.* 39. quomodo inveniantur, 67. respectivæ quando determinentur, 40.

Densitas aëris ubi eadem, *a.* 46. 47. quomodo crescat, 153. num inferioris ponderi atmosphærico proportionalis, 156.

Densius. Definitio, 8.

Deprimendo movere quid sit, *m.* 871.

Descensus gravium intra minutum secundum quomodo determinetur, 472. quantus sit, 473.

Descensus gravium in cycloide quomodo se habeat, *m.* 311. in lineis curvis demonstratus, 334. & *seqq.* in plano inclinato cum descensu per verticale collatus, 293. & *seqq.* cum descensu perpendiculari iisdem legibus adstrictus, 289.

Descensus specifice gravioris in fluido leviori, *s.* 88. & *seqq.*

Diabetis constructio, 72. phænomena, 73. & *seqq.*

Diagonalis parallelogrammi quando motu composito describatur, *m.* 241. quo tempore describatur, 244.

Diameter gravitatis. Definitio, *m.* 126.

Dilatatio. Definitio, *a.* 7.

Directiones quomodo opponantur, 21.

Distantiæ ponderum a centro gravitatis communi quomodo se habeant, 144.

Distantiæ a centro gravitatis & centro motus qualis sit linea, 229.

E.

E*Ffectus aëris compressi* quomodo computentur, *a.* 83. & *seqq.*

Effectus pleni quomodo se habeant, *m.* 530.

Elateris æstimatio, *m.* 553.

Elateris vi quomodo machina moveatur, 897.

Elater aëris. Definitio, *a* 9. quando non mutetur, 12. quando crescat & decrescat,

scat, 12. existentia, 18. mensura, 30. & seqq. quod calore intendatur, 146. frigore minuatur, 147.
Elateris aëris directio, 25. 26. mensura ejus, quo rarefiens expanditur, 148.
Elater aëris compressi quomodo se habeat ad elaterem dilatati, 78. quando fortior, 79. quomodo determinetur, 81. magis compressi ad elaterem minus compressi quomodo se habeat, 80.
Elevatio quid sit, *m.* 873.
Ellipseos æquatio abscissis a foco computatis, *m.* 667.
Epistomium. Definitio, *h.* 5. constructio, 7. 8.
Ergata qualis machina, *m.* 877.

F.

Figuræ superficialis & solidæ magnitudo ex centro gravitatis determinata, *m.* 192.
Figurarum per planum deorsum latum descriptarum soliditas quomodo inveniatur, 196.
Fluida homogenea quando in æquilibrio, *f.* 34. quodnam præponderet, 35.
Fluida heterogenea quando in æquilibrio, 36.
Fluidi ex vase inverso exigui orificii effluentis quantitas quomodo determinetur, *a.* 100. & *seqq.*
Fluidi gravioris in specifice leviori ponderatio, *f.* 87. & *seqq.*
Fluidi pondus quomodo inveniatur, 62. 63.
Fluidi partes inferiores num comprimantur a superioribus, 71. 72.
Fluidi per siphonem effluentis acceleratio, *h.* 81. & *seqq.*
Fluidorum diversæ gravitatis specificæ æquilibrium, 36.
Fluidorum densitates quomodo inveniantur, 67.
Fluidorum diversæ gravitates specificæ quomodo inveniantur, 66. 70. quomodo se habeant, 95.
Fluidorum indirecte ac directe impingentium juxta lineas parallelas theoria, *h.* 367. & *seqq.*
Fluidorum variorum gravitas in pollice cubico Parisino, *f.* 69.
Flumen detumescere quando dicatur, *h.* 199.
Flumen intumescere quando dicatur, ibid.
Fluminum cursus theoria, *h.* 185. & *seqq.*
Fons naturalis quomodo arte construatur, *h.* 18.
Fontis intermittentis constructio, *h.* 143. 152.
Fontium salientium constructio, 128. & *seqq.* 152. & *seqq.*
Frictio. Definitio, *m.* 933. quomodo æstimanda, 940. & *seqq.* quomodo minuatur, 943. & *seqq.* 956. & *seqq.*
Fulcra quomodo corpori supponenda, ut in data ratione premantur, *m.* 234.
Funis canabini contractio ob humiditatem aëris, *a.* 215. 216.

G.

Grave quando quiescat, *m.* 123. 124. 222. quando firmiter insistat, 223. quando cadat, 222. num sit a lapsu immune quomodo inveniatur, 224. quo motu descendat, 79. 85. & *seqq.* quomodo in plano inclinato descendat, 261. & *seqq.*
Gravium linea directionis, 212. & *seqq.*
Gravia heterogenea. Definitio, *m.* 131.
Gravia homogenea, 130.
Gravitas. Definitio, *m.* 4. quomodo spectetur a Mathematicis in motu gravium, 114. num in omni distantia eadem, 78. quod a polis versus æquatorem continuo decrescat, 390.
Gravitates quando sunt ut volumina, *f.* 18.
Gravitatis actio diversa quomodo ex motu pendulorum colligatur, *m.* 389.
Gravitatis planum. Definitio, 128.
Gravitas absoluta. Definitio, *m.* 259. ad respectivam ponderis super plano inclinato quomodo sese habeat, 261. 263.

Gravitates absolutæ quomodo se habeant, *f.* 31.
Gravitas aëris evicta, *a.* 20. quod sit variabilis, 121. *& seqq.*
Gravitas specifica determinata, 27. *& seqq.*
Gravitas respectiva. Definitio, *m.* 260. quando in absolutam degeneret, 266. quando nulla, *ibid.* super plano inclinato quomodo crescat & decrescat, 265.
Gravitates respectivæ ponderum super diversis planis inclinatis quomodo sint ad se invicem, 264.
Gravitas solidi quomodo inveniatur, *f.* 78. 79.
Gravitas specifica corporum quando eadem, 19. 30. quando diversa, 20.
Gravitates specificæ quomodo se habeant, 32. 33. 65. quando sint ut volumina reciproce, 29. quando ut massæ, 28. quando ut absolutæ, 26.
Gravitas specifica fluidorum quomodo inveniatur, *f.* 37. 66. 70. quod æstate ac hieme non eadem, 69.
Gravitates specificæ fluidorum quomodo se habeant, 95.
Gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem specificam solidi gravioris ratio quomodo determinetur, 73.
Gravitas specifica solidi quomodo determinetur, *f.* 75. 76. quomodo se habeat ad gravitatem fluidi, 101.
Gravitates specificæ solidorum æqualium quomodo se habeant, 103.
Gravitatio. Definitio, *m.* 5. in fulcra, a quibus sustentatur, 231. super plano inclinato qualis sit, 261.
Gravitatio corporum specifice leviorum in fluido graviori, *f.* 94. *& seqq.*
Gravitatio specifice graviorum in fluido leviori, 34.

H.

H*Emisphæria* evacuata quanta vi comprimantur, *a.* 59. *& seqq.*
Hemisphærii centrum oscillationis, *m.* 461. 467.
Horologii oscillatorii constructio, *m.* 994.
Hydracontisterii constructio, *h.* 168.
Hydraulica. Definitio, 1.
Hydrostatica. Definitio, *f.* 1.
Hygrometrum. Definitio, *a.* 197.
Hygroscopium. Definitio, 197. constructio, 220.
Hyperbolæ æquatio abscissis a foco computatis, *m.* 668.
Hypomochlium. Definitio, *m.* 753.
Hypothesis Galilæana de motu gravium, *m.* 89. *& seqq.*
Hypothesis Baliani de motu gravium, 102. ejus impossibilitas demonstrata, 115.

I.

I*Ctus* quomodo se habeant in conflictu corporum, *m.* 567.
Ictus perpendicularis ad obliquum ratio, 552.
Ignis vi quomodo machinæ agitentur, 931.
Impactus directus corporis unius in alterum. Definitio, 523.
Impactus indirectus sive obliquus. Definitio, 526.
Impetus. Definitio, 543.
Incessus hominum quomodo fiat, 226.
Incursus fluidorum eodem modo fieri quando dicatur, *h.* 276.
Instrumenta quænam ad vectem revocabilia, *m.* 750.
Instrumenti constructio, quo quantitas salis in aqua salsa exploratur, *f.* 108. *& seqq.*

L.

Lampadis constructio, quæ eandem quantitatem olei ellychnio affundit, *h.* 155.
Lapidis gravitas specifica, *f.* 77.
Lapsus. Definitio, *m.* 211.
Lapsus gravium unde pendeat, 222.
Lex motus, 71.
Libella. Definitio, *m.* 906. constructio, 907. *& seqq.* rectificatio, 910.
Libellatio aquarum quomodo instituenda, 911.

Libræ theoria, *m.* 779. *&* *seqq.* constructio, 782. *&* *seqq.* examen, 787. usus, 788. *&* *seqq.*
Linea directionis. Definitio, *m.* 17.
Linea directionis gravium, 212. *&* *seqq.*
Linea horizontalis vera. Definitio, 207. qualis sit, 208.
Linea horizontalis apparens. Definitio, *m.* 209. qualis sit, 210. quando pro vera assumi possit, 218. quomodo ad veram reducatur, 216.
Lineæ rectæ centrum gravitatis, 142. centrum oscillationis, 433.
Logarithmicæ proprietas, 682.
Lumen tubi quid sit, *h.* 4.
Lunulæ HIPPOCRATIS centrum gravitatis, *m.* 169.

M.

Machina. Definitio, *m.* 745.
Machina ingenti ponderi elevando apta, *m.* 969. ad conterendam materiam pulveris pyrii serviens, 989. *&* *seqq.* qua aqua insigni cum impetu elevatur, *h.* 166.
Machinæ, quibus aqua elevatur, *h.* 107. *&* *seqq.*
Machinæ compositæ. Definitio, *m.* 966. earum numerus, 967. quomodo inveniantur, 968.
Machinamenta hydraulica, *h.* 161. *&* *seqq.*
Magnetis gravitas specifica, *f.* 77.
Malluvii cum fonticulo saliente constructio, *h.* 145.
Manometri theoria, *a.* 151.
Manoscopium. Definitio, *a.* 160. constructio, 161. *&* *seqq.*
Marmoris gravitas specifica, *f.* 77.
Massa. Definitio, *m.* 6. quomodo æstimanda, 138. quorumnam corporum æqualis, *f.* 12.
Massæ corporum quomodo se habeant, *f.* 21. 22. quando sint ut volumina, 17.
Massæ bonæ ab adulteratis quomodo distinguantur, 83. *&* *seqq.*
Materia quænam cum corpore gravitet, *m.* 136.
Mechanica. Definitio, *m.* 1.
Mechanice philosophari quid significet, *m.* 746.
Metallorum gravitates specificæ, *f.* 77.
Methodus centrobaryca GULDINI, *m.* 206.
Miscibilium quantitas in mixto quomodo inveniatur, *f.* 81.
Mobile quando in curva ea lege incedat, ut radius vector verrat areas tempori proportionales, *m.* 652.
Molæ alatæ, *m.* 982. frumentariæ, 975. *&* *seqq.* jumentariæ, 981. manuariæ, 979. oleariæ, 983. *&* *seqq.* ferrariæ constructio, 992.
Moles. Definitio, 7. quomodo inveniatur, 8.
Momentum gravium quid dicatur, *m.* 147.
Momenta corporum extra centrum gravitatis suspensorum, 153.
Momenta ponderum super plano inclinato spectatorum, 271.
Motus. Definitio, *m.* 2. quando acceleretur, 76. quando in medio resistente nunquam extinguatur, 690. retardetur, 77. quando nullus sequatur, 75. cur naturalis rectilineus, 73. super plano inclinato descendentis qualis sit, 284. *&* *seqq.* quando per reflexionem non mutetur, 555.
Motus æquabilis. Definitio, *m.* 24. theoria, 27. *&* *seqq.* 31.
Motus acceleratus. Definitio, 67. theoria, 101. *&* *seqq.*
Motus animalium explicandi principium, 226.
Motus compositus. Definitio, 238. theoria, 241. *&* *seqq.*
Motus corporis impingentis quando cesset, 544.
Motus in conflictu amissus quomodo determinetur, 541.
Motus ex percussione demonstratus, 530. *&* *seqq.*
Motus perfecte durorum, 532. *&* *seqq.*
Motus elasticorum, 560. *&* *seqq.*

[illegible]s *oblique impingentium* quomodo determin[illegible]ur, *m.* 616.
Motus curvi[illegible]eus qualis, 239. quænam ejus caufa, 74.
Motus fluminum theoria, *h.* 210. *& feqq.*
Motus gravis afcendentis qualis fit, *m.*317. quibus legibus adftringatur, 318. *& feq.*
Motus gravium, qua lege acceleretur, 86. 87. in medio refiftente, 708. *& feqq.*
Motus pendulorum demonftratus, 380. *& feqq.*
Motus projectorum demonftratus, 479. *& feqq.*
Motus rectilinei in compofitum refolutio, 245. 246.
Motus retardatus. Definitio, *m.* 70.
Motus fimplex. Definitio, 237.
Motus uniformiter acceleratus. Definitio, 67. ejus ratio, 80. *& feqq.*
Motus uniformiter retardati ratio, 97. *& feq.*
Moveri quando dicatur corpus, 3.

N.

NErvi fidium mutatio quoad longitudinem ob humiditatem aëris, *a.* 218.

O.

ONus ferendum quomodo in data ratione diftribuatur, *m.* 235.
Ofcillatio. Definitio, 376.
Ofcillatio penduli in cycloide quomodo determinetur, 387. quomodo efficiantur ifochronæ, 382. *& feqq.*
Ofcillationes pendulorum inter fe comparatæ, 392. *& feqq.*

P.

PArabola curva temporis in motu gravium, *m.* 100. locus celeritatum in motu gravium, 99. via corporis projecti, 480. 482. quomodo defcribatur, 486.
Parabolæ æquatio abciffis a foco computatis, *m.* 666. centrum gravitatis, 159. 162. centrum ofcillationis, 451. 453. ufus in motu fluminum explicando, *h.* 229. *& feq.*
Parabolæ truncatæ centrum gravitatis, *m.* 170.
Parabolarum infinitarum centrum gravitatis, *m.* 160. 161. 163. centrum ofcillationis, 440. 442. 452.
Parallelogrammi centrum gravitatis, 172. area quomodo inveniatur, 194.
Parallelopipedi centrum gravitatis, 172.
Pendulum. Definitio, *m.* 376. cur ofcilletur, 380.
Penduli agitatio in latus, 444.
in planum, ibid.
Pendulorum intra cycloides fufpenforum longitudines quomodo fe habeant, 396. *& feqq.*
Pendulum fimplex. Definitio, 377.
Compofitum, 378.
Percuffio fluidi. Definitio, *h.* 269. qualis fit, 270. 271. quænam in ea æftimanda refpicienda, 272. 273. 274. theoria, 280. *& feq.*
Perimetri figuræ irregularis cujufcunque centrum gravitatis, *m.* 191.
Perimetri trianguli centrum gravitatis, 191.
Peritrochium quid dicatur, 756.
Pes horarius. Definitio, *m.* 425. quantitas, 470. quomodo determinetur, 469. num fit menfura univerfalis, 471.
Plana diverfa quomodo ab aëre premantur, *a.* 61.
Plana fimiliter inclinata quænam fint, *m.* 312.
Plani horizontalis determinatio, 219.
Plani inclinati longitudinis ad altitudinem ratio quomodo in praxi facile determinetur, *m.* 277. theoria & praxis, 261. *& feq.*
Planum inclinatum. Definitio, 258. quomodo determinetur, fuper quo datum pondus data vi fuftentetur, 268.
Poculi conftructio, quo bibenti illuditur, *h.* 74.
Polyfpafti theoria & praxis, *m.* 833. *& feqq.*
Pondus. Definitio, *m.* 748. quomodo hydroftatice inveniatur, *f.* 104. quando in aëre minuatur, & augeatur, *a.* 157. ejus vi quomodo machina moveatur, *m.* 890. *& feqq.* potentia adjuvetur, 896.
Pondus columnæ atmofphæricæ quomodo inveniatur, *a.* 59.

Pondus corporis in vacuo quomodo inveniatur, *a.* 58.
Pondus appensum quando corpus in plano horizontali positum e situ horizontali dimovere nequeat, *m.* 233.
Pondera super curvis æquiponderantia, *m.* 374.
Ponderum super planis inclinatis æquiponderantium ratio ad se invicem, 281.283.
Ponderis aeris incrementum ob variatum pondus atmosphæricum quomodo determinetur, *a.* 159.
Potentia. Definitio, 747. cuinam sit æqualis, 763.
Potentia animata, 869.
inanimata, 869.
movens, 747.
resistens, ibid.
Præponderatio corporum duorum extra centrum gravitatis commune suspensorum quomodo determinetur, *m.* 152. quomodo plurium, 155.
Præponderatio fluidi homogenei, *f.* 35.
Pressio fundi vasorum a fluidis, *f.* 41. *& seqq.* quando eadem, 42. 43. 47. 200. quomodo decrescat, 44. 45. si bases vasis fuerint inæquales, 48.
Pressiones fundi vasorum a fluidis quam habeant rationem, 46.
Principium rationis sufficientis, *m.* 25.26.
Prismatis soliditas quomodo inveniatur, 197.
Problema Archimedæum de corona ex auro & argento mixta quomodo solvatur, *f.* 82.
Problema de curva isochrona ad omnem universalitatem revocatum, *m.* 345.
Projectilis motus per spatia horizontalia qualis, 490.
Projectum horizontaliter vel oblique qualem lineam describat, 480. 482.
Projectio horizontalis. Definitio, *m.* 476. qualis hinc oriatur motus, 480.
Projectio obliqua. Definitio, 477. qualis hinc oriatur motus, 488.
Projectio perpendicularis. Definitio, *m.* [illegible]. quinam hinc oriatur motus, 479.
Projectionis curva quomodo inveniatur directionibus gravium suppositis parallelis, 516. iisdem suppositis convergentibus in centro Telluris, 518.
Pyramidis truncatæ centrum gravitatis, 184.

Q.

Quantitas materiæ in diversis corporibus quomodo per pendula definiatur, *m.* 406. *& seqq.* quod ponderi proportionalis, 412.
Quantitas motionis. Definitio, 22. 23.
Quantitas motus. Definitio, *m.* 22. 23. quando ante & post conflictum eadem, 581. 585. quando non, 582. *& seqq.* quando augeatur, 588. quando minuatur, 589. in corporibus homogeneis quomodo se habeat, 139.
Quies, Definitio, *m.* 2.
Quies ex ictu corporum resultans, 533. 538. gravium unde pendeat, 222.

R.

Radius vector. Definitio, *m.* 655.
Rarefactio. Definitio, *a.* 8.
Rarefactio aëris evicta, *a.* 23. quomodo eadem aqua expellatur, *h.* 91.
Rarius. Definitio, *f.* 10. quod specifice levius densiori, 11.
Rectanguli centrum oscillationis, *m.* 435. 448.
Reflexio coporis oblique impingentis qualis sit, *m.* 556.
Reflexionis lex analytice investigata, 557.
Resistentia, quam patiuntur corpora per fluida mota, *h.* 301. *& seqq.*
Resistentia medii. Definitio, *m.* 677. quomodo determinetur, 679. *& seqq.*
Rosarii constructio, *h.* 118. 119.
Rota directa. Definitio, *m.* 899. constructio, 923. quomodo vi aquæ agitetur, 920.
Rota retrograda. Definitio, 899. quomodo vi aquæ agitetur, 924. *& seqq.*
Rota situlis instructa quomodo construatur, *h.* 120.

Rotarum

...rum dentatarum & radiatarum lignearum constructio, *m.* 997.

S.

SAlis quantitas in aqua salsa quomodo determinetur, *f.* 108. *& seqq.*

Saltus aquæ per lumen horizontale, *h.* 58. *& seqq.* per verticale, 49. *& seqq.* vi aëris compressi factus quantus sit, 96. *& seqq.* 101. vi rarefacti factus quantus, 102.

Scytalæ quænam vocentur, *m.* 757.

Sectio alvei. Definitio, *h.* 188.

Sectio alvei naturalis, 190. qualis figura, 192.

Sectio alvei artificialis, 190. qualis figura, 193.

Sectio alvei tardior, 196.

velocior, ibid.

Sectiones æquiveloces. Definitio, *h.* 195. 209.

Sectio fluminis. Definitio, *m.* 39. quomodo inveniatur, 914. 915.

Sectiones diversæ fluminis quam habeant rationem, 916.

Sectoris circuli centrum gravitatis, 166.

Segmenti circuli centrum gravitatis, *m.* 168.

Segmenti sphæræ centrum gravitatis, 177.

Segmentorum circuli ratio, 364.

Segmentorum curvarum similium ratio, 364.

Semicirculi centrum gravitatis, 167.

Semita projectilis. Definitio, *m.* 488. quomodo describatur, 510. parameter quomodo inveniatur, 491.

Similitudinis principiorum in Geometria fœcunditas, 365.

Sipho anatomicus, *f.* 52. usus, *ibid.*

Siphonis interrupti constructio & usus, *h.* 77. *& seqq.*

Siphonum constructio, 64. 66.

Situla baculo supra mensam posito appensa quando non decidat, *m.* 233.

Solidum quanta sui parte mergatur, *f.* 94. quando profundius mergatur, 96. 97. quando datum intra fluidum locum servet, 98.

Solidum minimæ resistentiæ quomodo inveniatur, *h.* 319.

Solidorum æquiponderantium in partes fluido submersæ quando æquales, *f.* 102.

Sollicitatio ad motum. Definitio, *m.* 110. quomodo determinetur ex lege accelerationis, 112. in motu composito quomodo se habeat, 253.

Spatium motus. Definitio, *m.* 12.

Spatii parabolici mixtilinei centrum gravitatis, *m.* 189.

Specifice gravius. Definitio, *f.* 6. quod sit densius, 9.

Specifice levius. Definitio, 5. quod rarius, 11. quando fundo vasis incumbens a fluido non attollatur, 100. quando specifice graviori connexum in fluido non ascendat, 118. 122. *& seqq.* 127.

Sphæræ centrum gravitatis, *m.* 178. centrum oscillationis, 460.

Sphæroidis elliptici centrum gravitatis, 181. 182. centrum oscillationis, 465.

Sphæroidis elliptici segmenti centrum gravitatis, 180.

Sphæroidis truncati centrum gravitatis, 185.

Spiritus vini quantum rarefiat, *a.* 152.

Statica. Definitio, *m.* 1.

Stateræ constructio, 774. *& seqq.*

Sulphuris gravitas specifica, *f.* 77.

Superincessus radens, *m.* 936.

volvens, 937.

mixtus, 938.

Symmetriæ corporis humani ratio, 227.

Syrinx quomodo construatur, *h.* 107. quo impetu aqua expellatur, 108. 109.

T.

TEmpus motus, Definitio, *m.* 11.

Tempus descensus per planum inclinatum, 309. *& seqq.* per curvam quomodo determinetur, 353. quomodo per convexitatem curvæ, 354.

Tempora descensus per plana similiter inclinata, 314. *& seqq.* per curvas similes & similiter positas, 316.

Tempora, quib. vasa deplentur, *h.* 41. *& seqq.*

Temporis curva in motu gravium, *m.* 100.
Tendentia. Definitio, 255.
Tendentia media. Definitio, 255. quomodo inveniatur, 256.
Thermometrum. Definitio, *a.* 196.
Thermoscopium. Definitio, 196. constructio, 198. 202. & *seqq.* in usu notanda, 214.
Tractio. Definitio, *m.* 872.
Trahendo quomodo machina moveatur, 878. 879. 887.
Trahendo & deprimendo simul quomodo machina moveatur, 882.
Trahendo & protrudendo simul quomodo machina moveatur, 884.
Trajectoria quænam linea dicatur, *m.* 519. quomodo inveniatur ex lege virium centripetarum, 664.
Trajectoria quomodo inveniatur si vis centripeta fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris, 669. quomodo hujus æquatio inveniatur, 670.
Trianguli centrum gravitatis, 158.
Trianguli æquicruri centrum oscillationis, 436. & *seqq.* 449. 450.
Trochlea. Definitio, *m.* 759. theoria & praxis, 826. & *seqq.*
Trudendo movere quid sit, 870.
Trudendo quomodo machina moveatur, 870.
Tubus in Hydraulica quid dicatur, *h.* 3.
Tubus Torricellianus. Definitio, *a.* 87. symptomata, 91. & *seqq.* 120. & *seqq.*
Turres Bononiensis & Pisana inclinatæ cur a lapsu immunes, *m.* 225.
Tympani constructio, quo aqua elevatur, *h.* 120.

U.

V*Alvula.* Definitio, *h.* 104. constructio, 106.
Vas ad hortos irrigandos aptum quomodo construatur, 163.
Vasa concordiæ quomodo construantur, 180.
Vectis. Definitio, *m.* 749. usus in explicandis instrumentis & motibus animalium, *m.* 751. theoria in hypothesi directionum perpendicularium, 765. in hypothesi obliquarum, 272. & *seqq.* praxis, 768.
Vectis heterodromus. Definitio, 755. *homodromus*, 754.
Velocitas. Definitio, *m.* 13. quid proprie sit, 16. qua diagonalis in motu composito describitur, quanta sit, 247. 248.
Velocitatis in motu composito quantitas ab angulo directionis dependens, 251.
Velocitates aquarum per tubos fluentium quomodo sint inter se, *h.* 11.
Velocitas media aquæ in fluminibus, 208.
Ventus. Definitio, *a.* 166. celeritas quomodo determinetur, 167. & *seqq.* quomodo oriatur, 185. & *seqq.* ex baroscopio prædicatur, 188. 189.
Venti vi quomodo machina agitetur, *m.* 929.
Venti artificialis excitatio, *a.* 194. 195. ad flammam conservandam, *h.* 176. & *seqq.*
Versando movere quid sit, *m.* 875.
Versando quomodo machina moveatur, 880.
Vis requisita ad corpus in situ horizontali sustentandum, *m.* 230. ad grave super plano inclinato retinendum, 262. ad motum gravis impediendum, 267. ad solidum submersum attollendum, *h.* 92. ad specifice levius a fluido graviori ad ascensum urgendum, 99. ad solidum in fluido specifice leviori sustentandum, 126. ad vas vacuum in aquam immergendum, 113. ad specifice levius sub fluido graviori detinendum, 114. 120. 121. ad solidum in fluido demergendum, 106. qua solidum in fluido ascendit, 107.
Vis ulla num perdatur, 116.
Vires æquales quænam sint, *m.* 275.
Vires æquiponderantium quomodo æstimandæ, 146. 273. 274.

Vis centralis in omni curva quomodo se habeat, *m.* 657. in circulo, 658. & *seqq.* sectione conica quavis, 660. curva qualibet quomodo inveniatur, 662.
Vires centrales in circulo quomodo sese habeant, 623. & *seqq.*
Vis centrifuga. Definitio, *m.* 617.
Vis centripeta. Definitio, 619. quando urgeat corpus in linea curva motum versus aliquod punctum, 65.
Vires conspirantes quaenam sint, *m.* 238.
Vires fluidi in percussione quomodo sese habeant, 280. & *seqq.*
Vis mortua. Definitio, 910. quomodo aestimanda, 278.
Vires mortuae quando sicut velocitates, *m.* 280.
Vis motrix. Definitio, 9.
Vires percutientes aquarum rotas molares agitantium quomodo ad mensuram revocentur, *h.* 286. & *seqq.*
Vis resistendi. Definitio, *m.* 20.
Vis venti, qua alas molendini convertit, *h.* 315.
Vis viva. Definitio, *m.* 9. 10.
Vires vivae corporum quomodo aestimandae, 325. & *seqq.*
Volumen. Definitio, *m.* 7.
Volumen solidi pondere alteri aequalis quomodo inveniatur, *s.* 80.

FINIS INDICIS QUINTI.

VI.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO III. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *o.* Opticam, *c.* Catoptricam, *d.* Dioptricam, *p.* Perspectivam, *s.* Sphaerica & Trigonometricam sphaericam, *a.* Astronomiam, numeros vero §§. designare: ubi autem nulli numeri adscribuntur, eosdem referri ad literam praecedentem.

A.

Adnata quid sit, *o.* 23. ejus usus, 23.
Adspectus. Definitio, *a.* 926. signa, 929. momentum, quo celebratur, quomodo inveniatur, 936.
Aequatio centri. Definitio, *a.* 652. quomodo inveniatur, 687.
Aequationis pars physica, *a.* 688.
optica, ibid.
Aequationum Tabulae quomodo construantur, *a.* 688.
Aequatio luminis, quid dicatur in theoria Lunae, *a.* 857.
Aequatio menstrua Lunae. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 851.
Aequatio temporis. Definitio, *a.* 714. quomodo inveniatur, 715.
Aequationum temporis Tabulae quomodo construantur, *a.* 726.
Aequator. Definitio, *a.* 48. proprietates, 49. 50. quomodo ab horizonte dividatur, 83. quomodo a meridiano, 84.

Æquatoris & horizontis intersectio qualis sit, *a.* 88.
Æquatoris arcus inter horizontem & meridianum interceptus quantus sit, 89.
Æquinoctium. Definitio, *a.* 158. quomodo observetur, 653.
Aër num intensitatem luminis minuat, *o.* 90. 92.
Aëris altitudo quomodo inveniatur, *a.* 405.
Algebræ usus in Catoprica, *c.* 312. & *seqq.* in Dioptrica, *d.* 487. & *seqq.*
Altitudo apparens sideris. Definitio, *a.* 73. quomodo observetur, 109.
Altitudo luminosi. Definitio, *o.* 145.
Altitudo meridiana quomodo observetur, *a.* 129. 137. 142. Solis quomodo computetur, 202.
Altitudinis meridianæ mensura, 95.
Altitudo minor quantum officiat visioni remotioris, *o.* 255. & *seqq.*
Altitudo nonagesimi. Definitio, *a.* 220. cuinam æqualis, 221. quomodo inveniatur, 222.
Altitudinis nonagesimi Tabulæ quomodo computentur, *a.* 223.
Altitudo objectiva quomodo se habeat ad perspectivam, *p.* 54. quomodo exhibeatur, 55.
Altitudo oculi. Definitio, *p.* 21.
Altitudo poli quomodo inveniatur, *a.* 147. 154. ejus mensura, 96.
Altitudo puncti apparentis in tabula quomodo se habeat ad altitudinem oculi, *p.* 32.
Altitudo Solis quomodo ex umbra corporis inveniatur, *o.* 147. quomodo computetur, 215.
Altitudo stellæ. Definitio, *a.* 73. mensura, 94. quomodo ad datum tempus inveniatur, 300.
Altitudo vera. Definitio, *a.* 73.
Altitudines quomodo ex umbra reperiantur, *o.* 153. & *seqq.* quomodo ope quadrati geometrici investigentur, 174. & *seqq.* quomodo mediante speculo, *c.* 64. quando appareant inclinatæ, *o.* 326. 327. quando erectæ, 328.
Altitudines apparentes quando æquales, *a.* 104.
Altitudines meridianæ quomodo observentur, *a.* 129. 137. 142.
Altitudinum differentiæ quænam visu non dignoscantur, *o.* 250.
Altitudinum meridianarum observatarum utilitas in Astronomia, *a.* 130.
Amphiblestroides. Definitio, *o.* 30.
Amphora sive *Aquarius*, *a.* 160.
Amplitudo occidua. Definitio, *a.* 195. mensura, 196. quomodo ope globi inveniatur, 320. 322.
Amplitudo ortiva. Definitio, *a.* 195. mensura, 196. fixæ quomodo computetur, 265. quomodo ope globi inveniatur, 322. Solis quomodo computetur, 206. quomodo ope globi inveniatur, 318.
Amplitudinum ortivarum Tabulæ quomodo condantur, 207.
Anaclastica. Definitio, *d.* 1.
Anamorphosis Definitio, *p.* 105. quomodo fiat, 106. & *seqq.* in superficie coni convexa, 111. in concava, 113. in pyramide multilatera, 112. pro polyedro, *d.* 277.
Anamorphosis mechanica, *p.* 109. 115.
Anamorphoses quomodo adspiciendæ, 114.
Anamorphoses quomodo fiant pro speculo cylindrico, *c.* 290. pro conico, 301. pro pyramidali, 304.
Anamorphosium pro speculo cylindrico perficiendarum theoria, 254. & *seqq.*
Angulosa quando appareant rotunda, *o.* 280. 281.
Anguli species in Triangulo rectangulo sphærico quomodo determinetur, *f.* 133.
Angulus ad nodum orbitæ Cometæ quomodo inveniatur, *a.* 1138.
Angulus ad Solem. Definitio, *a.* 650. *ad Terram*, 762.

Angulus circuli latitudinis cum via penumbræ quomodo inveniatur, *a.* 1067.
Angulus commutationis. Definitio, *a.* 760. quomodo inveniatur, 761.
Angulus eclipticæ cum meridiano quomodo in dato puncto computetur, 204.
Anguli eclipticæ cum meridiano Tabulæ quomodo condantur, 205.
Angulus elongationis. Definitio, *a.* 762. quomodo ſupputetur, 792.
Angulus incidentiæ. Definitio, *c.* 19. *d.* 11.
Angulus inclinationis. Definitio, *d.* 12.
Angulus opticus, ſeu *viſorius.* Definitio, *o.* 207.
Angulus orientis quomodo computetur, *a.* 218.
Angulus parallacticus. Definitio, *a.* 370. menſura, 371.
Angulus reflexionis. Definitio, *c.* 21.
refractionis. Definitio, *d.* 13.
Angulus refractus. Definitio, *d.* 14. quomodo computetur, 30.
Angulorum refractorum & refractionis Tabulæ, *d.* 32.
Angulus ſphæricus. Definitio, *ſ.* 5. menſura, 31.
Angulorum ſphæricorum ratio, 43.
Animalia num dentur in Luna, *a.* 488. num in planetis, 526.
Anni ſolaris magnitudo quomodo inveniatur, 669. quanta ſit, 671.
Annulus circa Lunam in eclipſi Solis totali apparens, *a.* 454.
Annulus Saturni, *a.* 516. 517.
Anomalia. Definitio, *a.* 646.
Anomaliæ motus annuus quomodo inveniatur, 706.
Anomalia coæquata. Definitio, *a.* 650. quid ſit, 651. quomodo inveniatur, 686. 690. 697.
Anomalia eccentri. Definitio, *a.* 649. quomodo inveniatur, 690.
Anomalia media ſ. ſimplex. Definitio, *a.* 647. menſura, 648. quomodo inveniatur, 648.
Anomalia media ſecundo coæquatæ reſpondens pro Luna quomodo inveniatur, *a.* 852.
Anomaliarum Solis Tabulæ quomodo conſtruantur, 707.
Anomalia ſecundo æquata pro Luna quomodo inveniatur, *a.* 854.
Anomalia vera. Definitio, *a.* 650.
Aphelium. Definitio, 636.
Aphelii locus quomodo inveniatur pro planetis ſuperioribus, 734 pro inferioribus, 743. pro Tellure, 674. 810. ubinam ſit ad A. 1700. in planetis ſuperioribus, 739. in inferioribus, 745.
Aphelii motus annuus quomodo inveniatur in planetis ſuperioribus, 737. in inferioribus, 746. quantus ſit in ſuperioribus, 739. in inferioribus, 747.
Apogæum. Definitio, *a.* 636.
Apogæi ſolaris motus annuus quomodo inveniatur, 702.
Apogæi ſolaris motuum Tabulæ quomodo conſtruantur, *a.* 703.
Apogæi Lunæ locus ad A. 1700. 835.
Apparentia. Definitio, *p.* 22.
Apparentia lineæ, ibid.
plani, ibid.
ſolidi, ibid.
Arachnoides, *o.* 34.
Aranea, 34.
Arcitenens, *a.* 160.
Arcus quando inſtar rectæ appareat, *o.* 275. 276.
Arcus æquatoris datus quo tempore per meridianum tranſeat quomodo computetur, *a.* 211.
Arcus inter centra. Definitio, *a.* 945. quomodo inveniatur, 946. & ſeqq.
Arcus latitudinarius in eclipſi terreſtri. Definitio, 1069. 1070. quomodo inveniatur, 1083.
Arcus viſionis. Definitio, *a.* 281. quomodo determinetur, 286. quantus ſit, 288.
Argumentum latitudinis. Definitio, *a.* 769.
Argumentum latitudinis menſtruæ Definitio, 843. quomodo inveniatur, 846.

Argumentum menstruum latitudinis. Definitio, *a.* 870.
Aries, 160.
Ascensio obliqua. Definitio, *a.* 191.
Ascensio obliqua Solis quomodo inveniatur, 208. 209. quomodo ope globi reperiatur, 318.
Ascensio obliqua stellæ fixæ quomodo inveniatur, 266. 267. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Ascensionum obliquarum Tabulæ quomodo condantur, 210.
Ascensio recta. Definitio, 190.
Ascensio recta fixæ quomodo observetur, 228. quomodo computetur, 260. 261. 264. quod sit mutabilis, 235.
Ascensio recta puncti dati eclipticæ quomodo computetur, *a.* 204.
Ascensio recta Solis quomodo inveniatur ope globi, 313.
Ascensionum rectarum singulorum graduum eclipticæ Tabulæ quomodo condantur, 205.
Ascensionum rectarum duarum fixarum differentia quomodo inveniatur, 226. 227.
Asterismi quid sint, 245. eorum nomina, ibid.
Astrognosia quibus adminiculis juvetur, 248.
Astronomia. Definitio, 1.
Astronomia sphærica. Definitio, 2.
— *theorica.* Definitio, 3.
Atmosphæra Solis stabilita, 419. 444. 446. figura ejus, 447.
Atmosphæra lunaris stabilita, 486.
Aurora. Definitio, *d.* 393.
Axis incidentiæ. Definitio, *d.* 9.
— *lentis.* Definitio, 21.
— *mundi.* Definitio, 44.
— *opticus.* Definitio, *o.* 340.
— *partis coni umbrosi* quomodo reperiatur, *a.* 1049.
— *refractionis.* Definitio, *d.* 10.
— *sphæræ.* Definitio, *f.* 9.
Azimuthum. Definitio, *a.* 194. ejus mensura, 197.
Azimuthum solis quomodo inveniatur, 206. quomodo ope globi, 318.
Azimuthum stellæ quomodo inveniatur, 302. quomodo ope globi, 320. 322.

B.

Basis Tabulæ quid in Perspectiva dicatur, *p.* 12.
Biceps quando quis appareat in speculo plano, *c.* 113.
Biquintilis quinam adspectus sit, *a.* 931.

C.

Calor quomodo ope speculorum concavorum intendatur, *c.* 226. 227.
Camera obscura quid sit, *o.* 79. 80. effectus ejus demonstratus, 110. & seqq. quomodo accuratior construatur, *d.* 236.
Cancer quid significet in Astronomia, *a.* 160.
Caper sive *Capricornus* quid significet in Astronomia, 160.
Capite ad pedes alterius jacentem quando quis se videat in speculo plano, *c.* 115.
Capite truncatum quando quis se videat in speculo plano, *c.* 113.
Caput Draconis, *a.* 819.
Cardines mundi. Definitio, *a.* 80.
Cardo meridiei. Definitio, *ibid.*
Cardo occidentis. Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.
Cardo orientis. Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.
Cardo orientis & occidentis quomodo sibi invicem opponantur, 102.
Cardo septentrionalis. Definitio, 130.
Catalogus fixarum quomodo construatur, 244. a quibusnam constructus, *ibid.*
Cathetus incidentiæ. Definitio, *c.* 16. in quonam sit plano, 39.
Cathetus obliquationis. Definitio, *c.* 18.
Cathetus reflexionis. Definitio, 17. in quonam sit plano, 39.
Catini ad polienda vitra commodi quomodo parentur, *d.* 527. & seqq.

Catoptrica. Definitio, *c.* 1. principia, 24. *& seqq.*
Catoptrica analytica, 312. *& seqq.*
Cauda Draconis, *a.* 819.
Celeritatum apparentium ratio, *c.* 359. *& seqq.*
Centrum mediorum motuum ubinam sit, *a.* 680.
Centrum penumbræ ubi sit, *a.* 1050.
Choroides, *o.* 27.
Ciliare ligamentum, 29.
Ciliares processus, 29.
Circulorum maximorum sphæræ proprietates *s.* 15. *& seqq.* 25. *& seqq.*
Circulorum minorum sphæræ proprietates, 36. *& seqq.*
Circulorum sphæræ in planum projectio quando recta, quando circulus, 152.
Circuli excursuum. Definitio, *a.* 187.
Circuli polares. Definitio, 184. quales sint circuli, 185.
Circuli sphæræ mundanæ sive cœlestis. Definitio, 41. quomodo optime dignoscantur, 189.
Circulus quomodo projiciatur, *p.* 47.
Circulus æquinoctialis. Definitio, *a.* 53. quod vulgo cum æquatore confundatur, 55.
Circulus declinationis. Definitio, 78. proprietas, 79.
Circulus diurnus. Definitio, *a.* 56.
    eccentricus. Definitio, 641. 642.
    latitudinis. Definitio, *a.* 239.
    immotus. Definitio, 43.
    mobilis. Definitio, 42.
    polaris arcticus, ibid.
    antarcticus, 184.
Circulus verticalis. Definitio, 93. quomodo horizontem sensibilem interfecet, 93.
Cistula catoptrica, in qua objecta alia videntur, si per aliud foramen inspexeris, *c.* 119. in qua objecta videntur cistula majora, 259.
Cœli figura apparens, *a.* 10. motus apparens, 11. *& seqq.*
Cognitio rerum naturalium quotuplex, *a.* 627.
Colorum theoria optica, *o.* 183. *& seqq.*
Columnarum scenographia, *p.* 71.
Coluri. Definitio, *a.* 186.
Colurus æquinoctiorum, ibid.
    solstitiorum, ibid.
Cometæ. Definitio, *a.* 1131. qualia sint corpora, 1168. num mundo coæva corpora, 1158. an sint supra Solem, 1171. an supra Lunam, 1151. *& seqq.* num habeant parallaxin sensibilem, 1148.
Cometarum phænomena, 1167. motus qualis appareat, 1161. caudæ quid sint, 1173. longitudo & latitudo quomodo inveniatur, 1132. ascensio recta & declinatio quomodo inveniatur, 1134. quomodo distantia a Sole, 1135. motus proprius, 1136. distantia a Terra quænam requiratur, ut datum tempus super horizonte consumant, 1150.
Conclave speculare quomodo construatur, *c.* 138. 139.
Coni scenographia, *p.* 64.
Conjunctio planetarum. Definitio, *a.* 535. 928. signum, 929.
Conjunctio corporalis, 935.
    centralis, 935.
    magna, 933.
    maxima, 933.
    platica, 935.
Conjunctionis Lunæ cum Sole visæ momentum quomodo inveniatur, 999.
Conjunctiones planetarum inferiorum cum Sole quomodo observentur, 728.
Conspicilla. Definitio, *d.* 478.
Contigua & continua quando videantur visibilia, *o.* 69.
Conus penumbrosus. Definitio, *a.* 1040. quid proprie sit, 1044. quousque exporrigatur, 1042.
Coni penumbrosi angulus quantus sit, 1045. 1048. similitudo cum cono umbroso, 1047.

Conus umbrosus quem situm habeat respectu penumbrosi, *a.* 1043.
Coni umbrosi Lunæ axis quomodo inveniatur, 1025.
Coni umbrosi Terræ longitudo quomodo inveniatur, 939.
Coni umbrosi Terræ & Lunæ quales sint eodem tempore, 1024.
Cornea tunica. Definitio, *o.* 18. proprietas, 19. cur sit tenax, 22.
Corpus quando instar superficiei appareat, 274.
Corpus diaphanum. Definitio, 11.
illuminatum, 10.
lucidum, 9.
luminosum. ibid.
Corpus opacum. Definitio, *o.* 12. quando tegat oculo visibilia, 411. *& seqq.*
Corpus pellucidum. Definitio, 11.
perspicuum, ibid.
Cosecantes quando ad cotangentes prope accedant, *d.* 51. quando sint ut cotangentes quam proxime, 52.
Craticula ectypi in anamorphosibus, *p.* 106. *c.* 291.
Craticula prototypi in anamorphosibus, *p.* 106. *c.* 292.
Crepusculum. Definitio, *a.* 393. causa, 395. quando per integram noctem duret, 400. quo tempore hoc fiat quomodo inveniatur, 401.
Crepusculum matutinum. Definitio, *a.* 393. quando incipiat, 394. initium quomodo inveniatur calculo, 402. quomodo ope globi, 404.
Crepusculnm Solis secundum quomodo observatum, *a.* 440. undenam sit, 443. 444.
Cubi ex angulo visi scenograghia, *p.* 58.
Culminare quando stella dicatur, *a.* 133.
Culminatio stellæ. Definitio, 133. quomodo observetur, 134. quomodo computetur, 169.
Curtatio. Definitio, 772.
Curtationum Tabulæ quomodo construantur, 790.
Curvarum versus eandem partem cav...um quænam major, *f.* 48.
Curvilineæ figuræ projectio, *p.* 48.
Cylindri scenographia, 60.

D.

Decilis, *a.* 931.
Declinatio. Definitio, 75. qualis sit, 76. 77.
Declinatio eclipticæ quomodo observetur, *a.* 183. quomodo computetur, 198.
Declinatio maxima eclipticæ quomodo observetur, 163. 168. quanta observata fuerit, 165. an sit mutabilis, 166. 167.
Declinatio Solis quando sensibiliter non mutetur, 117. 118. quomodo ope globi inveniatur, 313.
Declinationum Solis circa solstitium differentiæ quomodo ope gnomonis præalti determinentur, 664.
Declinationum Solis a maxima paulo ante & post solstitium differentiæ quomodo se habeant, 661. *& seqq.*
Declinatio stellæ fixæ quomodo computetur, *a.* 260. 263. quomodo ope globi inveniatur, 311. an sit mutabilis, 233. 234. num in eadem rotatione mutetur, 115.
Delineatio accurata objecti cujuscunque quomodo fieri possit, *p.* 3.
Descensio obliqua. Definitio, *a.* 192. quomodo computetur, 207. quomodo inveniatur ope globi, 320. 322.
Diameter apparens Lunæ quomodo mutetur, 555. in Sole insensibilis, 1019.
Diameter apparens Planetarum quomodo observetur, *a.* 548. quantæ singulorum observatæ fuerint, 557.
Diameter apparens Solis quomodo observetur, 547. 548. quanta observata, 553.
Diametri apparentis Solis, Lunæ & planetarum magnitudo variabilis, 549.
Diameter penumbræ. Definitio, *a.* 1050.
Diameter sphæræ. Definitio, *f.* 9.
Diameter vera sideris quomodo inveniatur, *a.* 912. ejus ratio ad diametrum Solis quomodo inveniatur, 909. quanta sit, 911.

Diameter

[illegible] *vera planetarum* in semidiametris Terræ quomodo inveniatur, *a.* 919. quanta sit uniuscujusque, 920. *& seqq.*
Diameter umbræ Lunæ, 1029.
Diei longitudo quomodo computetur, *a.* 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.
Dies solares quod sint inæquales, 709.
Dierum solarium æquatio quomodo inveniatur, 715. æqualium & inæqualium differentia, 711.
Differentia ascensionalis. Definitio, *a.* 193. quomodo computetur, 206. 265.
Differentia ascensionalium Tabulæ quomodo condantur. 207.
Differentia descensionalis. Definitio, 193.
Differentiarum horariarum meridianorum Tabulæ quomodo construantur, 980.
Digiti ecliptici. Definitio, 950. quomodo inveniantur in Lunæ eclipsi, 951.
Digiti ecliptici Solis quomodo inveniantur, *a.* 1001. quomodo in eclipsi terrestri inveniantur, 1097.
Dioptra objectiva, *a.* 106.
ocularis, 106.
Dioptræ telescopicæ cur adhibeantur, 108.
Dioptrarum telescopicarum positio quomodo examinetur, 131.
Dioptrica. Definitio, *d.* 1.
Dioptrica analytica, 487. *& seqq.*
Directio planetæ. Definitio, *a.* 531.
Discus Terræ. Definitio, 1013.
Disjuncta quando contigua videantur, *o.* 308. quando continua, 309. 310.
Distantia duorum punctorum in superficie sphæræ, *f.* 54.
Distantiarum differentiæ quænam visu non dignoscantur, *o.* 250.
Distantia Cometæ a Terra quomodo inveniatur, *a.* 1147.
Distantia curtata. Definitio, 771. quomodo inveniatur, 789.
Distantia Lunæ a Terra quomodo variet, 556.
Distantia planetæ a Sole quomodo inveniatur, 812.
Distantia planetæ a Terra quomodo supputetur, *a.* 792.
Distantia Solis vera a Terra quomodo inveniatur, 894. *& seqq.*
Distantia Solis maxima & minima a Terra ubinam sit, 554.
Distantia Solis a nodo & apogæo lunari. Definitio, 841.
Distantia stellarum quomodo observetur, 225.
Dodecatemorion. Definitio, 188.

E.

Eccentricitas. Definitio, *a.* 638. 639.
Eccentricitas in ellipsi, 679.
Eccentricitas Lunæ constans, 835.
Eccentricitas Lunæ menstrua quomodo inveniatur, 847.
Eccentricitas orbitæ ellipticæ Telluris quomodo inveniatur, 810.
Eccentricitas planetarum quanta, 750.
Eccentricitas planetarum superiorum quomodo inveniatur in orbita circulari, 734. quomodo in elliptica, 813.
Eccentricitas planetarum inferiorum quomodo inveniatur, 749.
Eccentricitas Solis quomodo inveniatur, 675. 678. quanta sit, 682.
Eclipsis Lunæ. Definitio, *a.* 937. quomodo appareat, 458. quænam ejus causa, 459. quid sit, 461. cur ubivis ejusdem magnitudinis, 462. ejus magnitudo, 951. initium, medium, finis & duratio quomodo inveniatur, 971. typus quomodo describatur, 976. quomodo supputetur, 974. observetur, 977. 978.
Eclipsis Lunæ partialis. Definitio, 937. quando fit, 948.
Eclipsis Lunæ totalis. Definitio, 937. phænomena, 463.
Eclipsis Lunæ totalis cum mora. Definitio, 937. quando fit, 948.
Eclipsis Lunæ totalis sine mora. Definitio, 937. quando fit, 948.
Eclipsium lunarium termini necessarii. Definitio, 943. quomodo reperiantur, 944.

Eclipsium lunarium termini possibiles. Definitio, *a.* 943. quomodo reperiantur, 944.
Eclipsis satellitum Jovis, *a.* 502. 505. 510.
Eclipsis Solis. Definitio, 982. quando accidat, 984. 985. quomodo appareat, 448. quænam ejus causa, 449. *& seqq.* cur non in omnibus locis eodem momento accidat, 1081. quomodo supputetur, 1008. observetur, 1010. *o.* 303. initium & finis, *a.* 1004. 1101. duratio quomodo inveniatur, 1005. termini quomodo determinentur, 995. 996. typus quomodo describatur, 1007. ubi totalis videatur, 1075. 1079. ubi partialis, 1078. 1080. ubi nulla, 1077.
Eclipsis solaris totalis phænomena, 454.
Eclipsis Solis CHRISTO *patiente* num fuerit præternaturalis, 986.
Eclipsis Terræ. Definitio, *a.* 1011. quando detur, 1072. 1073. 1074. quomodo appareat Selenitis, 1037. termini quomodo reperiantur, 1082. initium & finis quomodo inveniatur, 1085.
Ecliptica. Definitio, 157. divisio, 160. qualis sphæræ circulus, 171. ejus situs, 172. *& seqq.*
Eclipticæ declinatio maxima quomodo observetur, 163. quanta observata fuerit, 165.
Ecliptica in disco Terræ. Definitio, *a.* 1059. situs in eodem, 1060.
Elevatio poli. Definitio, 99. quomodo inveniatur, 200. quomodo observetur, 154. super disco Terræ cuinam æqualis, 1086.
Elevatio æquatoris. Definitio, *a.* 99. mensura, 100. quomodo observetur, 154. quomodo inveniatur, 200.
Ellipsis quando instar circuli appareat, *o.* 282. quando in parabolam degeneret, *a.* 1163.
Ellipseos descriptio per data tria puncta, 809. proprietates quædam, 803. *& seqq.*
Engyscopium. Definitio, *d.* 402.
Epactæ. Definitio, *a.* 963. quomodo inveniantur, 965.
Epocharum Tabulæ quomodo construantur, 719. 754.
Epochæ motus medii & apogæi Solis quomodo constituantur, 718.

F.

Faciem & tergum quomodo simul spectemus in speculo plano, *c.* 109. 128. 129.
Faculæ solares num dentur, *a.* 429.
Fasciæ in Jove observatæ, 499.
in Saturno observatæ, *ibid.*
Fenestrarum scenographia, *p.* 75.
Fenestrarum apertarum scenographia, 79.
Flamma e longinquo visa cur major appareat, quam in vicinia, *o.* 265. 266.
Flamma candelæ quando appareat rotunda, *o.* 307.
Figuræ apparentia per quænam detur, *p.* 31.
Figuræ visio, *o.* 272. *& seqq.*
Figuræ curvilineæ projectio quomodo fiat, *pag.* 35.
Figuræ mixtilineæ projectio, 36.
rectilineæ projectio, 34.
Figura rotunda oblonga seu ovalis quando instar circuli appareat, *o.* 282.
Figura vera polygoni regularis & circuli quando videatur, *o.* 286. quando non, 287.
Fixæ (stellæ) quomodo in asterismos distinguantur, *a.* 246. quænam semper appareant, quæ semper lateant, quomodo inveniatur, 277. quo lumine fulgeant, 1119. quid sint, 1120. quantæ sint, 1121. an habeant planetas circa se, 1122. 1123. num habeant parallaxin sensibilem, 384. num sint Terra majores, 1109. num ultra Saturnum a Tellure distent, 1110. num inæqualiter a Terra distent, 1114. cur aliæ aliis minores appareant, 1115. num mutentur, 1129.
Fixæ in plures divisæ quænam subinde observentur, 543.
Fixæ per vices apparentes ac disparentes, 1124. *& seqq.*

Fixæ

[redacted]*æ magnitudinis* quantæ per telescop[redacted]m appareant, *a.* 1111.
Fixa temporaria, 1127.
Fixarum aberrationes annuæ, 605. num parallaxis earum annua recte inde colligatur, 606. quanta hæc esse debeat, 607.
Fixarum distantia a Terra quomodo inveniatur, 1116. quanta æstimetur, 1117.
Fixarum mora supra horizontem quomodo inveniatur, *a.* 268.
Fixarum magnitudines apparentes, 249.
Fixarum multitudo evicta, 1113.
Fixarum occultationes a planetis factæ, 542.
Fixarum a Luna occultandarum figura ovalis observata, 475. causa quænam sit, 476.
Focus. Definitio, *d.* 22. quomodo determinetur in lentibus convexis, 186. 217. 221. quomodo in meniscis, 298. quomodo in superficie sphærica convexa, 89. 90.
Focus virtualis. Definitio, 23. quomodo determinetur in lente concava, 282. 290. quomodo in meniscis, 312.
Fulcrum telescopii longioris quomodo construatur, *d.* 382.
Fulguratio in medio disci Lunæ in eclipsi Solis totali observata, 454.

G.

Gemini, *a.* 160.
Globus cœlestis. Definitio, *a.* 303. constructio, 305. 309. usus, 311. *& seqq.* quomodo ad cœli situm componatur, 316.
Globus descendens quomodo repræsentari possit tanquam ascendens, *c.* 73.
Gnomonis astronomici constructio & usus, *a.* 137. *& seqq.*
Gravitas cooporis num in omnibus Terræ locis eadem, 569. 570.

H.

Heliofcopium. Definitio, *d.* 465. constructio, 467.
Hemisphærium quomodo totum ab oculo conspici possit, *o.* 427.
Hemisphærium australe, sive *meridionale* mundi, *a.* 52.
Hemisphærium boreale sive *septentrionale* mundi, *a.* 51.
Hemisphærium inferius cœli, 65.
superius cœli, 64.
Homines num dentur in Luna, 488. num in planetis ceteris, 526.
Hora diei quomodo ex Solis altitudine eruatur, *a.* 216.
Horizon. Definitio, 61. quomodo a meridiano secetur, 84. quomodo a circulo verticali, 85.
Horizon apparens, sive *sensibilis.* Definitio, 66. proprietas, 67. poli ejus ubinam sint, 90.
Horizon occiduus. Definitio, 69.
ortivus. Definitio, 68.
Horizon rationalis, sive *verus.* Definitio, 61. proprietates, 62. 63. situs, 86. poli ubinam sint, 60.
Horologii motus quomodo rectificetur, vel probetur, 297.
Horopter. Definitio, *o.* 341.
Humor aqueus. Definitio, 33.
Humor crystallinus. Definitio, 34. figura, 35. 36. usus, 61. *& seqq.* effectus, 75.
Humor vitreus. Definitio, 37.
Hypothesis latitudinis Lunæ, *a.* 873.
Hypothesis Lunæ, 839. 84.

I.

Januarum in pariete scenographia, *p.* 73.
Januarum apertarum scenographia, 77.
Ichnographia geometrica. Definitio, *p.* 23.
Ichnographia perspectiva, sive *projecta.* Definitio, *p.* 25. quomodo fiat, 33. *& seqq.*
Imago visibilis qualis in oculo delineetur, *o.* 62. *& seqq.* quando clarior, 77. qualis sit in presbytæ oculo, 383. qualis in oculo myopis, 386.
Imaginis locus in speculo concavo, *c.* 232. *& seqq.* 253. *& seqq.* in speculo convexo, 166. 167. 168. in planis, 51. *& seqq.*
Imago qualis sit in speculo concavo, 252. *& seqq.* in convexo, 183. in cylindrico, 280. *& seqq.* in cylindricis cavis, 298. *& seqq.*

seq. cur videatur in libero aëre, *c.* 300. in speculis planis, 60. quanta sit in speculo concavo, 240. & *seqq.* in convexo, 155. 175. 178. 179. 180. qualis appareat per vitrum planum, *d.* 83. qualis post lentem convexam, *o.* 387. & *seqq.* *d.* 224. & *seqq.*
Imago inversa post lentem convexam quomodo sistatur erecta, *c.* 231. 233. 334.
Imago lucidi cur multiplex videatur in speculo plano, *c.* 88.
Imago objecti quomodo multiplicetur in speculis planis, *c.* 93. 100. 104. 106. 110. 112. 126. 127. quando verticalis appareat horizontalis & contra, 70. 71. quando infra horizontem situ inverso appareat, 57. 58. quando post speculum longius distare videtur, quam ante ipsum abest, 134. & *seqq.*
Imago prototypo similis quomodo mechanice delineetur, *p.* 110.
Imago deformis quomodo formosa restituatur per speculum cylindricum, *c.* 290. conicum, 301. pyramidale, 304.
Imagines monstrosæ quomodo in speculis planis exhibeantur, 112. 113. 114. 116.
Inæqualia quando appareant æqualia, *o.* 252. & *seqq.*
Inæqualitas prima. Definitio, 773.
Inæqualitas secunda, sc. motus planetarum, 775.
Inæqualitas Lunæ prima seu *soluta*, 823.
Inæqualitas Lunæ altera seu *menstrua*, 824. phænomena, 838.
Inæqualitatis tertiæ in motu Lunæ phænomena, 855.
Inclinatio. Definitio, *a.* 767. maxima quomodo observetur, 773. quanta sit in singulis planetis, 784.
Inclinationum Tabulæ quomodo construantur, 785.
Inclinatio incidentis radii. Definitio, *c.* 22.
Inclinatio limitis menstrui. Definitio, *a.* 872. quomodo inveniatur, 876.
Inclinatio planorum qualis, *f.* 97.
Inclinatio radii reflexi. Definitio, ...
Inclinatio viæ penumbræ. Definitio, *a.* 1065. quomodo inveniatur, 1066.
Incolæ planetarum num dentur, 527.
Insulæ in Luna, 480.
Intensitas luminis. Definitio, *o.* 81. quando non mutetur, 86. quomodo se habeat, 85.
Intervallum planetæ. Definitio, *a.* 640. quomodo inveniatur, 685.
Jovicolæ quantæ magnitudinis, 527.
Iris oculi, *o.* 25.
Jupiter. Definitio, 3. quale sit corpus, 505. 524. similitudo cum Tellure, 525. motus vertiginis, 496. figura ovalis in occultatione per Lunam facta, 475. 476.
Jupiter Jovialis, 501.

L.

L*Ateris species* in triangulo rectangulo sphærico quomodo determinetur, *f.* 133.
Laterna magica. Definitio, *d.* 464. constructio, 470. quomodo in microscopium convertatur, 476. 477.
Latitudo. Definitio, *a.* 768.
Latitudo Lunæ simplex. Definitio, *a.* 865.
Latitudo Lunæ vera. Definitio, *o.* 867. quomodo inveniatur, 880.
Latitudo Lunæ visa. Definitio, 987. quomodo inveniatur, 988. quomodo computetur in momento synodi visæ, 1000. quomodo inveniatur initio & fine eclipsis Solis, 1006.
Latitudo menstrua. Definitio, 869. quomodo inveniatur, 878.
Latitudo planetæ quomodo observetur, 559. quomodo inveniatur, 795. quomodo supputetur, 814.
Latitudo stellæ. Definitio, 236. mensura, 237. 238. quomodo inveniatur, 243. 261. quomodo inveniatur ope globi, 312. an sit mutabilis, 251.
Latitudo umbræ. Definitio, 1053.
Latitudo umbræ apparens. Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.

Lens. Definitio, *d.* 15.
Lentes causticæ. Vide Vitra caustica.
Lentes causticæ ex glacie confectæ, 201.
Lentes convexæ quomodo refringant lumen, 266. *& seqq.*
Lentes hyperbolicæ num sphæricis præstent, 325.
Lentis convexæ effectus, *o.* 73. 75.
Lentis objectivæ apertura in telescopio quomodo determinetur, *d.* 394. ejus necessitas, 395. 398.
Lentium plano-convexarum theoria, 166. *& seqq.*
Lentium utrinque convexarum theoria, 184. *& seqq.*
Lentium concavarum theoria, 179. *& seqq.*
Leo, *a.* 160.
Libra, 160.
Limites in orbita Lunæ, 872.
Lineæ apparentia per quænam detur, *p.* 31.
Linea apsidum. Definitio, *a.* 636.
Lineæ apsidum positio quomodo determinetur, 674. 754. 743. quomodo in orbita elliptica planetarum superiorum inveniatur, 813.
Linea brevissima quænam sit in superficie sphæræ, *f.* 53.
Linea distantiæ. Definitio, *p.* 15. quænam sit, 16.
Linea fiduciæ quænam dicatur, *a.* 107.
Linea fundamentalis. Definitio, *p.* 11.
Linea horizontalis in Perspectiva. Definitio, 17. qualis sit, 18.
Linea incidens. Definitio, *c.* 14.
Linea incidentiæ. Definitio, *d.* 4.
Linea meridiana. Definitio, *a.* 81. situs, 82. quomodo inveniatur, 120. usus, 125. 128.
Linea objectiva. Definitio, *p.* 27.
Lineæ parallelæ quando convergentes appareant, *o.* 227. *& seqq.*
Linea recta quando instar puncti appareat, *o.* 722.
Lineæ rectæ apparentia qualis, *p.* 28.
Linea reflexionis. Definitio, *c.* 15.
Linea refractionis. Definitio, *d.* 5.
Linea terræ. Definitio, *p.* 11.
Loca optica. Definitio, *o.* 334. theoria, 335. *& seqq.*
Loci visio, 308. *& seqq.*
Loci dati distantia a centro penumbræ quomodo inveniatur, *a.* 1099.
Locus ad eclipticam reductus. Definitio, 757. quomodo inveniatur.
Locus centricus planetæ, 755.
Locus eccentricus in ecliptica. Definitio, 757.
Locus eccentricus in orbita. Definitio, 755. quomodo supputetur, 756.
Locus geocentricus. Definitio, 758.
Locus heliocentricus. Definitio, 757. quomodo ex geocentrico inveniatur, 812.
Locus imaginis in speculo ubinam sit, *c.* 41.
Locus imaginis in speculo concavo, convexo, 151. 152. 154. *& seqq.* plano.
Locus Lunæ fictus. Definitio, *a.* 862.
prope verus, ibid.
Locus verus, ibid. quomodo supputetur, 863.
Locus medius Solis quomodo inveniatur, 704.
Locus opticus. Definitio, 364.
Locus opticus apparens. Definitio, 365.
Locus opticus verus. Definitio, ibid.
Locus physicus sideris. Definitio, *a.* 363.
Locus Solis in ecliptica quomodo observetur, 203.
Locus Solis verus quomodo supputetur, 720. *& seqq*
Locus Terræ, ubi Sol totus eclipsatus oritur vel occidit, quomodo determinetur, 1093.
Locus Terræ, ad quem pervenit centrum penumbræ quomodo determinetur, 1094.
Loca Terræ, quibus Sol oritur & occidit, in principio ac fine eclipsis terrestris quomodo determinetur, 1092.
Longitudines quænam visus comprehendere possit, *o.* 248. *& seqq.*
Longitudo Lunæ visa. Definitio, *a.* 989.

quomodo inveniatur, *a.* 990. 997.
Longitudo planetæ quomodo obfervetur, 559.
Longitudo planetæ vera quomodo fupputetur, 814.
Longitudo ftellæ. Definitio, *a.* 241. quomodo inveniatur, 243. 263. quomodo inveniatur ope globi, 312. quomodo ad datum annum computetur, 259.
Longitudo ftellarum fixarum quomodo mutetur, 251. quando uno gradu augeatur, 258.
Lucerna lumen valde intenfum projiciens quomodo conftruatur, *d.* 208.
Lumen. Definitio, *o.* 4. 5. quomodo propagetur, 45. 46. num unum officiat propagationi alterius, 99. *& feqq.* quomodo intendatur per lentes convexas, *d.* 203. *& feqq.* quomodo per fpecula concava, *c.* 224. *& feqq.* quomodo debilitetur per fpecula convexa, 191. *& feqq.* 195. per concava, 228. 229. quomodo in colores mutetur, *o.* 183. *& feqq.* quomodo reflectatur a fpeculis planis, 55. convexis, 144. *& feqq.* concavis, 208. *& feqq.* cylindricis, 277. 278. cylindricis concavis, 294. *& feqq.* ellipticis, 310. 311. quomodo refringatur in fuperficiebus planis, *d.* 49. *& feqq.* in lentibus convexis, 166. *& feqq.* utrinque convexis, 184. *& feqq.* concavis, 279. *& feqq.* fphæris pellucidis, 178. *& feqq.* lentibus plano-convexis, 166. *& feqq.* fuperficiebus fphæricis, 87. *& feqq.*
Luminis a duobus luminofis propagati ratio, *o.* 104. *& feqq.*
Lumen propagatum per radios convergentes quomodo crefcat, 89.
Lumen propagatum per radios divergentes quomodo decrefcat, 87. 88.
Lumen album quod fit mixtum, *o.* 186.
Lumen coloratum folare immutabile, 201. *& feqq.*
Lumen diurnum unde, *a.* 407. 408.
Lumen Lunæ undenam fit, *a.* [illegible].
Lumen Solis quomodo reflectatur a fpeculis parabolicis, *c.* 306. *& feqq.* cur non intendatur per reflexionem a fpeculis planis, 66. quomodo refringatur in lentibus plano-convexis & convexo-convexis, *d.* 197. quomodo in colores mutetur, 271. 272. quomodo per lentem concavam debilitetur, 228.
Lumen Solis per foramen angulofum tranfiens quando figuram circuli affumat, 296. *& feqq.*
Luminis folaris per foramen radiantis figura qualis fit, *o.* 290. *& feqq.*
Luminis folaris radii heterogenei quomodo a fe invicem feparentur, 200.
Lumen zodiacale a quibufnam obfervatum, *a.* 436. 440. quid fit, 437. *& feqq.* 441. *& feqq.*
Luna quale fit corpus, *a.* 453. 469. 479. unde lumen habeat, 460. cur fit luminare magnum, 457. ex qua materia conftet, 484. an femper æque diftincte videatur, 473. an Terræ femper eandem faciem obvertat, 1103. quod Telluri propior quam Sol, 452. quando in umbram Terræ incidat, 940.
Lunæ ætas media quomodo inveniatur; 959. 966.
Lunæ diameter apparens quomodo obfervetur, 548. quanta fit, 549.
Lunæ diftantia a Terra quomodo inveniatur, 888. 889. quanta fit, 893.
Lunæ eclipfatæ colores, 463. eorum caufa, 464. caufa diverfitatis, 465. 466.
Lunæ illuminatio quomodo fiat, 455. 456. ejus caufa, 460. a Terra facta, 914.
Lunæ magnitudo, 915.
Lunæ montes, valles & maria, 479.
Lunæ motus proprius quomodo innotuerit, 23. 24.
Lunæ orientis & occidentis figura ovalis feu elliptica, 475. ejus caufa, 476.
Lunæ fimilitudo cum Tellure, 487.
Lunatio. Definitio, *a.* 817.

[illegible]*oviales*, *a.* 501.
Lunula. Definitio, *d.* 20.
Lux. Definitio, *o.* 4. 5.
Lux clarior quibusnam conducat ad videndum, 396.
Lux debilior quibusnam conducat ad videndum, 395.
Lux nimia quod visui officiat, 390.

M.

Machina anamorphotica cylindrica, *c.* 293. conica, 302.
Machina catoptrica, in qua objecti imago multiplicatur, 137. in qua una multiplicatur & deformatur, 118.
Machina catoptrico-dioptrica. Definitio, *d.* 458.
Machina hydromantica, in qua imago spectatori pro arbitrio oculis subduci & adduci potest, *d.* 86.
Machina politoria quomodo construatur, *c.* 48. *d.* 539.
Maculæ Lunæ quales observentur, *a.* 468.
Maculæ Lunæ novæ, 468. quales sint, 472.
Macularum Solis phænomena, 411. theoria, 412. *& seqq.* motus, 422. undenam prodeant, 416. quid sint, 417. quomodo observentur, 427.
Maculæ Veneris, 494.
Magis myops quinam dicatur, *d.* 480. qualia ei conveniant perspicilla, 482.
Magis presbyta quinam dicatur, 520. qualia ei conveniant perspicilla, 522. quomodo determinentur, 523.
Magnitudo quando in vicinia minor appareat, quam in distantia remotiori, *o.* 254.
Magnitudinis visio, 209. *& seqq.*
Magnitudo apparens. Definitio, 208.
Magnitudinum apparentium theoria, 212. *& seqq.*
Manus sine corpore quando appareant in speculo plano, *c.* 113.
Maria in Luna num dentur, *a.* 479.
Mars. Definitio, 34. quale corpus, 524. similitudo cum Tellure, 525. phases, 491. motus vertiginis, 496. distantia a Terra, *a.* 899.
Mediatio cœli. Definitio, 272. quomodo inveniatur, 273. quomodo ope globi inveniatur, 315.
Medius motus Solis quomodo inveniatur, 672.
Mediorum motuum Solis Tabulæ quomodo construantur, 673.
Mediorum motuum planetarum superiorum Tabulæ quomodo construantur, 733.
Mediorum motuum planetarum inferiorum Tabulæ quomodo construantur, 753.
Mediorum motuum Lunæ Tabulæ quomodo construantur, 827.
Meniscus. Definitio, *d.* 20. theoria, 295. *& seqq.* quando æquipolleat lenti utrinque æqualiter convexæ, 301. 302. quando plano-convexæ, 304. 305. quando sphæræ, 306. 307. quando utrinque concavæ, 315. 316. quando plano-concavæ, 317. 318. quænam sit lens caustica, 324.
Menisci ellipticæ & hyperbolicæ num præstent sphæricis, 325.
Menisci impropriæ quænam dicantur, 322.
Menisci propriæ quænam dicantur, 322.
Mensis anomalisticus. Definitio, *a.* 818. quantitas quomodo inveniatur, 832.
Mensis draconticus. Definitio, 819. quantitas quomodo inveniatur, 831.
Mensis periodicus. Definitio, 816. quantitas, 835. quomodo ea inveniatur, 825.
Mensis synodicus. Definitio, 817. quantitas, 835. quomodo ea inveniatur, 825.
Mercurius. Definitio, 36. phases, 491. 538. in Sole observatus, 492. num circa axem gyretur, 498.
Mercurii digressiones maximæ a Sole quomodo observentur, 740.
Mercurius Jovialis, 507.
Meridianus. Definitio, 72.
Meridianorum differentia horaria quomodo inveniatur, 979.
Meridianus universalis. Definitio, 1087. positio super disco Terræ quomodo inveniatur, 1089.

Meridiei momentum quomodo obſervetur, *a.* 124.
Micrometri conſtructio & uſus, 544. *& ſeqq.*
Microſcropium. Definitio, *d.* 401. quomodo optima parentur, 456.
Microſcopii aquei conſtructio, 436.
Microſcopium compoſitum. Definitio, 405. conſtructio, 439.
Microſcopii reflectentis conſtructio, 452. inventor, 453.
Microſcopium ſimplex. Definitio, 404. theoria, 407. *& ſeqq.* conſtructio, 421.
Microſcopia ſimplicia ex ſphærulis conſtantia quomodo fiant, 431. theoria, 423. *& ſeqq.* conſtructio, 434.
Minus presbyta quinam dicatur, 520. qualia ei conveniant perſpicilla, 522. quomodo determinentur, 523.
Mobilia quando quieſcere videatur, *o.* 361. *& ſeqq.* 374. quando retrogradi, 368.
Modulus pro ſpeculis ſphæricis concavis fundendis quomodo paretur, *c.* 199.
Monoculus quando quis appareat in ſpeculo plano, *c.* 113.
Montes in Luna num dentur, *a.* 479.
Montium lunarium altitudo quomodo inveniatur, 917. nomina, 918. umbræ, 483.
Montes in Venere obſervati, 493.
Motus viſio, *o.* 354. *& ſeqq.*
Motus anomaliæ quid ſit, *a.* 820.
Motus aphelii Tabulæ pro planetis ſuperioribus quomodo conſtruantur, 737. quomodo pro inferioribus, 746.
Motus apogæi lunaris diurnis, 835.
Motus communis ſive *diurnus*, 21.
Motus horarius Lunæ & Solis verus quomodo inveniatur, 968.
Motuum horariorum Lunæ & Solis verorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 969.
Motus horarius in eclipſi terreſtri. Definitio, 1068.
Motus horarius Lunæ a Sole viſus. Definitio, *a.* 994.
Motus imaginis in ſpeculo plano, *c.* 95. *& ſeqq.*
Motus latitudinis Lunæ diurnus, *a.* 836.
Motuum latitudinis Tabulæ pro Luna quomodo conſtruantur, 832.
Motus librationis. Definitio, 1104. cauſa, 1106.
Motus Lunæ ab apogæo diurnus, 836.
Motus Lunæ a Sole quid ſit, 820. quomodo inveniatur, 828.
Motus Lunæ a Sole viſus quomodo inveniatur, 998.
Motus Lunæ in latitudinem quid ſit, 820.
Motus lunaris phænomena, 821. 822.
Motus medius. Definitio, 643. quidnam ad eum determinandum requiratur, 644.
Motuum mediorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 673. 827.
Motus medius Lunæ diurnus, 835.
Motuum nodorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 779.
Motus nodi Lunæ diurnus, 835.
Motus periodicus in longitudinem quid ſit, *a.* 820.
Motus planetarum phœnomena obſervata, 562. *& ſeqq.* demonſtrata, 571. *& ſeqq.*
Motus primus. Definitio, *a.* 21.
primi mobilis, 21.
Motus proprius, ſive *ſecundus*. Definitio, 30.
Motus proprius fixarum qualis ſit, 252. quantitas annua quomodo inveniatur, 255.
Motus vertiginis Lunæ, 1107. Solis, 422. 423. planetarum, 496. *& ſeqq.*
Motus verus. Definitio, 645.
Mundus num in Aſtronomia pro ſphæra cava haberi poſſit, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ, 18.
Myops. Definitio, *o.* 384. quinam ſit, 401. 402. cur in luce minore legere poſſit quam presbyta, 408. cur legat ſcripturam minutam, 426. cur remota in ſpeculo

convexo distinctius videat, quam directe, *c.* 193. qualia perspicilla ei conveniant, *d.* 479. quomodo hæc determinentur, 483. 485. quomodo se ligantur, 525.

N.

NOctis longitudo quomodo inveniatur, *a.* 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.
Nodus. Definitio, 765.
Nodus australis, 765.
ascendens, ibid.
borealis, ibid.
descendens, ibid.
Nodi planetæ quomodo observentur, 777.
Nodorum planetarum locus ad A. 1700. 780. motus quomodo inveniatur, 778.
Nodus orbitæ cometæ quomodo inveniatur, 1138.
Nodi Lunæ quomodo moveantur, 830. eorum locus quomodo inveniatur, 829.
Nonagesimus. Definitio, 220.
Novilunium medium quomodo supputetur, 959. 967. ejus epocha quomodo inveniatur, 960.
Novilunium verum quomodo supputetur, 970.

O.

OBjectum quodnam videatur, *o.* 47. ubi videatur, 58.
Objectum oculo tectum quando videatur in speculo plano, *c.* 132.
ad *Objectum procul remotum* quando nunquam perveniatur, *o.* 370.
Objectum totum quando visu comprehendatur, 237. quando non, 238.
Objectum valde minutum quando distinctius videatur, 425.
Objectum verum per polyedrum visum quomodo discernatur ab apparentibus, *d.* 274.
Obliquitas eclipticæ quid & quanta sit, *a.* 178.
Observationes astronomicæ. Definitio, 5.
Observationes communes, *a.* 4.
Occasus siderum. Definitio, 19.
Occasus acronychus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 285.
Occasus cosmicus. Definitio, 278. quomodo inveniatur, 285. quomodo ope globi inveniatur, 319.
Occasus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi inveniatur, 331.
Occasus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi inveniatur, 320.
Occasus stellæ fixæ quomodo inveniatur, 270. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Octilis, 931.
Oculus. Definitio, *o.* 16. 17. structura explicata, 78. quantum uno obtutu capiat spatium, 235. 236. quando ad objectum accedens & ab eodem recedens objectum idem semper videat sub eadem magnitudine, 232. 233.
Oculi artificialis constructio, 79.
Oculus valens quinam dicatur, 379. quinam sit, 404. 405. 406.
Oppositio planetarum. Definitio, *a.* 536. 928. signum, 929.
Oppositio planetarum superiorum & Solis quomodo observetur, 727.
Oppositio visibilis directa. Definitio, *o.* 267.
obliqua, ibid.
Optica. Definitio, *o.* 1. significatus latior, 2.
Orbitæ cometarum quales sint, *a.* 1164. 1165. 1166.
Orbitæ planetarum ellipticæ quomodo primum detectæ, 681. earum axis minor quomodo inveniatur, 696. & seqq.
Orbita Solis a circulari parum differt, 676.
Orbitarum dimensiones in semidiametris terrestribus quomodo inveniantur, 907. quantæ sint, 908.
Ortus siderum. Definitio, *a.* 19.
Ortus acronychus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 284.
Ortus cosmicus. Definitio, 278. quomodo inve-

inveniatur, *a.* 283. quomodo ope globi inveniatur, 319.
Ortus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi reperiatur, 331.
Ortus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi reperiatur, 318.
Ortus stellæ fixæ quomodo inveniatur, 271. quomodo ope globi inveniatur, 322.

P.

P*Arallaxis.* Definitio, *a.* 367. theoria, 379. *& seqq.* quomodo altitudinem immutet, 368. quid proprie sit, 369. ubi nulla, 328. quomodo ascensionem & descensionem rectam & obliquam, declinationem, latitudinem & longitudinem mutet, 372.
Parallaxis altitudinis quomodo inveniatur, 388. quomodo cometæ, 1145. quomodo Lunæ, 887.
Parallaxis ascensionis. Definitio, 375. quomodo inveniatur, 390.
Parallaxis ascensionis rectæ fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
Parallaxis declinationis. Definitio, 374. quomodo inveniatur, 390.
Parallaxis declinationis fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
Parallaxis descensionis. Definitio, 375. quomodo inveniatur, 390.
Parallaxis latitudinis. Definitio, 377. quomodo inveniatur, 390. 391.
Parallaxis latitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
Parallaxis longitudinis. Definitio, 376. quomodo inveniatur, 390. 391.
Parallaxis longitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis inveniatur, 598. 599.
Parallaxis fixarum annua. Definitio, *a.* 596. quinam eam observare tentaverint, 600. *& seqq.* quanta sit, 608.
Parallaxis fixarum absoluta. Definitio. *a.* 596. an semper eadem, 597.
Parallaxis horizontalis quomodo inveniatur, *a.* 387.
Parallaxis horizontalis Lunæ quanta sit, 892.
Parallaxium horizontalium Lunæ Tabulæ quomodo construantur, 891.
Parallaxis horizontalis Solis quomodo inveniatur, 895.
Parallaxis Lunæ a Sole. Definitio, 99. quanta sit, 992.
Parallaxis Martis diurna quomodo observetur, 897. *& seqq.*
Parallaxis Orbis. Definitio, 763. 776. mensura, 764. quomodo supputetur, 792.
Parallaxis Veneris diurna quomodo observetur, 897. *& seqq.*
Parietum scenographia, *p.* 71.
Pars media quænam dicatur in Trigonometria sphærica, *f.* 92.
Partes conjunctæ triangulorum sphæricorum quænam dicantur, 93.
Partes laterales quænam dicantur in triangulo sphærico, *f.* 115.
Partes sejunctæ trianguli sphærici quænam dicantur, 95.
Particula exsors. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 850.
Pavimentum lapidibus stratum quomodo projiciatur, *p.* 46.
Penduli ad singula minuta secunda oscillantis longitudo quomodo in diversis Telluris locis se habeat, *a.* 567.
Peninsulæ in Luna, 480.
Pentagoni regularis projectio, *p.* 49.
Penumbra. Definitio, *a.* 1059. quantum spatium in Terra occupet quomodo determinetur, 1058. via ejus quomodo in globo terrestri vel mappa geographica delineetur, 1095.
Perigæum. Definitio, 635.
Perihelium. Definitio, 635. quomodo locus ejus observetur, 674.
Perihelii Telluris locus quomodo inveniatur, 810.
Periodis planetarum circa solem quantæ in singulis, 732. 752. 800.

Perpendicularia quando in fpeculo convexo videantur everfa, *c.* 182.
Perfpectiva. Definitio, *p.* 1.
Perfpicilla. Definitio, *d.* 478. qualia myopibus conveniant, 479. 482. qualia presbytis, 519. quomodo feligantur, 525.
Phafes Lunæ quomodo fe habeant, *a.* 455.
Pilarum fcenographia, *p.* 71.
Pifces, *a.* 160.
Planetæ. Definitio, 31. quomodo dignofcantur, 37. figna, 38. quomodo moveantur circa Solem, 633. 634. quomodo fecunda inæqualitate exuantur, 812. quomodo locus eorum in globo dato tempore exhibeatur, 314. quinam Soli opponantur, 537.
Planetarum diftantiæ a Sole quomodo reperiantur, 796. quantæ fint, 797. 904.
Planetarum diftantiæ a Terra quomodo inveniantur, *a.* 903. quantæ fint, 904. *& feqq.* num varient, 550. *& feqq.*
Planetarum motus proprius quomodo innotuerit, 28. 29.
Planetarum occultationes, 541.
Planetarum orbitæ quomodo fe habeant refpectu Terræ, 590.
Planetarum ratio ad Terram quoad fuperficiem & foliditatem, 921. 922.
Planetarum femidiametri veræ quomodo inveniantur, 919. quantæ fint, 920.
Planeta directus quando dicatur, 534.
retrogradus, 534.
ftationarius, 534.
Planetæ inferiores quinam dicantur, 489. eorum revolutio circa Solem quomodo inveniatur, 731.
Planetæ primarii. Definitio, 529. quinam fint, 631.
Planetæ fecundarii. Definitio, 529. quinam fint, 631.
Planetæ fuperiores. Definitio, 489. revolutio circa Solem quomodo inveniatur, 729.
Plantæ num dentur in Luna, 488.
Planum quomodo refringat lumen, *d.* 49. *& feqq.*
Planum geometricum. Definitio, *p.* 8.
horizontale, 9.
horopteris, 343.
objectivum, 27.
perfpectivum, 7.
refractionis, *d.* 8.
verticale, *p.* 10.
Plenilunium medium quomodo fupputetur, *a.* 959. 967.
Pleniluniorum mediorum epocha quomodo inveniatur, 961.
Plenilunium verum quomodo fupputetur, 970.
Polemofcopium. Definitio, *d.* 460. conftructio, 468.
Poli circuli in fphæra. Definitio, *f.* 12.
Poli eclipticæ diftantia a polo mundi, *a.* 178.
Poli meridiani ubinam fint, 87. qualia fint puncta, 88.
Poli Mundi Definitio, 46. num fint mutabiles, 132. num in eadem revolutione mutentur, 114.
Poli fphæræ. Definitio, *f.* 11.
Polyedrum quidnam dicatur in Dioptrica, *d.* 262. ejus theoria, 263. *& feqq.* ufus in camera obfcura, 276.
Polyoptrum. Definitio, 466. conftructio, 470.
Presbyta. Definitio, *o.* 381. quinam fit, 398. 399.
Prifmatis fcenographia, *p.* 56. fcenographice delineati umbra, 85.
Prifmatis cavi fcenographia, 70.
Prifmatis in aëre penduli umbra, 92.
Prifmatis quinquangularis cavi fcenographia, 59.
Profunditas. Definitio, *a.* 73. menfura, 94.
Profunditas vera, 73. *apparens*, 73.
Profunditatis poli menfura, 96.
Profunditas Solis quomodo obfervetur, 287. quomodo fub finem crepufculi vefpertini

vespertini & initium matutini inveniatur, *a.* 397.
Projectio. Definitio, *p.* 22.
Projectio lineæ, plani, solidi, ibid.
Projectio monstrosa. Vide Anamorphosis.
Promontoria Lunæ, *a.* 481.
Proportionalium quatitatum symptoma quoddam, *f.* 145.
Prosthaphæresis. Definitio, 652.
Puncta accidentalia quænam in Perspectiva dicantur, *p.* 80.
Puncta æquinoctialia. Definitio, *a.* 158. ubinam sint, 177.
Puncta solstitialia. Definitio, 159. ubinam sint, 177. quomodo sibi invicem opponantur, 169. 170. quanto intervallo distent ab æquatore, 176.
Punctum æstivum. Definitio, 159.
autumnale, 158.
brumale, sive *hibernum*, 159.
Punctum concursus. Definitio, *d.* 22. in superficiebus planis, 73. & *seqq.* quomodo in his determinetur, 76. in superficie cava, 112. & *seqq.* quomodo in hac determinetur, 113. quomodo in superficie sphærica cava, 145. quomodo in convexa, 122. 155.
Punctum dispersus. Definitio, 23. in superficiebus planis, 56. & *seqq.* in vitris planis, 57. & *seqq.* in superficie concava, 104. & *seqq.* in superficie sphærica concava, 139. in superficie sphærica convexa, 96. & *seqq.* 121. 128. 133.
Punctum distantiæ. Definitio, *p.* 19.
Punctum eclipticæ, cum quo stella culminat, quomodo determinetur, *a.* 232. quomodo inveniatur, cum quo oritur, 282.
Punctum incidentiæ. Definitio, *c.* 13. *d.* 7.
Punctum objectivum. Definitio, *p.* 27. apparentia quomodo exhibeatur, 33.
Punctum oculi, sive *visus.* Definitio, 13. ubinam sit, 14.
Punctum oriens eclipticæ quomodo computetur, *a.* 218.
Punctum principale, *p.* 13.
Punctum radians. Definitio, *o.* 8.
reflexionis, *c* 13.
refractionis, *d.* 7.
suboculare, *c.* 283.
verticale, *a.* 58. 59. 60.
vernale, 158.
Pupilla. Definitio, *o.* 26. magnitudo variabilis, 55. & *seqq.* qualis in oculo valente, 394.
Pyramis optica. Definitio, *p.* 4.
Pyramidis basi insistentis scenographia, 62.
Pyramidis scenographice delineatæ umbræ, 88. 90.
Pyramidis truncatæ scenographia, 65. 67.

Q.

Quadrantis astronomici constructio, *a.* 106.
Quadrati apparentiæ quomodo inveniantur, *p.* 40. 42. 44.
Quadratum quando instar trapezii appareat, *o.* 283.
Quadratum geometricum quale sit instrumentum & quomodo construatur, 172. usus, 174. & *seqq.*
Quadratus quinam adspectus dicatur, *a.* 928. ejus signum, 929.
Quies mobilis apparens, *o.* 361. & *seqq.* 374.
Quiescens quando moveri videatur, 366. 374 quando in plagam contrariam moveri videatur, 369. 376. & *seqq.*
Quincunx quinam adspectus dicatur, *a.* 931.

R.

Radices motus Solis medii & apogæi quomodo constituantur, *a.* 718.
Radicum mediorum motuum & aphelii pro planetis superioribus Tabulæ quomodo construantur, 736.
Radicum nodorum Tabulæ quomodo construantur, 779.
Radiare quando visibile dicatur, *o.* 13. quænam corpora radient, 14. quomodo radient, 59. 60.
Radiaturæ locus. Definitio, 15.
Radii colorati, rubeus, flavus &c. Definitio, 177. num mutentur per reflexionem, 187.

Radii divergentes quando haberi possint pro parallelis, *o.* 93. 94. quando in pupillam fere paralleli incidant, 95.
Radii obliqui in superficie cava, *d.* 139. *& seq.* in convexa refractio, 121. *& seq.*
Radii optici. Definitio, *p.* 5.
Radii paralleli quomodo in plana superficie refringantur, *d.* 49. quomodo in cava, 104. quomodo in convexa, 87. *& seqq.*
Radiorum divergentia, *o.* 49.
Radius luminis. Definitio, *o.* 6.
Radius directus, 7.
incidens, *c.* 14. *d.* 4.
Radius obliquus quomodo refringatur, *d.* 56. *& seqq.*
Radius perpendicularis cur intensior obliquo, *o.* 84.
Radius reflexus. Definitio, *c.* 15.
refractus, *d.* 5.
Rectangulum quando instar trapezii appareat, *o.* 283.
Reductio ad eclipticam. Definitio, *a.* 770. quomodo inveniatur, 786.
Reductionum Tabulæ quomodo construantur, 787.
Reflexibilitas radiorum. Definitio, *o.* 181.
major, 182.
minor, ibid.
Reflexibilitas radiorum diversa evicta, 195. *& seqq.*
Reflexionis lex, *c.* 24. *& seqq.*
Reflexio luminis. Definitio, 38. evicta, 50. 53. 54. quid dicatur in theoria Lunæ, *a.* 857.
Refrangibilitas radiorum. Definitio, *o.* 179.
major, 180.
minor, ibid.
Refrangibilitas radiorum diversa evicta, 190. *& seqq.*
Refractio. Definitio, *o.* 39. evicta, 54. in vitro qua lege fiat, *d.* 25. 26. in aqua, 28. in spiritu vini & aëre, *ibid.*
Refractionis lex prope vera, *d.* 33. 34. 39. vera, 25. *& seqq.* 42.
Refractionis lex quomodo per experimenta detegatur, *d.* 24. quomodo a priori analytice, 36.
Refractionum Tabula, *a.* 349.
Refractio luminis in atmosphæra, *a.* 334. quod augeat altitudinem Solis & stellarum, 335. quomodo mutet ascensionem rectam, obliquam, declinationem, 352. longitudinem item & latitudinem, 353. num sit in dato loco constans, 341. ubi maxima, 344. quomodo decrescat versus zenith, 344. an eadem in Sole & stellis, 345. quomodo observetur, 347.
Refractio altitudinis. Definitio, 355.
Refractio ascensionis & descensionis. Definitio, 356. quomodo inveniatur, 360.
Refractio declinationis. Definitio, 356. quomodo inveniatur, 360.
Refractio latitudinis. Definitio, 359. quomodo inveniatur, 361.
Refractio longitudinis. Definitio, 358. quomodo inveniatur, 361.
Regula catholica Trigonometriæ sphæricæ, *f.* 112.
Regula sinuum catholica in Trigonometria, 101. 102.
Regula tangentium catholica in Trigonometria, 109. 110.
Remotiora quando appareant sublimiora, *o.* 318. 319. 323. quando depressiora, 321. 322. 325. quomodo appareant ad dextram vel sinistram sita, 330. 331.
Remotius quando tardius moveri videatur, 354. quando eadem celeritate, 355.
Remotorum visio qualis sit, 314.
Repræsentatio. Definitio, *p.* 22.
Rerum super pavimento elevatarum scenographia, 76.
Retina, *o.* 30.
Retrogradatio mobilis apparens, *o.* 368.
Retrogradatio planetæ. Definitio, *a.* 535. explicata, 587. 588. 591. 592.
Revelatio planetarum circa Solem quomodo determinetur, 729. 751. 782.

S.

Satellites planetæ. Definitio, *a.* 489. distantiæ veræ a suis primariis quomodo inveniantur, 923.
Satellites Jovis a quonam fuerint detecti, 500. qualia sint corpora, 504. quales sint planetæ, 530.
Satellitum Jovis figura, 509. maculæ, 510. atmosphæra alterabilis, 511. tempora periodica quomodo inveniantur, 882. eclipses, 502. 505. distantiæ a Jove, 924.
Satellites Jovis spurii, *a.* 519. qualia sint corpora, 523.
Satellites Saturni, 519. quomodo observati, *ibid.* quales sint planetæ, 530.
Satellitum Saturni distantiæ a Saturno, 884. 925. eclipsis, 520. 521. tempora periodica quomodo inveniantur, 882.
Saturnus. Definitio, 32. quale corpus, 523. 524. num circa axem gyretur, 498.
Saturni facies qualis observetur, 513. 514. similitudo cum Tellure, 525. a Luna occultandi figura ovalis, 475. hujus causa, 476.
Saturnus Jovialis, 501.
Scenographia. Definitio, *p.* 26. quomodo fiat, 55. & *seqq.*
Scenographia mechanica, 87.
Sclerotica tunica. Definitio, *o.* 21. cur sit tenax, 22.
Scorpius, *a.* 160.
Scrupula defectus. Definitio, 949. quomodo inveniatur pro Luna, 951. quomodo pro Sole, 1001.
Scrupula dimidiæ durationis. Definitio, 952. quomodo inveniantur in eclipsi lunari, 956. quomodo in solari, 1003.
Scrupula dimidiæ moræ. Definitio, 953. quomodo inveniantur, 957.
Scrupula emersionis. Definitio, 955. quomodo inveniantur, 958.
Scrupula incidentiæ, sive *casus.* Definitio, 954. quomodo inveniantur, 958.
Scrupula menstrua longitudinis. Definitio, *a.* 842. quomodo inveniantur, 870.
Scrupula latitudinis. Definitio, 871.
Sectio quid dicatur in Perspectiva, *p.* 6.
Sectio obliqua coni scaleni quando circulus, *f.* 151.
Sectio obliqua cylindri qualis sit, *c.* 276.
Sectoris circuli ad aream circuli ratio, *a.* 683.
Semidiametri apparentes Lunæ & Solis quomodo ad datum tempus inveniantur, 972.
Semidiametrorum apparentium Lunæ & Solis Tabulæ quomodo construantur, 973.
Semidiameter apparens penumbræ. Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.
Semidiameter apparens Terræ in Luna vel planeta quanta sit, 1015. quod in Sole insensibilis, 1118.
Semidiameter penumbræ. Definitio, 1050.
Semidiameter Solis quomodo in camera obscura inveniatur, *o.* 306.
Semidiameter umbræ Lunaris apparens, *a.* 1029. quomodo inveniatur, 1030.
Semisextus quinam adspectus dicatur, 931.
Sesquadrus quinam sit adspectus, 931.
Sextilis. Definitio, 928. signum, 929.
Sidera Medicæa, 501.
Sidera Urbanoctaviana, 519.
Signum cæleste. Definitio, 160.
Signorum cælestium nomina, ibid.
Signa æstiva quænam sint, 161.
australia, sive *meridionalia*, 162.
autumnalia, 161.
borealia, seu *septentrionalia*, 162.
vernalia, ibid.
Sinus & arcus differentia quomodo inveniatur, *a.* 695.
Sinus summæ duorum arcuum quadrante minorum ratio ad sinum differentiæ eorundem, *f.* 143.
Sinus totius ratio ad tangentem & cotangentem, 104.
Sinuum versorum ratio, *a.* 659. 660.
Sirius num in speculo convexo sub aquis videatur in diebus canicularibus, *c.* 177.

[illegible]bilis quando erectus, *o.* 346. quando inversus, 347.
Sol qualis sit substantia, 431. num ignis purus, 434. an mutationibus obnoxius, 421. cur sit luminare magnum, 409. quomodo in verticali primario observetur, 127. in quonam semicirculo eclipticæ diutius commoretur, 655. 656.
Sol quid dicatur in oculo, *o.* 25.
Solis in quatuor eclipticæ quadrantibus mora, *a.* 668. ad Terram ratio quoad soliditatem & superficiem, 916.
Solis diameter apparens quomodo observetur, 547. 548. qualis observetur, 549.
Solis distantia a Terra quomodo inveniatur, 894. quanta sit, 896.
Solis figura qualis sit, 425. 435.
Solis locus in ecliptica quomodo observetur, 203.
Solis motus proprius quomodo innotuerit, 26. 27. quomodo observetur, 155. 156.
Solis orientis & occidentis figura ovalis seu *elliptica*, 475. ejus causa, 476.
Solidi cujuscunque scenographia, *p.* 56.
Soliditatum planetarum ratio ad soliditatem Solis quomodo inveniatur, *a.* 910. qualis sit, 911.
Solstitium. Definitio, *a.* 159. quomodo observetur, 657. 666.
Solstitium æstivum, 159.
brumale, ibid.
Spatia amplitudinem visus in diversis distantiis definientia quomodo se habeant, *o.* 243. 244.
Specillum. Definitio, *d.* 15.
Specularia. Definitio, *c.* 1.
Speculum. Definitio, 3. theoria analytice investigata, 312. *& seqq.*
Speculum planum. Definitio, 5. phænomena, 51. *& seqq.* cur lumen Solis non intendat, 66. quantum esse debeat, ut te integrum in eo contuearis, 77. 80. item objectum quodcunque aliud, 78. 84. quomodo poliatur, 43. *& seqq.* quomodo conficiatur, 49.
Speculum cavum. Definitio, *c.* 7. proprietates & symptomata, 108. *& seqq.* quomodo ex metallo paretur, 201. *& seqq.* quomodo vitreum terminetur, 207.
Speculum chalybeum quodnam dicatur, 203.
Speculum conicum. Definitio, 10. quomodo fiat, 142. 262. usus in anamorphosibus, 301.
Speculum convexum. Definitio, 6. phænomena, 144. *& seqq.* usus in Arte pictoria, 176. quomodo fiat, 140.
Speculum cylindricum. Definitio, *c.* 9.
Speculum cylindricum convexum. Definitio, 9. theoria, 266. *& seqq.* 277. 278. quomodo fiat, 262.
Speculum cylindricum concavum. Definitio, 9. theoria, 294. *& seqq.*
Speculum ellipticum. Definitio, 12. cur difficillime paretur, 263. quomodo lumen in foco uno positum reflectat, 310. 311.
Speculum hyperbolicum. Definitio, *c.* 11. cur difficillime paretur, 142.
Speculum metallicum quomodo fiat, 201. quomodo poliatur, 204.
Speculum parabolicum. Definitio, 11. quomodo lumen Solis reflectat, 306. cur sit ustoriorum præstantissimum, 307. cur difficillime paretur, 263.
Specula prismatica vitrea quomodo fiant, 142.
Specula pyramidalia quomodo fiant, 142. 262. usus in anamorphosibus, 304. *& seqq.*
Speculum sphæricum. Definitio, 8.
Specula ustoria quænam sint, 214. theoria, 209. *& seqq.* 215. *& seqq.* phænomena, 221. inter alia celebria, 220. 221. Tschirnhusiana, 221. quomodo ex ligno, gypso, charta, stramine & auro strepero parentur, 219.
Sphæra. Definitio, *s.* 6. proprietates & symptomata, 13. *& seqq.* quando instar circuli appareat, *o.* 277.
Sphæræ illuminatio quomodo se habeat, *o.* 111. *& seqq.* pars illuminata quo-

modo inveniatur, *o.* 115. *& seqq.*
Sphæræ pars quanta videatur, 246. 247.
Sphæræ pars hemisphærio major quando ab oculo videri possit, 428. quando minor, 429.
Sphærarum theoria refractionis, *d.* 178. *& seqq.*
Sphæra activitatis luminis quomodo augeatur, *o.* 108. 109.
Sphæra armillaris, *a.* 189.
Sphæra mundana num motu æquabili moveatur, 135. 136.
Sphærica. Definitio, *f.* 1.
Statio planetæ. Definitio, *a.* 532. explicata, 587. 588.
Stellæ erraticæ. Definitio, 31.
Stellæ fixæ. Definitio, 25. quomodo interdiu observentur, 230. beneficio globi cognoscantur, 317.
Stellarum distantiæ quomodo observentur, 225. distantia a Terra æqualis quod appareat, 8. distantia a vertice num ob motum annuum Telluris mutetur, 594. num hæc variatio cum parallaxi annua conveniat, 600. revolutio diurna num constantis magnitudinis, 110. mora supra & infra horizontem quomodo computetur, 268. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Stellæ novæ quænam sint, 1127. 1128.
Subocularis quænam linea dicatur, *c.* 283.
Superficies quando instar lineæ appareat, *o.* 273.
Superficies Lunæ quomodo se habeat ad superficiem Terræ, *a.* 913.
Superficies planetæ quomodo se habeat ad superficiem Solis, 911. quomodo ratio hæc inveniatur, 910.
Superficies refringens. Definitio, *d.* 6.
Synodus. Definitio, *a.* 535.
Systema Copernicanũ quodnam dicatur, 632.
Systema planetarium. Definitio, 528. explicatum, 630.
Systema Terræ motæ an Scripturæ adversum, 626. 627.
Systema Terræ quiescentis num in Astronomia & Physica usui sit, *a.* 621.
Systema Tychonicum quodnam dicatur, 632.

T.

Tabula quid dicatur in perspectiva, *p.* 6.
Tabularum astronomicarum nova forma, *a.* 723.
Tabulæ latitudinariæ quænam dicantur, 791.
Tangentium ratio, 794.
Taurus, 160.
Telescopium. Definitio, *d.* 326. inventor, 327. quomodo in microscopium convertatur, *d.* 454. 455. quomodo longius a tubi molimine liberetur, 383. quantum augeat objecta, quomodo observetur, 399.
Telescopium astronomicum. Vide *Tubus astronomicus.*
Telescopium terrestre Vide *Tubus terrestris.*
Telescopium catadioptricum in usum observationum cœlestium quomodo construatur, *d.* 385.
Tempus, quo arcus æquatoris per meridianum transit, quomodo computetur, *a.* 211. quo stella culminat, quomodo inveniatur, 294. nocturnum quomodo observetur, 295. 296. quomodo computetur, 297. 298.
Tempus æquale quam habeat mensuram, 710.
Tempus apparens, sive *verum.* Definitio, 713. quomodo in medium convertatur, 715.
Tempus incidentiæ & repletionis in eclipsi Solis quomodo determinetur, 1004.
Tempus medium. Definitio, 712. quomodo in apparens convertatur, 715.
Tempus obscurationis maximæ in eclipsi terrestri quomodo inveniatur, 1084.
Temporum periodicorum planetarum circa Solem ratio, *a.* 779. satellitum Jovis & Saturni circa suum primarium, 885.
Tenebræ. Definitio, *o.* 122.
Terra num moveatur motu vertiginis

& motu

[...]u annuo circa Solem, *a.* 622. quando in umbram Lunæ incurrere nequeat, 1026. quando incurrat, 1027.
Terræ hemisphærium quomodo in Luna appareat, 1014.
Terræ motæ systema qualia admittat phænomena, 585. *& seqq.*
Terræ motus a quibusnam fuerit defensus, 625. num S.S. adversus, 626. num a membro Ecclesiæ Romanæ salva conscientia admitti possit, 628.
Terræ obscuratio quando maxima, 1071.
Terræ quiescentis systema qualia admittat phænomena, 611. *& seqq.*
Tessellatæ imagines quomodo construantur, quæ in partes dissectæ oculo integræ appareant, *o.* 312.
Tetraëdri super angulo solido constituti scenographia, *p.* 68. scenographice delineati umbra, 89.
Tetragonus qualis sit adspectus, *a.* 928. signum, 929.
Theatrorum figura optima, *o.* 230. 231.
Theoria planetarum, *a.* 633. *& seqq.*
Transitus cometæ per eclipticam quomodo inveniatur, 1140. item per æquatorem, 1141.
Tremor circa limbum Lunæ in eclipsi Solis totali observatus, *a.* 454.
Trianguli apparentia quomodo inveniatur, *p.* 38.
Triangulum æquatorium quodnam a KEPLERO in theoria planetarum elliptica dicatur, *a.* 688.
Triangulum opticum. Definitio, *p.* 4.
Triangulum sphæricum. Definitio, *f.* 3. proprietates, 55. *& seqq.*
Triangulorum rectangulorum proprietates, *f.* 49.
Triangulum sphæricum. Definitio, 3. proprietates, 136. *& seqq.* 144. 146. 148. *& seqq.* 354. *& seqq.*
Trianguli sphærici æquicruri proprietas, 147.
Triangulorum sphæricorum obliquangulorum proprietates, *f.* 154. *& seqq.* resolutio, 158. *& seqq.*
Triangulorum sphæricorum rectangulorum proprietates, 98. *& seqq.* 165. *& seqq.* resolutio, 114. *& seqq.* 134.
Tridecilis quinam sit adspectus, *a.* 931.
Trigonometria catholica, *f.* 103. 111.
Trigonometria sphærica. Definitio, 2.
Trigonus, sive *Trinus.* Definitio, 928. signum, 929.
Trioctilis, quinam adspectus dicatur, 931.
Tritura vitrorum quomodo fiat, *d.* 533. 535.
Tropici. Definitio, *a.* 181. distantia quanta, 182.
Tropicus cancri. Definitio, 181.
capricorni, 181.
Tubus. Definitio, *d.* 326.
Tubus astronomicus. Definitio, 333. constructio, 358. proprietates, 359. *& seqq.* quomodo construatur, 376. quomodo in terrestrem convertatur, 388.
Tubus ductitius in usum telescopii quomodo construatur, *d.* 357.
Tubus Galilæanus. Definitio, 331. constructio, 340. proprietates, 341. *& seqq.*
Tubus Hollandicus. Vide *Galilæanus.*
Tubi Newtoniani constructio, 376.
Tubus terrestris. Definitio, 334. constructio, 387.
Tunica Ruyschiana num in oculo detur, *o.* 32.

V.

Valles in Luna num dentur, *a.* 479.
Variatio in motu Lunæ quid dicatur, 857. quomodo inveniatur, 860.
Variatio maxima quanta sit, 859. quomodo inveniatur, 858.
Vas hydromanticum. Definitio, *d.* 462. constructio, 470.
Venus. Definitio, *a.* 35. quale corpus, 524. num Terræ similis, 525.
Veneris digressiones maximæ a Sole quomodo observentur, *a.* 740.

Veneris distantia a Terra, *a.* 901.
macula, 494.
motus vertiginis, 496. 497.
Veneris phases, quomodo appareant, 491. 538. quales sint in conjunctione, 491.
Venus Jovialis, 501.
Vertex coni umbrosi, 1041.
Verticalis primarius. Definitio, 72.
Via cometæ quomodo in globo designetur, 1142.
Via Lunæ a Sole, 1062.
Via penumbræ. Definitio, 1061. qualis sit, 1064.
Via umbræ quænam sit, 1062.
Vicina cur distinctius videantur remotis, *o.* 72. cur majora appareant remotioribus, 211.
Vicinius quando celerius moveri videatur, 358. quomodo ad alia remotiora relatum appareat, 333.
Virgo, *a.* 160.
Visibile quomodo in oculo delineetur, *o.* 76. quando non videatur, 71. quando clarius, 390. cur non prorsus distincte, 72. quando moveri, 68. augeri, 371. minui 372. proprius accessisse videatur, 373. quando majus, quando minus appareat, 66. quomodo per lentem convexam, *d.* 248. 252. *&* *seqq.* quotuplex videatur per polyhedrum, 166. 268. quomodo radiet, *o.* 59. 60. cur duobus oculis unicum videatur, 345. quando geminatum, 350. *&* *seqq.* quomodo appareat per lentem concavam, *d.* 193. oblique oppositum quantum appareat, *o.* 268. *&* *seqq.*
Visibilia quando æqualia appareant, *o.* 67.
Visibilis locus ubinam sit, 344. *&* *seqq.*
Visibilium in camera obscura repræsentatio, *o.* 110. *&* *seqq.* *d.* 236. *&* *seqq.* per lentes convexas visorum theoria, 239. *&* *seqq.*
Visio quando eadem, *o.* 43. 44.
Visionis principium, 70.
Visio magnitudinis quo fundamento [illegible]tur, *o.* 66. 67.
Visionis motus principium, 68.
Visio confusa. Definitio, *o.* 41.
distincta, 40.
directa, 3.
reflexa, *c.* 2.
refracta, *d.* 3.
Vitra caustica quænam sint, *d.* 198. *&* *seqq.* phænomena, 199.
Vitra quomodo ad poliendum apta seligantur, 532. ad trituram aptentur, 533. poliantur, 527. *&* *seqq.*
Vitrum quid dicatur in Perspectiva, *p.* 7.
Vitrum concavum quomodo poliatur, *d.* 540.
Vitrum utrinque concavum seu *concavo-concavum.* Definitio, 19.
Vitrum utrinque æqualiter concavum, ibid.
inæqualiter concavum, ibid.
Vitrum convexum quomodo atteratur & ad poliendum disponatur, 535. poliatur, 539.
Vitrum convexo-convexum, sive *utrinque convexum.* Definitio, 17.
Vitrum utrinque æqualiter convexum, ibid.
Vitrum utrinque inæqualiter convexum, ibid.
Vitrum objectivum. Definitio, *d.* 328.
oculare, 329.
Vitra plana quomodo poliantur, 541.
Vitrum plano-concavum. Definitio, 18.
plano-convexum, 16.
Vitrum polyedrum quomodo poliatur, 543.
Umbra. Definitio, *o.* 122. theoria, 123. *&* *seqq.* quomodo multiplicetur, 130. quando crescat & decrescat, 157.
Umbræ apparentia, sive projectio, *p.* 83. *&* *seqq.* 94. *&* *seqq.*
Umbræ a sphæra projectæ longitudo quomodo inveniatur, *o.* 143.
Umbræ intensitas, 131. *&* *seqq.* figura, 134. *&* *seqq.*
Umbræ longitudo quomodo in plano horizontali inveniatur, 146. quando altitudini corporis æqualis, 148.

Umbra

Umbræ lumini per fenestram projecto convenientis projectio, *p.* 102.
Umbra mera quid dicatur, *o.* 122.
Umbræ montium lunarium, *a.* 483.
Umbrarum perpendicularium opacorum longitudines quam habeant proportionem, *o.* 156.
Umbra recta. Definitio, 159. theoria, 163. *& seqq.* ad versam ratio, 165. 170. usus, 171.
Umbra satellitum Jovis observata, *a.* 506. 507. figura ejus, 508.
Umbra versa. Definitio, 161. theoria. 166. *& seqq.* usus, 171.
Umbra Lunæ. Definitio, *a.* 1029. quo dirigatur, 485. num Terram totam tegere possit, *a.* 1035. quantam Terræ partem tegat quomodo inveniatur, 1036.
Umbræ lunaris diameter vera quomodo inveniatur, 1034. via in globo terrestri, vel mappa geographica quomodo delineetur, 1095.
Umbræ terrestris semidiameter apparens in loco transitus Lunæ quomodo inveniatur, 941.
Volantes quando nos conspiciamus in speculo plano, *c.* 74.
Uvea tunica. Definitio, *o.* 24.

Z.

Zenith. Definitio, *a.* 58.
Zodiacus. Definitio, 188.
Zodiacus cometarum, 1157.

FINIS INDICIS SEXTI.

VII.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO IV. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *g.* Geographiam & Hydrographiam, *c.* Chronologiam, *f.* Gnomonicam, sive Sciatericam, *p.* Pyrotechniam, *m.* Architecturam militarem, *a.* Architecturam civilem, & numeros §§. designare; ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

Ab, *c.* 112. 121. 123.
Abacus, *a.* 104.
Abend, *g.* 215.
Aben meh, *c.* 113.
Abib, 121.
Accessus. Definitio, *m.* 239. quomodo paretur, 244.
Acroteria. Definitio, *a.* 275. situs, 276. dimensiones, 277. *& seqq.* quomodo construenda, 282. *& seqq.*
Acus magnetica. Definitio, *g.* 291. quomodo paretur, 297.
Adar, *c.* 112. 121. 123.
Adar meh, *c.* 113.
Adar prior, 121.
posterior, ibid.

Ædes

Ædes in antis. Definitio, *a.* 236. quales sint, 239.
Ædificia quomodo extruenda, *a.* 4.
Ædificii area quam habere debeat figuram, *a.* 421. *& seqq.*
Ædificii dimensiones quomodo reperiantur, 428. *& seqq.*
Ædificii firmitas. Definitio, *a.* 6.
Ædificium quale esse debeat, 18. *& seqq.*
Æquator. Definitio, g. 13. proprietates, 14.
Æra. Definitio, *c.* 81.
Æra Actiaca, 268.
Hegiræ, 227.
Hispanica, 265.
Judaica, 212.
Martyrum, 225.
Persica, 225.
Yezdegerdica, 255.
Æstas. Definitio, *g.* 76. ubinam bis sit, 200. quando sub æquatore, 101. quando in zona temperata & frigida, 112. cur in zona torrida non ubivis eodem tempore, 105.
Æstatis initium & finis. Definitio, 76. in zona torrida quomodo inveniatur, 106.
Die aussere Böschung, *m.* 52.
Die aussere Polygon, *m.* 52.
Affirer mch, *c.* 113.
Africus quinam dicatur ventus, *g.* 215. 216.
Aiyar, *c.* 112.
Ala. Definitio, *m.* 32. num concava fieri debeat, 74. quænam melior, 68. *& seqq.*
Alarum multiplicatio, 75.
retractio, 69. *& seqq.*
Ala secundaria. Definitio, 43.
Alsanus quinam ventus, *g.* 215. 216.
Altitudo objecti ad distantiam datam conspiciendi quomodo inveniatur, 50.
Altitudo Solis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Ambitus Telluris quomodo inveniatur, *g.* 35. 40. quantus sit, 41.
Ambulacrum valli. Definitio, *m.* 25. latitudo, 26.
Amphiprostylos. Definitio, *a.* 236. qualis sit ædes, 241.
Amphiscii. Definitio, *g.* 152. ubi [illegible]tur, 153.
Amplitudo occidua Solis quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
Amplitudo ortiva Solis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Analemma. Definitio, *f.* 132.
Analemma signiferum. Definitio, 132. constructio, 133.
Angulus centri. Definitio, *m.* 51.
Angulus defendens exterior, 50.
interior, 49.
Anguli horarii, quomodo inveniantur in horologio horizontali, *f.* 50. in meridionali, 58.
Angulus humeri. Definitio, *m.* 46.
Angulus imminutus, 47.
Angulus loxodromiæ, loxodromicus. Definitio, *g.* 318. quomodo inveniatur, 322.
Angulus polygoni. Definitio, *m.* 44.
Angulus propugnaculi. Definitio, 30. 45. magnitudo, 79.
Annuli solaris universalis constructio, *f.* 165.
Annuli solaris particularis constructio, 167.
Annus. Definitio, *c.* 66.
Anni epochæ unius quomodo reducantur ad annos epochæ alterius, 84.
Antœci quales habeant vicissitudines tempestatum, *g.* 186. temporis, 177. 192.
Annus abundans. Definitio, *c.* 333. ejus character, 334.
Annus Ægyptiacus. Definitio, 106. quale ejus principium, 107.
Annus æræ Actiacæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 271.
Annus æræ Hispanicæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 267.
Annus Æthiopicus. Definitio, 111.
Arabum, 125.
Atticus, 117.
Annus CHRISTI quomodo reducatur ad annum Gratiæ, 226. ad Judaicum, 216. ad annum Olympiadum, 238. ad annum Græcorum & Russorum, 198. ad annum mundi, 209. ad annum periodi Julianæ, 185.

——— ad annum urbis conditæ, 246.
Annus ante CHRISTUM quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, *c.* 187.
Annus deficiens. Definitio, 331. character, 332.
Annus Eusebianus, quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, 220. ad annum CHRISTI, 222.
Annus fixus. Definitio, 66.
Annus Galaleus. Definitio, 113. ejus præstantia, 115.
Annus Græcorum. Definitio, 117.
Annus Græcorum recentiorum quomodo reducatur ad annos CHRISTI, 197. ad annos periodi Julianæ, 194.
Annus Gratiæ. Definitio, 225. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 226.
Annus Gregorianus. Definitio, 101. differentia ab astronomico, 102. a Juliano, 103. num sit bissextilis quomodo inveniatur, 105.
Annus Hebræorum antiquus, 121.
Annus Julianæ Epochæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 263.
Annus Julianus. Definitio, 97. quantum deficiat ab astronomico, 98. num sit bissextilis quomodo inveniatur, 105.
Anni Juliani dies quomodo reducatur ad diem Judaici, 346.
Annus Judæorum recens, sive *Judaicus*. Definitio, 123. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 217. ejus species, 331. 333. quomodo species inveniatur, 345.
Anni Judaici dies quomodo reducatur ad diem Juliani, 345.
Annus lunaris cœlestis. Definitio, *c.* 72. quantitas, 73.
Annus lunaris civilis communis. Definitio, 74. quantitas, 75.
Annus lunaris civilis embolimæus. Definitio, 74. quantitas, 75. 76.
Annus Macedonicus. Definitio, 119.
Anni mundi conditi epochæ Alexandrinæ quomodo reducantur ad annos CHRISTI, 210.
Anni mundi conditi Græcorum historicorum quomodo reducantur ad annos CHRISTI, *c.* 206. quomodo ad annos periodi Julianæ, 204.
Annus Nabonassareus quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 254. quomodo ad annum periodi Julianæ, 251.
Annu snativitatis CHRISTI num sit certus, 190.
Annus Numæus. Definitio, 91. quantitas, *ib.*
Annus olympiadum quomodo reducatur ad annos CHRISTI, 258.
Annus ordinarius. Definitio, 329. character, 330.
Annus periodi Julianæ quomodo ex datis cyclis Solis, Lunæ & Indictionum inveniatur, 181. quomodo reducatur ad annum ante CHRISTUM, 188. ad annum CHRISTI, 186. Judaicum, 213. Eusebianum, 220. annum urbis conditæ, 242. annum Russorum & Græcorum, 194.
Annus Persicus. Definitio, 113. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 259. quomodo initium in anno Juliano inveniatur, 260.
Annus Romanorum veterum. Definitio, 88. quantitas, 89.
Annus Russorum quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 197. quomodo ad annum periodi Julianæ, 194.
Annus secularis ad quodnam seculum referatur, 87.
Annus solaris. Definitio, 67.
Anni solaris civilis quantitas, 68.
Annus solaris bissextilis, 71.
——— *communis*, 69. 70.
Annus Syriacus, 112.
Annus Turcarum. Definitio, 125. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 352. initium ejus quomodo computetur, 353. 355.
Annus vagus. Definitio, 66.
Annus Urbis conditæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 245. quomodo ad annum periodi Julianæ, 241.

Annus Yezdegerdicus. Definitio, *c.* 113. cum quo conveniat, 114.
Antepagmenta, *a.* 133.
Antipodes. Definitio, *g.* 180. quod dentur, 181. quinam sint, 182. 183. quomodo ope globi inveniantur, 237. quales habeant vicissitudines diei ac noctis, 185. tempestatum, 186.
Antœci. Definitio, 176. quinam sint, 177. quibus nulli sint, 195. quomodo ope globi inveniantur, 237. cum antipodibus comparati, 186. *& seqq.* 206.
Apeliotes quinam sit ventus, *g.* 215.
Apophygis. Definitio, *a.* 111. delineatio, 117.
Aprilis, *c.* 97.
Aquilo quinam ventus, *g.* 215. 216.
Architecti officium, *a.* 2. 3.
Architectura civilis. Definitio, 1. regulæ ejus quomodo inveniantur, 5.
Architectura militaris. Definitio, *m.* 1. ejus prima principia, 2. *& seqq.*
Arctapeliotes qualis ventus, *g.* 215.
Arcus. Definitio, *a.* 253. delineatio, 257. partes & membra, 258. 259.
Arcuum Dispositio, 274.
Arcus æquatoris inter Loxodromiæ initium in æquatore & meridianum datum interceptus quomodo inveniatur, *g.* 336.
Aræostylon, *a.* 225.
Ardhascht meh, *c.* 113.
Areæ subdialis necessitas, *a.* 442. 443. 444.
Arenæ qualitates, 59. examen, 60.
Argestes qualis ventus, *g.* 215. 216.
Artilleria, *p.* 2.
Arx. Definitio, *m.* 201.
Ascensio obliqua Solis quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
Ascensio recta Solis quomodo ope globi inveniatur, ibid.
Ascii. Definitio, *g.* 149. quinam sint, 150. ubinam non dentur, 151. quinam sint dato die, quomodo inveniatur, 168.
Asrudia meh, *c.* 113.
Astragalus, Definitio, *a.* 105. d[illegible]tio, 113.
Athyr, *c.* 106.
Atlantes. Definitio, *a.* 81.
Augustus, *c.* 97.
Auricula. Definitio, *m.* 72.
Aussenwercke, 109.
Auster, *g.* 211. 215.
Austro-Africus qualis ventus, 215.
Autumni initium & finis. Definitio, 79.
Autumnus quando sub æquatore, 103. ubi in zona torrida, 109.
Axis Telluris. Definitio, 12.

B.

Das Æncklein, *m.* 52.
Basis columnæ, *a.* 96. *& seqq.*
Basi columnæ & stylobatæ quænam membra conveniant, 132.
Basis columnæ & capituli Tuscani & Dorici, 198.
Basis stylobatæ, 95.
Basis & Coronidis stylobatæ ichnographia quomodo delineetur, 193.
Batterie, *m.* 227.
der Bedeckte Weg, 52.
Behen meh, *c.* 113.
Berme, *m.* 109.
Bestrichener Winckel, 52.
Bogenstellungen, *a.* 253.
Bollewerck, *m.* 52.
Bollwercks Winckel, 52.
Bomba. Definitio, *p.* 31. quomodo paretur, 42. *& seqq.*
Borapeliotes, *g.* 215. 216.
Boreas, 215.
Borolybicus, 215.
Brille, *m.* 109.
Brustwehre, ibid.

C.

Cæcias, quinam ventus, *g.* 215. 216.
Cæmentorum virtutes quomodo explorentur, *a.* 48.
Calendæ quid sint, *c.* 95.
Calendarium quomodo conscribatur, 316.

Calendarium correctum. Definitio, *c.* 314.
Calendarium Gregorianum. Definitio, 291.
Calendarium Gregorianum perpetuum, 392.
Calendarium Julianum. Definitio, 272.
Calendarium Julianum perpetuum, 282.
Calibra. Definitio, *p.* 101.
Calx quomodo coquenda, *a.* 65. *& ſeqq.* quomodo examinetur, 71. conſervetur, 72.
Camera. Definitio, 468. conſtructio, 471.
Camini conſtructio, 482.
Canun prior, *c.* 112.
  poſterior, ibid.
Capital-Linie, *m.* 52.
Capitulum columnæ. Definitio, *a.* 96. quænam ei conveniant membra, 171.
Capituli Corinthii ichnographia, 207.
  Ionici ichnographia, 202.
  Romani ichnographia, 205.
Carbas quinam ventus dicatur, *g.* 215. 216.
Carbones ad pulverem pyrium conficiendum idonei quomodo parentur, *p.* 13. *& ſeqq.*
Carbonum qualitates, 19. 20. 21.
Cardi meh. c. 113.
Carthaune, *p.* 100.
Caryatides. Definitio, *a.* 82.
Casleu, *c.* 121. 123.
Caſtellum. Definitio, *m.* 201. delineatio, 207. quomodo condi debeat, 202. *& ſeqq.*
Caurus quinam ventus, *g.* 215. 216.
der Centri-Winckel, *m.* 52.
Character anni, *menſis*, *enneadecaëteridos.* Definitio, *c.* 324. menſis quinam, 325. anni quinam, 326. enneadecaëteridos quinam, 327.
Characteres artificiales chronologici ſive *inſtituti.* Definitio, 130.
Characteres aſtronomici chronologici ſive *naturales.* Definitio, 128. quales ſint, 129.
Characteres chronologici. Definitio, 127.
Characteres hiſtorici chronologici. Definitio, 132.
Charta quomodo ſuper tabula expandenda, *a.* 174.
Chartæ reductionis in hydrographia. Definitio, *g.* 363.
Chojac, *c.* 106.
Chorda. Definitio, *m.* 31.
Chronologia. Definitio, *c.* 1.
Circius qualis ſit ventus, *g.* 215. 216.
Circuli horarii ſive *horarum.* Definitio, *ſ.* 28.
Circulus æquinoctialis. Definitio, *g.* 13.
  polaris antarcticus, 19.
  polaris arcticus, ibid.
Circumvallatio exterior. Definitio, *m.* 235.
  interior, 236.
Clima. Definitio, *g.* 114.
Climatis initium, 115. medium, 117. finis, 116.
Climatum Tabulæ quomodo conſtruantur, 138. exhibentur, *ibid.*
Cochlidium. Definitio, *a.* 515. nævi, 516. delineatio, 517.
Colli dimidium. Definitio, *m.* 37.
Columellæ. Definitio, *a.* 80.
Columna. Definitio, 75. quomodo ſuper alia columna erigatur, 289. *& ſeqq.*
Columnæ conjugatæ. Definitio, *a.* 216. quomodo conjugatio fieri debeat, 217. *& ſeqq.*
Columna parietina. Definitio, 75.
Commoditas ædificii. Definitio, *a.* 7.
Compaſſus nauticus. Definitio, *g.* 296.
Computi vulgaris Autor, *c.* 189.
Conclavium altitudo, *a.* 435. *& ſeqq.* communicatio, 440. figura, *ibid.* locus, 441.
Corona, *a.* 104.
Coronis ſtylobatæ, 95. quænam membra ei conveniant, 131.
Coronix, 100. qualis eſſe debeat, 102. quænam membra ei conveniant, 131.
die Cortine, *m.* 52.
Contre-Mine, 109.
Contregarde, ibid.
Corus, *g.* 215. 216.
Craticula ad firmitatem fundamenti quomodo paranda, *a.* 328.

Crepusculi matutini initium quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
Crepusculi vespertini finis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Creutz-Gewölbe, *a.* 469.
Crucis gnomonicæ constructio, *f.* 163.
Cuniculi subterranei. Definitio, *m.* 154. quid de iis observatum, 155. *& seqq.* quomodo parentur, 160. 163.
Cyclus Indictionum. Definitio, *c.* 151. quomodo inveniatur, 153.
Cyclus Lunæ. Definitio, 147. quantus sit & quamdiu valeat, 148.
Cyclus Solis. Definitio, *c.* 140. quomodo inveniatur, 143.
Cycli Solis pro annis Gregorianis quomodo condantur, 145.
Cycli Solis, Lunæ & Indictionum anni dati periodi Julianæ quomodo inveniantur, 180.
Cylindrus pyrotechnicus. Definitio, *p.* 35.
Cylindricum horologium, *f.* 152. *& seqq.*
Cymatium Doricum. Definitio, *a.* 107. delineatio, 115.

D.

December, *c.* 97.
Declinatio plani quomodo inveniatur, *f.* 90. 101.
Defensionis quantitas quomodo mensuretur, *m.* 58. *& seqq.*
Delineatio acus magneticæ. Definitio, *g.* 293. quomodo observetur, 302.
Denticuli quid sint, *a.* 133. quomodo delineentur, 180.
Diameter Columnæ quomodo inveniatur, *a.* 155. 156.
Diameter globi unius libræ quomodo inveniatur, *p.* 110.
Diameter globorum pro singulis semunciis libræ quomodo inveniatur, *p.* 109.
Diastylon opus, *a.* 225.
Dies. Definitio, *g.* 118. ubinam unicus, 128. ubi perpetuo nocti æqualis, 126. quandonam ubivis terrarum noctiæqualis, 132.
Dies iidem ubinam æquales, *g.* [illegible]
Diei longitudo quomodo variet pro locorum latitudine, 134.
Diei brevissimi & longissimi longitudo quomodo inveniatur, 136. 142.
Dies bissextilis seu *intercalaris.* Definitio, *c.* 71.
Dies civilis. Definitio, 3.
Dies naturalis. Definitio, 5. quantitas quomodo inveniatur, 6.
Dies rejiculæ. Definitio, 336.
Dies mensis anni Nabonassarei quomodo reducatur ad diem anni Juliani, 202.
Dierum hebdomadis nomina, 45.
Di meh, 113.
Dipteros, *a.* 236. quale sit opus, 244.
Distantia locorum quomodo ope globi inveniatur, *g.* 264.
Distantia locorum magno intervallo dissitorum quomodo inveniatur, 29.
Distantia locorum geographica. Definitio, 51. quomodo inveniatur, 63. *& seqq.*
Distantiæ Solis a vertice mensura, 264.
Dulheggia, *c.* 125.
Dulkaadah, ibid.

E.

Echinus. Definitio, *a.* 106. delineatio, 114.
Ecliptica. Definitio, *g.* 15. situs, 16.
Eclipticæ declinatio maxima quomodo inveniatur, 140.
Ecphora. Definitio, *a.* 150.
Einbohrende Defens-Linie, *m.* 52.
Einfallendes Licht, *a.* 390. 391.
Elul, *c.* 112. 121. 123.
Enneadecaëteris Judaica. Definitio, *c.* 322. quot sit dierum, 323.
Epactæ annuæ. Definitio, 296. quantæ sint, 297. *& seqq.*
Epactæ menstruæ. Definitio, 294.
Epactæ quomodo per Calendarium disponendæ, 302.
Epactarum officium, 300.
Epactarum cyclus quando exspiret, 299. cur non omni ævo satisfaciat, 301. 303.

Ep[illegible]*m expansa Tabula* quomodo construatur, *c.* 306.
Epacta Juliana & Gregoriana anni dati quomodo inveniatur, 310.
Epiphi, 106.
Epistylium quid sit, *a.* 100. quale esse debeat, 101.
Epocha. Definitio, *c.* 81. quod sit arbitraria, 82.
Epocha Constantinopolitana, 171.
- *Diocletiana*, 225.
Juliana, 261.
Muhamedica, 227.
Mundi conditi Judæorum, 212.
Mundi Alexandrina, 207.
Mundi Eusebiana, 219.
Mundi recentiorum Græcorum & Russorum, 192.
Mundi Græcorum Historicorum, 201. 202.
Nabonassarea, 247.
Olympiadica, 232.
Urbis conditæ, 239.
Epocha vulgaris CHRISTI *nati* quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, 183.
Epocha diei civilis. Definitio, 10. quomodo constituatur, 11. *& seqq.*
Etesiæ, *g.* 216.
Ethanim, *c.* 121.
Euroauster quinam ventus, *g.* 215.
Euronotus quinam ventus, 216.
Europææ horæ quomodo in Babylonicas convertantur, *c.* 34.
Eurus quinam ventus, *g.* 215. 216.
Eurythmia. Definitio, *a.* 31. *& seqq.*
Eustylon opus, 225.

F.

FAcies. Definitio, *m.* 30.
Facierum magnitudo, 63.
Falconet, *p.* 100.
Famulus pyrotechnicus. Definitio, 57. quomodo fiat, 63.
Fascia, *a.* 104.
Fastigium. Definitio, 262.
Favonius quinam ventus, *g.* 215. 216.
Februarius, *c.* 97.
Fenestra. Definitio, *a.* 381. quomodo construenda, 382. *& seqq.* 389. 390. dimensiones, 387. 388. 395. situs, 400. *& seqq.* figura, 393. ornatus, 402. 404. quot fenestræ conclavi unicuique conveniant, 425.
Fenestra podio septa. Definitio, *a.* 414. quomodo construenda, 415. *& seqq.*
Festa immobilia. Definitio, 274. quænam sint, 275.
Judaica quænam sint, 549.
Festa mobilia. Definitio, *c.* 276. quænam sint, 277.
Figura irregularis quomodo ad regularitatem reducatur, *m.* 185. quomodo muniatur, 186. 188. *& seqq.*
Finitor. Definitio, *g.* 28.
Flores capitulorum quomodo delineentur, *a.* 210.
Focus quomodo exstruatur, *a.* 495. 496. *& seqq.*
Folia acanthina cum cauliculis, 133.
Forcipula composita. Definitio, *m.* 105. an utilis, 106. quomodo delineetur, 138. 179.
Forcipula simplex. Definitio, 103. an utilis, 104. quomodo delineetur, 137. 179.
Fornaces quomodo construendæ, *a.* 486. *& seqq.*
Fornices. Definitio, *a.* 468. quomodo construantur, 471.
Fossæ necessitas, *m.* 15. latitudo, 16. latitudo quænam melior, 86. quales terminos habere debeat, 87.
Fossæ operum externorum magnitudo, 122.
Frons primaria ædium quam plagam respicere debeat, *a.* 445. *& seqq.*
Frontispicium. Definitio, 262. figura, 264. 266. locus, 265. nævi, 267. 268. quomodo delineetur, 272.
Fulcrum. Definitio, 74. quodnam perfectius, 84. quale esse debeat, 85. *& seqq.*
Fumarii exstructio, 499. *& seqq.*

Fundamentum ædificii. Definitio, *a.* 311. neceſſitas, 313. quale eſſe debeat, 314. *& ſeqq.* dimenſiones, 332. 333. quomodo ponatur, 332. *& ſeqq.* 334. quomodo in loco aquoſo ponatur, 339.

G.

GAllicus, quinam ventus, *g.* 215. 216.
Gangeticus quinam ventus, 215.
Geographia. Definitio, 1.
Geſichts-Linie, *m.* 52.
Gewœlbe, *a.* 469.
Ginbat, *c.* 111.
Glacis, *m.* 52.
Globus aëreus. Definitio, *p.* 71. quomodo componatur, 92.
Globus aquaticus. Definitio, 72. quomodo componatur, 96.
Globus fœtens. Definitio, 41. quomodo componatur, 68.
Globus fumans. Definitio, 40.
Globi incendiarii. Definitio, 38. qua materia repleantur, 52. quomodo repleti ligentur, 54. baptizentur, 55. granatis manuariis impleantur, 57.
Globus lucens. Definitio, 39. 74. quomodo componatur, 66. 96.
Globus obſcurans quomodo componatur, 67.
Globus terreſtris. Definitio, 73. quomodo componatur, 97.
Globus terreſtris in Geographia. Definitio, *g.* 231. conſtructio, 233. 234. uſus, 235. *& ſeqq.* quomodo ita conſtituatur, ut Sol omnes regiones illuminet, quæ in ipſa Tellure illuminantur, 261.
Gnomonica. Definitio, *ſ.* 1.
Gradus Meridiani terreſtris quomodo menſurentur, *g.* 40.
Gradus paralleli quantitas quomodo inveniatur, 45. 46.
Græcus quinam ventus dicatur, 28.
Granata. Definitio, *p.* 31.
Granata manualis, ibid.
Grando pyrotechnica. Definitio, *p.* 32. quomodo paretur, 48.

H.

HAaſe, *c.* 111.
Halber Mond, *m.* 109.
Hamle, *c.* 111.
Haugender Mœrſer, *p.* 142.
Haupt-Linie, 52.
Haziram, *c.* 112.
Hebdomas. Definitio, 43.
Helakim, 40.
Helleſpontius qualis ventus, *g.* 215.
Hemiſphæria. Definitio, *a.* 468.
Heteroſcii. Definitio, *g.* 155. ubinam dentur, 156.
Hexaſtylon quale ſit opus, *a.* 214.
Hiemis initium & finis. Definitio, *g.* 77.
Hiems ubinam unica, 17. quando ſub æquatore, 102.
Hora. Definitio, *c.* 17.
Hora compoſita. Definitio, 17.
ſimplex, ibid.
Horæ antiquæ, 24.
Horæ aſtronomicæ. Definitio, 21. quomodo in Babylonicas convertantur, 31.
Horæ Babylonicæ. Definitio, 19. quomodo in aſtronomicas convertantur, 31. quomodo in Europæas, 34. quomodo horologio inſcribantur, *ſ.* 149.
Horæ Europææ. Definitio, *c.* 22. quomodo convertantur in aſtronomicas, 30. Italicas, 35. Judaïcas, 37.
Horæ Italicæ. Definitio, 20. quomodo convertantur in Europæas, 35. quomodo horologio inſcribantur, *ſ.* 149.
Horæ Judaïcæ. Definitio, *c.* 24. quales ſint, 25. *& ſeqq.* quomodo in Europæas convertantur, 37.
Horæ Norimbergenſes, Definitio, 28.
Horæ planetariæ, 24.
Horizon. Definitio, *g.* 28.
Horizon phyſicus, 28.
ſenſibilis, ibid.
Hornwerck, *m.* 109.
Horologiographia, *ſ.* 2.

Horolo-

Horologii deſcriptio generalis, *f.* 36. in baculo, 160.
Horologium æquinoctiale. Definitio, 5. quomodo eidem ſignorum paralleli inſcribantur, 140.
Horologium æquinoctiale inferius. Definitio, 5. deſcriptio, 33. quot horas indicet, 7.
Horologium æquinoctiale ſuperius. Definitio, 5. quot horas indicet, 6. quomodo deſcribatur, 30.
Horologium æquinoctiale univerſale quomodo conſtruatur, 34.
Horologium aſtrale. Definitio, 176. conſtructio, 184.
Horologii cylindrici deſcriptio, 152. *&* *ſeqq.* 161.
Horologia declinantia. Definitio, 76. deſcriptio, 94. 96. 102. 104.
Horologia deinclinata. Definitio, 82. deſcriptio, 109.
Horologium horizontale. Definitio, 10. quo tempore ejus uſus, 11. ejus perfectio, 12. quomodo deſcribatur, 38. *& ſeqq.* quomodo ſub ſphæra parallela, 129. quomodo ſub recta, 124. *& ſeqq.* quomodo paralleli ſignorum eidem inſcribantur, 135.
Horologii horizontalis ſine centro deſcriptio, 119. *& ſeqq.*
Horologii horizontalis univerſalis deſcriptio, 170.
Horologia inclinata. Definitio, 78. deſcriptio, 106.
Horologium lunare. Definitio, 75. deſcriptio, 180. 182.
Horologium meridionale. Definitio, 14. quaſnam horas indicet, 15. quomodo deſcribatur, 54. *& ſeqq.*
Horologium nocturnale. Definitio, 177.
Horologium occidentale. Definitio, 22. quas horas indicet, 23. quomodo deſcribatur, 68.
Horologium orientale. Definitio, 20. quas horas indicet, 21. quomodo delineetur, *f.* 66.
Horologium polare. Definitio, 25.
Horologium polare inferius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo deſcribatur, 72. *& ſeqq.*
Horologium polare ſuperius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo deſcribatur, 69. *& ſeqq.*
Horologia reclinata. Definitio, 80. deſcriptio, 108.
Horologium ſeptentrionale. Definitio, 16. quaſnam horas indicet, 17. quo tempore nullus ejus uſus, 18. quomodo deſcribatur, 63. 64.
Horologium ſolare. Definitio, 3. diverſitas unde, 4. quomodo vicem lunaris ſuſtineat, 178. quomodo in ſuperficie globi deſcribatur, 150.
Horologia ſolaria primaria quomodo eidem trunco inſcribantur, 74.
Horologia ſine centro. Definitio, 115. ubi conſtruenda, 116. *& ſeqq.*
Horologium verticale. Definitio, 13. quomodo ſub ſphæra recta deſcribatur, 127. quomodo ſub parallela, 130. quomodo ſine centro, 122. *& ſeqq.*
Horologii univerſalis in Tabula quadam portatili deſcriptio, 172.
Hydar, *c.* 111.
Hydrographia. Definitio, *g.* 2.
Hypæthros. Definitio, *a.* 236. quale ſit opus, 247.
Hypafricus qualis ſit ventus, *g.* 215.
Hypaquilo qualis ſit ventus, 215.
Hypargeſtes, qualis ſit ventus, 215.
Hyperboreas qualis ſit ventus, 215.
Hypereurus qualis ventus, *ibid.*
Hypeurus, 215.
Hypocæcias qualis ſit ventus, 215.
Hypocircius qualis ventus, *ibidem.*
Hypocorus, ibidem.
Hypolibs, ibidem.
Hypophœnix, ibidem.
Hypothraſcias Scirem, 215.

I. *Jaca-*

I.

Jacatit, c. 111.
Janua. Definitio, a. 372. dimensiones, 373. & *seqq.* figura, 378. locus, 410. 411. ornatus, 402. 404.
Januarius, c. 97.
Japyx, g. 215.
Ichnographia ædificii. Definitio, a. 524. quomodo fiat, 528.
Ichnographia munimenti. Definitio. m. 131.
Ichnographia partis alicujus columnæ. Definitio, a. 188.
Idus quid sint, c. 95. quot in quolibet mense, *ibid.*
Jiar, 121. 123.
Imbrices, a. 522.
Inclinatio acus magneticæ. Definitio, g. 294. quomodo observetur, 307.
Inclinatio plani quomodo inveniatur, f. 88. 89.
Incolæ ejusdem paralleli quomodo inter se comparentur, g. 196. & *seqq.* 202.
Incumba. Definitio, a. 255. membra, 256.
Initium diei civilis. Definitio, c. 10. quomodo constituatur, 11. & *seqq.*
Die innere Bœschung, m. 52.
Drossirung, ibid.
Polygon, ibid.
Instrumentum, quo pulvis pyrius in tormentum immittitur, p. 127. in arctum spatium redigitur, 128. tormenta repurgantur, 129.
Instrumentum declinatorium. Definitio, f. 85. constructio, 86. usus, 88.
Intercolumnium. Definitio, a. 225. prope januas & portas quantum esse debeat, 232.
Jomada prior, c. 125.
posterior, ibidem.
Itineris quantitas quomodo in mari æstimetur, g. 351.
Iter confectum in mari quomodo inveniatur, 386. 389.
Iter conficiendum in mari quomodo inveniatur, 384.
Junius, c. 97.

K.

Kartetsche, p. 32.
Eine Katze, m. 109.
Kebiæ quid sint, c. 376.
Die Kehle, m. 52.
Der kleine Winckel, ibid.
Ein Kron-Werck, 109.

L.

Lacunar quomodo construendum, a. 466.
Lagenæ pyrotechnicæ. Definitio, p. 34.
Laquear gypseum quomodo perficiatur, a. 467.
Lateres quomodo ducantur, 51. & *seqq.* examinentur, 58.
Latitudo loci. Definitio, g. 54. quomodo inveniatur, 55. 137. 143. quomodo ope globi inveniatur, 237. quomodo observetur, 344. & *seqq.*
Latitudinum locorum Tabulæ, 60.
Latitudinis mutatio in navigatione quomodo inveniatur, 321. quomodo se habeat ad latus mecodynamicum, 327.
Latus exterius. Definitio, m. 35.
interius, 36.
Latus mecodynamicum. Definitio, g. 317. quale sit, 329. quomodo inveniatur, 325. 328. 330. 383.
Lauffgraben, m. 240.
Leuco-notus qualis ventus, g. 215.
Libonotus qualis ventus, 215. 216.
Libs qualis ventus, 215.
Ligna qualia esse debeant, a. 43. quomodo cædenda, 46. exsiccanda, 47.
Ligni parsimoniæ principia, 474. & *seqq.*
Limen quantum esse debeat, 380.
Linea quid dicatur in Architectura militari, m. 233. quid in Geographia, g. 13.
Linea capitalis. Definitio, m. 40.
Linea communicationis. Definitio, 241.
Linea defensionis major. Definitio, m. 41. magnitudo, 55. 56.
Linea defensionis minor, sive *stringens.* Definitio, 42.
Linea semicolli quænam melior, 77.

Lin[illegible]ylaris. Definitio, *f.* 91. quænam sit, 92. 93.
Literæ ardentes quomodo efformentur, *p.* 98.
Litera dominicalis. Definitio, *c.* 133. quomodo variet, 136. *& seqq.* quando ordo restituatur, 139. quomodo inveniatur, 143.
Loca quænam in zona torrida sita, *g.* 69. quænam in temperata, 72. quænam in frigida, 75.
Loca secreta ne fœtore sint molesta quomodo impediatur, *a.* 448. *& seqq.*
Loca Terræ, ubi simul meridies, *g.* 23.
Loca Terræ quomodo ope globi inveniantur, in quibus dies est datarum horarum, 251. 252. quibus Sol oritur, vel occidit, quæ meridiem, quæ mediam noctem, quæ diem, quæ noctem habent, 255. quæ vident eclipseos medium, 256. quibus planeta, 257. stella vel aliud phænomenon sit verticale, 258. 259. quibus hoc oriatur, vel occidat, 260. quibus Sol, 261. vel Luna lucet, 262. quibus Sol & Luna oriuntur, vel occidunt, 263.
Loca zonæ frigidæ quomodo inveniantur ope globi, in quibus dierum dato numero Sol non occidit, 254.
Locus ad fluctum situs quomodo muniatur, *m.* 208.
Longitudo diei quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, *f.* 142.
Longitudo jactus tormentorum quanta sit, *p.* 137.
Longitudo loci. Definitio, *g.* 52. quomodo inveniatur, 56. *& seqq.* quomodo ope globi inveniatur, 237.
Longitudinum locorum differentia quomodo inveniatur, 58. 59.
Longitudinum locorum Tabulæ, 60.
Longitudo maris quomodo inveniatur, 335. 354. 385.
Longitudinum in mari differentia quomodo inveniatur, *g.* 386.
Longitudinis mutatio quomodo inveniatur, *g.* 337. 338. 387.
Longitudo noctis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Lorica. Definitio, *m.* 21. crassities, 22. altitudo, 23. 24.
Lorica fenestrarum. Definitio, *a.* 431. dimensiones, 432. *& seqq.*
Loricæ transversæ utilitas, *m.* 124.
Loxodromia. Definitio, *g.* 309. proprietates, 310. 311. 313. *& seqq.* quomodo inveniatur, 320.
Loxodromiæ longitudo quomodo se habeat ad latus mecodynamicum, 324. quomodo ad mutationem latitudinis, 319. 323.
Lunula. Definitio, *m.* 99. delineatio, 136.

M.

Magabit, *c.* 111.
Maius, 97.
Mappæ composita per rhombos & distantias. Definitio, *g.* 367.
Mappa geographica. Definitio, 266.
Mappæ hydrographicæ. Definitio, 356.
Mappæ planæ. Definitio, 358. quales sint, 359. *& seqq.* quomodo construantur, 368.
Mappa particularis. Definitio, 268. quomodo construatur, 278.
Mappæ reductæ. Definitio, 363. quales sint, 364. 365. quomodo construantur, 375.
Mappæ universales. Definitio, 267.
Marchesuam, *c.* 121. 123.
Mare circumfluit terram, *g.* 7. latitudo in mari quomodo observetur, 340. inveniatur, 342.
Margo fossæ. Definitio, *m.* 27.
Martius, *c.* 97.
Mascaran, 111.
Materia ædificiorum. Definitio, *a.* 34. qualis sit seligenda, 35. *& seqq.*
Materia liquefacta quid dicatur, *p.* 61.
Mecheir, 106.

Meha meh, *c.* 113.
Membra Ordinum architectonicorum. Definitio, *a.* 103. divisio, 103. altitudines eorum quomodo determinentur, 151.
Membra essentialia. Definitio, 125. quaenam sint, 126. & *seqq.*
Mensis astronomicus. Definitio, *c.* 58.
Mensis civilis. Definitio, 60.
Mensis illuminationis. Definitio, *c.* 55. quantus, 56.
Mensis lunaris periodicus. Definitio, 51. quantus sit, 52.
Mensis lunaris synodicus. Definitio, 53. *quantitas*, 54.
Mensis lunaris astronomicus. Definitio, 58.
Mensis lunaris civilis. Definitio, 60. quantus sit, 61. & *seqq.*
Menses Numaei quales fuerint, 93.
Mensis solaris. Definitio, 48. quod omnes non sint aequales, 50. quantus statuatur, 50.
Mensis solaris civilis. Definitio, 60. quantitas, 64. 65.
Menses Romulaei quales fuerint, 93.
Mensium Turcicorum initium in anno Juliano quomodo reperiatur, 356.
Merded meh, *c.* 113.
Meridianus. Definitio, *g.* 20. situs, 21. officium, 23. numerus Meridianorum, 24.
Meridiani diversorum locorum quomodo eidem horologio inscribantur, *f.* 144.
Meridianus primus. Definitio, *g.* 26. quinam sit, 27. 61.
Meridies quaenam plaga dicatur, *g.* 215.
Meridies cur citius in locis orientalioribus, quam occidentalioribus, 25. ubinam sit dato momento quomodo ope globi inveniatur, 174.
Mesaquilo quinam ventus, *g.* 215.
Mesargestes, ibid.
Meseurus, ibid.
Mesoboreas, ibid.
Mesocaecias, ibid.
Mesocircius, ibid.
Mesocorus, quinam ventus, *g.* 21[illegible]
Mesolibonotus, ibid.
Mesolibs, ibid.
Mesophoenix, ibid.
Mesori, *c.* 106.
Mesozephyrus, quinam ventus, *g.* 215.
Misazia, *c.* 111.
Milliaria longitudinis. Definitio, *g.* 317. quomodo inveniantur, 383.
Minutum primum. Definitio, *c.* 39.
secundum, ibid.
Mittag, *g.* 215.
Mitternacht, ibid.
Modulus. Definitio, *a.* 148.
Modulus ornatus januarum & fenestrarum, 403.
Molad Tohu. Definitio, *c.* 320. character, 328.
Monopteros aedes rotunda, *a.* 251.
Mörser, *p.* 142.
Mortarii praeparatio, *a.* 361.
Mortarium in Artilleria. Definitio, *p.* 140. quomodo delineetur, 143. & *seqq.* oneretur, 148. dirigatur, 150.
Muharram, *c.* 125.
Muniendi forma Belgica. Definitio, *m.* 126. calculus geometricus, 128. 129. delineatio ichnographica, 133. 141. orthographica, 142.
Muniendi forma Blondelliana. Definitio, 151. calculus geometricus, 152. delineatio, 153.
Muniendi forma Paganiana. Definitio, 145. calculus geometricus, 146. delineatio, 148.
Muniendi forma Scheiteriana. Definitio, 170. calculus geometricus, 171. delineatio, 173.
Muniendi forma Vaubaniana. Definitio, 157. calculus geometricus, 159. delineatio, 161.
Muniendi forma Vaubaniana recentior. Definitio, 166. delineatio, 168.
Munimenti forma qualis esse debeat, 61. & *seqq.*

Muni-

Munimenta campeſtria. Definitio, *m.* 217. orthographia, 219. delineatio, 220. & *ſeqq.*
Munimentum irregulare. Definitio, 180. undenam tale ſit, 183. 184.
Munimentum regulare. Definitio, 125.
Munimentum ſtellatum quomodo delineetur, *m.* 223.
Muri quomodo conſtruendi, *a.* 341. & *ſeqq.* quomodo anchoris firmentur, 370. quomodo tectorio veſtiantur, 363.
Murus ante feneſtram qualis eſſe debeat, 413.
Mutuli compoſiti. Definitio, 133. delineatio, 182.
Mutuli ſimplices. Definitio, 133. delineatio, 181.

N.

NAvigatio circularis. Definitio, g. 381. theoria, 391. & *ſeqq.*
Navigatio MERCATORIS. Definitio, 380.
Navigatio plana. Definitio, 379.
Neben-Streiche, *m.* 52.
Neomeniæ omnium menſium quomodo inveniantur, *c.* 344.
Neomenia Tiſri quomodo inveniatur, 339. & *ſeqq.*
der *Niedrige Wall*, *m.* 52.
Niſan, *c.* 112. 121. 123.
Nitri qualitates, *p.* 17. 20. 22. defæcatio & pulveriſatio, 5. & *ſeqq.*
Nonæ quid ſint, *c.* 95. quot ſint in quolibet menſe, ibid.
Nord, *g.* 211.
Nord gen Oſten, 215.
Nord gen Weſten, ibid.
Nord-Nord-Oſt, ibid.
Nord-Nord-Weſt, ibid.
Nord-Oſt, ibid.
Nord-Oſt gen Oſten, ibid.
Nord-Oſt gen Norden, ibid.
Nord-Oſt gen Weſten, ibid.
Nord-Weſt, ibid.
Nord-Weſt gen Norden, ibid.
Nord-Weſt gen Weſten, *g.* 215.
Notapeliotes, ibid.
Notolybicus, ibid.
Notozephyrus, ibid.
Notus, ibid.
November, *c.* 97.
Nox. Definitio, *g.* 118. *c.* 8. quomodo quantitas inveniatur, 9. ubinam unica, *g.* 128.
Numerus aureus. Definitio, *c.* 149. quomodo inveniatur, 150.

O.

OBſidionis proceſſus, *m.* 249. defenſio contra eandem, 250.
Occaſus Solis quomodo ope globi inveniatur, 235. quomodo in horologio indicetur, *ſ.* 142.
Occidens. Definitio, *g.* 211. 215.
Octaſtylon, *a.* 214.
October, *c.* 97.
Olympias, *g.* 215.
Opera campeſtria. Definitio, *m.* 216.
Opus coronatum. Definitio, 108. quomodo delineetur, 140. 178.
Opus cornutum. Definitio, 107. quomodo delineetur, 131. 176.
Opera externa. Definitio, 94. utilitas, 95. qualia eſſe debeant, 96.
Opus ruſticum. Definitio, *a.* 366. quibus ædificiis conveniat, 367. & *ſeqq.*
Ordo architectonicus. Definitio, *a.* 90. diviſio, 153. quomodo componantur, 160. & *ſeqq.* 137. quomodo delineentur, 176. 178.
Ordo Corinthius, 145. quod ſit ornatiſſimus, 146.
Ordo Doricus, 140.
  Ionicus, 141.
  Romanus, ſive *compoſitus*, 143.
  Tuſcanus, 139.
Oriens. Definitio, *g.* 211.
Ornatus ædificii. Definitio, *a.* 15.
Ornithias qualis ventus, *g.* 216.
Orthographia externa ædificii. Definitio, *a.* 525. quomodo fiat, 529.

Orthographia interna ædificii. Definitio, *a.* 256. quomodo fiat, 530.
Orthographia munimenti. Definitio, *m.* 132.
Orthographia partis alicujus columnæ. Definitio, *a.* 188.
Ortus Solis quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, *f.* 142.
Ost, *g.* 211. 215.
Ost gen Norden, 215.
Ost gen Süden, ibid.
Ost - Nord - Ost, ibid.
Ost - Süd - Ost, ibid.

P.

PAchon, *c.* 106.
Pagomen, 111.
Paophi, 106.
Paralleli locorum quomodo horologio solari inscribantur, *f.* 146.
Parastata. Definitio, *a.* 78.
Parmula. Definitio, *m.* 98. usus, 110. qualis esse debeat, 111. *& seqq.* quomodo delineetur, 135.
Partes ordinum quomodo componantur, 137.
Pascha quomodo celebrandum, *c.* 279.
Pascha Gregorianum quomodo computetur, 312.
Pascha Judaicum quomodo computetur, 347.
Pascha Julianum quomodo computetur, 288.
Pavimenta qualia esse debeant, 457.
Pauni, 106.
Perfectio ædificii. Definitio, *a.* 8.
Periodus Calippica. Definitio, *c.* 154. quanta sit, 156. quot lunationum, 157. quamdiu valeat, 158.
Periodus HIPPARCHI. Definitio, *c.* 161. quanta sit, 164. quot lunationum, 165. quamdiu valeat, 166.
Periodus Juliana. Definitio, 175. quanta sit, 176. ejus usus, 178. inventor, 179.
Periodus Victoriana. Definitio, 167. quot sit lunationum, *c.* 173. quant[illegible]eat, 171. quamdiu valeat, 174.
Periœci. Definitio, *g.* 178. quinam sint, 179. quibus nulli sint, 195. 205. quomodo numerent horas, 204. quomodo ope globi inveniantur, 237.
Peripteros. Definitio, *a.* 236. quale sit opus, 242.
Peripteros ædes rotunda, 251.
Periscii. Definitio, *g.* 157. ubinam dentur, 158. quinam sint dato loco, quomodo inveniantur, 169. 170.
Peryſtilium. Definitio, *a.* 112. genera apud veteres, 236.
Petarde, *p.* 151.
Phamenot, *c.* 106.
Phœnicias qualis ventus, *g.* 215.
Phœnix, ibid.
Photosciaterica, *f.* 2.
Pila. Definitio, *a.* 77.
Pila parietina, ibid.
Plagæ. Definitio, *g.* 207. quot sint, 208. quomodo indicentur, 210. quomodo determinentur, 217.
Plagæ cardinales. Definitio, 211.
Plagæ collaterales, vel *intermediæ.* Definitio, 211. *species*, ibid.
Plagæ collaterales primariæ, ibid.
secundariæ, ibid.
secundariæ primi ordinis, ibid.
secundariæ secundi ordinis, ibid.
Plinthus, *a.* 104.
Pluvia ignea quomodo efficiatur, *p.* 61.
Pluvia pyrotechnica. Definitio, 33.
Podium. Definitio, *a.* 414.
Poli Telluris. Definitio, *g.* 12.
Polus Terræ antarcticus, sive *australis*, ibid.
Polus Terræ arcticus, sive *borealis*, ibid.
Poli elevatio ubi nulla, 125. quomodo inveniatur, 143.
Polygonorum distantia in methodo muniendi recentiore quomodo inveniatur, *m.* 209.

Poly-

Pol... Winckel, *m.* 52.
Postes. Definitio, *a.* 79.
Posticum, 236.
Principium anni. Definitio, *c.* 78. ubi statuendum, 79. 80.
Profunditas Solis quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
Projectio sphæræ. Definitio, *g.* 269. quomodo fiat, 272. 275.
Projectio orthographica, 270.
stereographica, ibid.
Projectura, sive *Projectio.* Definitio, *a.* 94.
Pronaus qualis ædes, 236.
Prostylus. Definitio, 236. quale sit opus, 240.
Propugnaculum. Definitio, *m.* 29. forma, 62.
Propugnaculi exterius vallum. Definitio, 101. usus, 116. 117.
Pseudodipteros. Definitio, *a.* 236. quale sit opus, 243. 244.
Pseudodipteros ædes. Definitio, 249. qualis sit, 250.
Pulchritudo. Definitio, *a.* 10. principia, 11. & *seqq.*
Pulvis pyrius. Definitio, *p.* 4. compositio, 24. & *seqq.* examen, 29. 30.
Pycnostylon opus, *a.* 225.
Pyropologia, *p.* 2.
Pyrobolus. Definitio, 69. quomodo conficiatur, 77. qua materia impleatur, 78. quomodo terebretur, 79.
Pyroboli forma quomodo paretur, 75. 76.
Pyrobolus aquaticus quomodo componatur, 94.
Pyrotechnia. Definitio, *p.* 1.
Pyxis nautica, seu *magnetica.* Definitio, 296. quomodo construatur, 297.

Q.

QUadra, *a.* 104.
Quadrantis horodictici constructio, *f.* 157.
Quintilis, *c.* 88.

R.

RAbia prior, *c.* 125.
posterior, ibid.
Rajab, ibid.
Radius major. Definitio, *m.* 39.
minor, 38.
Rationum symptoma, *g.* 84.
Ravelin, *m.* 109.
Reductus quomodo delineetur, 224. & *seqq.*
Refractio horizontalis Solis quomodo inveniatur, *g.* 144.
Regula quale membrum in Ordinibus, *a.* 104.
Regula ad delineandum Ordines atque ædificium utilis quomodo construatur, 175.
Regula Calibræ. Definitio, *p.* 102. quomodo paretur, 103. usus, 105. & *seqq.* examen, 111.
Rhombus. Definitio, *g.* 286. quomodo inveniatur, 387. 388. quomodo inveniatur, in quo navigandum, 384. juxta quem facta navigatio, 322. 326.
Rosa nautica. Definitio, 289.
Rosa pyrotechnica quomodo fiat, *p.* 82. 83.
Ruderatio quomodo fiat, *a.* 461. & *seqq.*

S.

SAbat, sive *Shebat*, *c.* 121. 123.
Saccus globi incendiarii quomodo delineetur, *p.* 49. 51.
Saccus pyrotechnicus. Definitio, 36.
Samadan, *c.* 125.
Saphar, ibid.
Sappa, sive *suffossio.* Definitio, *m.* 242. quomodo paretur, 246.
Säulenstellungen, *a.* 213.
Saxa quomodo cædenda, 49.
Saxorum virtutes quomodo cognoscantur, 48.
Scala. Definitio, *a.* 502. quomodo construenda, 503. & *seqq.* delineanda, 514.
Scalæ constructio ad delineandos Ordines necessaria, *a.* 172. quæ errores distantiarum in mappis planis corrigat. *g.* 372.

Scapus columnæ, a. 96. quomodo contrahatur, 183.
Scenographia ædium. Definitio, *a.* 527.
Scharis meh, c. 113.
Scheere, five *Scheer-Werck, m.* 109.
Schieß-Scharten, 109.
Schlangen, p. 100.
Schulter-Winckel, m. 52.
Sciaterica, f. 2.
Sciatericum. Definitio, 3.
Scintillæ pyrotechnicæ quomodo conficiantur, *p.* 87.
Scrupulum Chaldaicum. Definitio, *c.* 40. quomodo in horaria convertatur, 42.
Seculum. Definitio, *c.* 86.
Semidiameter Terræ quanta fit, *g.* 41. *& seqq.* quomodo inveniatur, 30. 32. *& seqq.* 38.
September, c. 97.
Septentrio. Definitio, *g.* 211.
Septimana. Definitio, *c.* 43.
Serpentinel, p. 100.
Sextilis, c. 88.
Shaaban, 125.
Shabat, ibid.
Shawal, ibid.
Signorum paralleli quomodo horologiis folaribus infcribantur. *f.* 135. *& feqq.*
Sima. Definitio, *a.* 110. delineatio, 119.
Sivan. c. 123.
Sol ubinam fiat verticalis, ubinam non, *g.* 93. quando hoc fiat, 94. ubinam dato momento verticalis, quomodo inveniatur, 173. quando in zona torrida loco alicui fiat verticalis quomodo ope globi inveniatur, 242. *& feqq* quando mediam diftantiam a vertice in zona torrida habeat, quomodo inveniatur, 95. *& feqq.* ubinam ter per annum mediam diftantiam a vertice habeat, 98. ubinam bis, 99. quo momento planum declinans illuftrare incipiat, quomodo determinetur, *f.* 110. *& feqq.* quando in zona torrida appareat retrogradus, *g.* 171. ubinam dato momento oriatur & occidat, quomodo inveniatur, *g.* 175. quando in zona torrida non occidat, quomodo ope globi inveniatur, 248. item quando non amplius oriatur 249. Solis non occidentis mora fupra horizontem quomodo inveniatur, 146.
Solis meridiani a vertice diftantia quanta fit, *g.* 159.
Solanus quinam ventus, 215. 216.
Soli conditio quomodo exploranda, *a.* 320.
Soliditas Terræ quanta fit, *g.* 44.
Sphæra obliqua. Definitio, 121. ubinam fit, 124.
Sphæra parallela. Definitio, 120. ubinam fit, 123. phænomena ejus, 125. 128. *& feqq.*
Sphæra recta. Definitio, 119. phænomena, 125. *& feqq* ubinam fit, 122.
Spreng-Kugel, p. 58.
Statio vallaris. Definitio, *m.* 25.
Stehender Mörser, p. 142.
Stellulæ pyrotechnicæ quomodo conficiantur, 84.
Die Streiche, m. 52.
Die ftreichende Defens-Linie, ibid.
Der Streich Winckel, ibid.
Structura Græca, a. 354.
incerta, 352.
ifodoma, 356.
pfeudifodoma, 357.
revincta, 359.
reticulata, 349.
Stupæ pyrotechnicæ præparatio, *p.* 59.
Stylobata. Definitio, *a.* 95.
Subfolanus qualis ventus, *g.* 215.
Subftructio, a. 311.
Subvefperus qualis ventus, *g.* 215. 216.
Sud, c. 211.
Süd gen Often, g. 215.
Süd gen Weften, ibid.
Süd-Oft, ibid.
Süd-Oft gen Often, ibid.
Süd-Oft gen Norden, ibid.
Süd-Sud-Oft, ibid.

Sûd-West, g. 215.
Sûd-West, ibid.
Sûd-West gen Sûden, ibid.
Sûd-West gen Westen, ibid.
Suggestus mortariorum. Definitio m. 228.
Suggestus tormentorum. Definitio, 227. delineatio, 229.
Sulphuris depuratio, p. 10. qualitates, 18. 21. 22.
Supercilia, a. 104.
Superficies Terræ quanta sit, 44. quomodo se habeat ad zonam frigidam, 88. & *seqq.* quomodo ad temperatam, 85. torridam, 80. 81.
Supernas quinam ventus, g. 215. 216.
Symmetria quid sit & in quo consistat, a. 24. & *seqq.*
Syne, c. 111.
Systylon opus, a. 225.

T.

Tabulæ loxodromicæ. Definitio, g. 331. quomodo construantur, 333.
Tænia, a. 104.
Tamuz, c. 112.
Tebeth, 123.
Tecta quomodo construenda, a. 519. & *seqq.* 523.
Tegulæ hamatæ, 522.
imbricatæ, ibid.
Tekuphæ quid sint, c. 337. quomodo inveniantur, 348.
Tempestates annuæ quomodo se habeant sub æquatore, g. 100. & *seqq.* quomodo in zona torrida extra æquatorem, 104. & *seqq.*
Tempestates vagæ. Definitio, g. 227. causæ, 229.
Templi Cella sive *Corpus*, a. 236.
Temporis momentum quomodo ex altitudine Solis ope globi inveniatur, g. 236.
Termini paschales. Definitio, c. 284.
Terminorum paschalium Tabulæ Gregoriana quomodo construatur, 309.
Terra cur circumnavigari potuerit, g. 5.
Terræ figura qualis sit, 3. 4.
Terræ figura sphærica num in Tellure citra errorem sensibilem assumi possit, 10.
Testudines. Definitio, a. 468.
Tetrastylon, 214.
Thamuz, c. 121. 123.
Thir meh, 113.
Thisri, 121. 123.
Thot, 106.
Thrascias qualis ventus, g. 215. 216.
Tisbrin prior, c. 112.
posterior, ibid.
Tonnen-Gewôlbe, a. 469.
Tormentum. Definitio, p. 99. species, 100. delineatio, 115. & *seqq.*
Tormentum quomodo oneretur, p. 130. dirigatur, 133. 134. cur explosum retrocedat, 138.
Tormentum insititium. Definitio, 151. quomodo paretur & oneretur, 152.
Torus, a. 105. quomodo delineetur, 113.
Trabeatio. Definitio, a. 100. quænam cuilibet intercolumnio conveniat quomodo inveniatur, 227. & *seqq.*
Traversen, m. 109.
Trenchéen-Kugel, p. 58.
Triacontaëteris Muhammedana. Definitio, c. 350.
Triglyphi cum guttis quid sint, a. 133. quomodo delineentur, 179.
Trochilus, a. 108. quomodo delineetur, 116.
Tropicus cancri. Definitio, g. 17. situs, 18.
Tropicus Capricorni. Definitio, 17. situs, 18.
Truncus stylobatæ, a. 95.
Tybi, c. 106.
Tykymt, 111.
Tympani altitudo, a. 270. 271.
Tyr, c. 111.
Tysbas, ibid.

V.

Vallum. Definitio, *m.* 13. cur munimentis conveniat, 14. altitudo, 18. 82. declivitas, 19. defensio qualis esse debeat, 53.
Valli operum externorum dimensiones, 120.
Veadar, *c.* 123.
Ventus. Definitio, *g.* 215. divisio, 215. qualis sit, qui per terram continentem spirat, 222. 225. qualis, qui per maria spirat, 220.
Ventus cardinalis, 215.
collateralis, ibid.
collateralis primarius, ibid.
collateralis secundarius primi vel *secundi ordinis*, ibid.
Venustas. Definitio, *a.* 10.
Veris initium & finis. Definitio, *g.* 78.
Ver quando sub æquatore, 103. ubinam bis, 109.
Versorium. Definitio, 296.
Versuræ compositæ quomodo delineandæ, *a.* 408.
Versuræ simplices quomodo delineandæ, 407.
Vertex objectorum cur iter facientibus prius videatur quam radix & contra, *g.* 8. 9.
Via navis qualis sit, 339.
Vinea. Definitio, *m.* 243. quomodo paretur, 248.
Visus distantia, quam in superficie maris vel planitie terræ attingit, quomodo inveniatur, *g.* 47.
Umbra meridiana quo die altitudini corporis æqualis, *g.* 166. quando quolibet die, 167. quomodo variet in diversis locis, 164.
Umbræ solstitiales quomodo se habeant in diversis locis, 164.
Umbræ rectæ ratio ad altitudinem opaci, 160.
Umbræ versæ ratio ad altitudinem opaci, *g.* 161.
Voluta. Definitio, *a.* 133. quomodo delineetur, 135.
Urnæ pyrotechnicæ. Definitio, *p.* 34.
Utilitas ædificii. Definitio, *a.* 7.
Vulturnus quinam ventus, *g.* 15. 16.

W.

Waffen-Plätze, *m.* 109.
der Wall, *m.* 52.
der *Wallgang*, ibid.
West, *g.* 212.
West gen Norden, 215.
West gen Süden, ibid.
West-Nord-West, ibid.
West-Süd-West, ibid.
Winckel der Flanck und Cortine, *m.* 52.

Z.

Zephyroboreas qualis ventus, *g.* 215.
Zephyrus, ibid.
Zius, *c.* 121.
Zonæ inter se collatæ quoad magnitudinem, *g.* 91. 92.
Zona frigida australis. Definitio, 73. latitudo, 74.
Zona frigida borealis. Definitio, 73. latitudo, 74.
Zonæ temperatæ ratio ad superficiem Terræ, 85. 86. magnitudo, 87.
Zona temperata australis. Definitio, *g.* 70. latitudo, 72.
Zona temperata borealis. Definitio, 70. latitudo, 72.
Zona torrida. Definitio, 66. latitudo, 68. magnitudo, 82. ratio ad superficiem Terræ, 80. 81. quomodo ab æquatore dividatur, 68.
Zophorus. Definitio, *a.* 100. qualis esse debeat, 101.
der *Zwischen-Wall*, *m.* 52.

FINIS INDICIS TOMI IV.

VIII.

INDEX

Rerum in Commentatione de Studio Mathematico recte instituendo contentarum, quæ legitur Tomo V Elementorum Matheseos.

A.

Æquatio ad parabolam quomodo deducatur ex sectione coni, 205.
Æquatio curvæ particularis quomodo reducatur ad generalem, 197.
Æquationes ad curvam, in qua origo abscissarum non est in aliquo puncto curvæ, quomodo tractentur, 206.
Æquationis cubicæ & biquadraticæ constructio, quod supponat inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas, 223.
Æquationum inventio cur subinde non uno modo tentanda, 174.
Æquationum usus in curvis mechanicis ostenditur, 207.
Aerometriæ studium quomodo instituendum, 264. *& seqq.*
Agrimensores an theoriam Geometriæ recte negligant, 129. *& seqq.*
Algebra quomodo tractanda, 143. *& seqq.* quomodo ad Geometriam applicanda, 173. *& seqq.* qualis primum fuerit & quomodo deinceps ulterius perfecta, 165. quousque perfecta, 188. cur ad tertium cognitionis gradum adspiranti cognitu necessaria, 681. quod subinde suppeditet absque ulla ambage constructiones problematum veterum, 183.
Algebraicum studium quomodo facilitetur, 166.
Analysis mathematica quomodo exercenda, 143. *& seqq.* cur ad tertium cognitionis gradum adspiranti cognitu necessaria, 81.
Analysis Diophantea quomodo tractanda, 171. 172.
Analysis infinitorum quomodo tractanda, 226. *& seqq.*
Analysis Veterum qualis fuerit, 145.
Approximationes quomodo per series infinitas inveniantur, 244. *& seqq.*
Architecti militares an theoriam Geometriæ tuto negligant, 129. *& seqq.*
Architecturæ civilis studium, 337. *& seqq.*
Architecturæ militaris studium, 333. *& seqq.* scientifica cognitio num prosit Architecto militari, 335.
Arithmetica quomodo in usum Artis inveniendi tractanda, 121.
Arithmetica infinitorum in infinitum extensa, 251.
Arithmeticæ literalis quomodo tractanda, 146. *& seqq.*
Arithmetica literalis usus in inveniendo, 154.
Arithmetica practica quomodo tractanda, 113. *& seqq.*
Arithmeticæ practicæ compendium quomodo ex Elementis Autoris exscribendum, 120.
Arithmetica theoretica quomodo tractanda, 118.
Ars inveniendi quomodo ope Architecturæ civilis exerceatur, 339.
Artificia analytica cur probe notanda, 166. 167. 192. inter se conferenda, 192.
Artis characteristicæ notio quomodo acquiratur,

ratur, 147. usus in inveniendo, 156.
Artis inveniendi regulæ abstrahendæ ab Arithmetica communi, 122. a literali, 157. 163. 164.
Artis inveniendi causa quomodo Mathesis tractanda, 106.
Artium scientiam excolenti quid notasse prosit, 329.
Astronomiæ studium, 290. & *seqq.* cognitio historica quomodo acquirenda, 293. & *seqq.*
Astronomia quid conferat ad Artem inveniendi, 302. & *seqq.*
Astronomia practica quomodo addiscatur, 297. & *seqq.*
Asymptotos determinandi methodus quo principio nitatur, 231.

C.

C*Alculus algebraicus* a perplexitate liberatus, 187. num theoriam supponat in solvendis problematis, 145.
de *Calculi differentialis inventore controversia* quomodo intelligenda, 228.
Calculi integralis notio explicata, 235.
Calculus literalis in Algebra quomodo per numeros explicetur servata universalitate, 168.
Calculus numerosus quomodo ad formam universalis reducatur, 154. quomodo in locum literalis surrogari possit, 169.
Calculus situs quid sit, 144. quales supponat in Geometria definitiones, 155.
Catoptricæ studium, 274. & *seqq.*
Chronologiæ studium, 323. & *seqq.*
Circulus cur per æquationem algebraicam definiri possit, 195.
Circuli proprietates algebraice erutæ, 193. & *seqq.* 206.
Circuli quadratura per series infinitas explicata, 238.
Citationes in demonstrationibus quem habeant usum, 45.
Cognitionis humanæ gradus quot dentur, 1. quod non eadem facilitate acquirantur, 2. quomodo acquirantur, 3.
Cogitandi modus naturalis quomodo servetur in studio mathematico, 108.
Conchoidis proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 203. constructio facillima inde deducta, *ibid.* tangens quomodo ducenda, 232.
Constructio æquationum quomodo ad Analysin Veterum propius adducatur, 181.
Constructiones æquationum superiorum quomodo inventæ, 218. 219. cur analyticas dederit Autor, 220.
Constructiones geometricæ formularum algebraicarum num pure enunciandæ, 180. an semper synthetice demonstrandæ, 177. quodnam inter elegantes & inelegantes intercedat discrimen, 185.
Corollaria quid sibi velint, 58. quomodo expendenda, 59. quomodo symbolice repræsentanda eorum demonstratio, 60.
Curiositatis gratia quomodo Astronomia tractanda, 292.
Curvæ quænam per æquationes algebraicas definiri nequeant, 196. quænam ab Autore considerentur in Elementis suis, 209. quomodo ad curvas alias referantur, 208. quænam in constructione problematis alteri præferenda, 221.
Curvarum doctrina quantum adhuc distet a perfectione sua, 217.
Curvarum proprietates quomodo per æquationes eruantur, 193.
Curvarum quadraturæ a quadratura parabolæ pendentes, 237. quod reducantur ad quadraturam circuli & hyperbolæ, 239.
Cycloidis proprietas singularis, 250.

D.

D*Efinitiones* quomodo expendendæ, 5. quomodo expendendæ in usum Artis inveniendi, 82. & *seqq.* cur ab iis incipiendum, 4. cur exemplis & quomodo illustrandæ, 5. quo ordine collocandæ & legendæ, 6.
Definitiones arithmeticæ quomodo exemplis

plus .. ſtrentur, 11. 12. objectio quædam removetur, 16.
Definitiones geometricæ quomodo ad evidentiam ſenſus reducendæ, 13.
Definitiones nominales quales eſſe debeant, 10.
Definitiones reales quomodo inveniantur præſuppoſitis nominalibus, 87. 88. num nominalibus præferendæ, 89.
Definitionum repræſentatio ſymbolica, 11. *& ſeqq.*
Demonſtrandi principia qualia ſupponantur, 71.
Demonſtrationes quando ſint naturales, 62. quales ab Autore exhibeantur, 63. quales vulgo, 64. quomodo reſolvendæ, 31. 38. 40. *& ſeqq.* 47. quomodo faciant ad perficiendum intellectum, 99. *& ſeqq.* 102. *& ſeqq.* quomodo libris inſerantur, 46. quomodo in Hydroſtatica facilitandæ, 263.
Demonſtrationes arithmeticæ cur ſervent univerſalitatem ad exempla applicatæ, 50.
Demonſtrationes aſtronomicæ quatenus recedant a rigore, 301.
Demonſtrationes catoptricæ num ſint ſuperfluæ, 277.
Demonſtrationes dioptricæ quod pluribus modis fieri poſſint, 281.
Demonſtrationes mechanicæ quales ſint, 32. cur in locum cæterarum non ſurrogandæ, 33. quod æquipolleant exemplis numericis, 34. quibusnam ſatisfaciant, 36. quomodo ad tertium cognitionis gradum conducant, 72. 73.
Demonſtrationes problematum quomodo reſolvendæ, 52. quomodo ſymbolice repræſententur, 53. 55.
Demonſtrationes ſyntheticæ num recte negligantur, 101. num ex calculo algebraico erui poſſint, 178. quænam cum iis non confundendæ, 179. cur analyticis miſceantur ab Autore, 260.
Demonſtrationum forma, 31. 37. ſymbolica repræſentatio, 39. 42. quem habeat uſum, 44. 48. 49.
Dioptricæ ſtudium, 280. *& ſeqq.*

E.

Ellipſeos conſtructio ex æquatione elicita, 215. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 200.
Experientiæ ac rationis connubium cur perpetuum eſſe debeat, 312.

F.

Fictionum in calculo algebraico uſus, 189.
Figuræ in Matheſi quales requirantur, 10.
Formulæ algebraicæ quomodo applicandæ, 158. *& ſeqq.*

G.

Geographiæ ſtudium, 317. *& ſeqq.* *Geographiæ hiſtorica cognitio* quomodo acquiratur, 318.
Geometria quomodo in uſum Matheſeos reliquæ tractanda, 162. uſus in reliqua Matheſi ſtabilitus, 133. 136. quomodo intellectus perficiendi gratia tractanda, 134.
Geometriæ elementaris ſupplementum in uſum Algebræ conſcribendum, 186.
Geometria practica quomodo tractanda, 122. *& ſeqq.* quomodo ex Elementis Autoris extrahenda, 128.
Gnomonicæ ſtudium, 326. *& ſeqq.*

H.

Hydraulicæ ſtudium quomodo inſtituendum, 267. *& ſeqq.*
Hydrographiæ ſtudium, 322.
Hydroſtaticæ ſtudium, 261. *& ſeqq.* uſus in Philoſophia naturali, 262.
Hyperbolæ conſtructio ex æquatione elicita, 216. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 201. 202.
Hypotheſes quomodo excolendæ, 309. 310. qualibus in Philoſophia locus, 311.

I.

Inductio quomodo pariatur, 35.
Integratio differentialium cur subinde requirat quantitatem adjiciendam, 236.
Intellectus cur & quomodo studio Matheseos perficiatur, 92. *& seqq.* quomodo perficiatur, si ad primum tantummodo cognitionis gradum adspires, 94. *& seqq.*
Intellectus perfectio quænam maxima, 106.
Intellectus perficiendi gratia quomodo in Geographia versandum, 321.
Intellectui quæ patent quomodo ad evidentiam sensus reducantur, 11. *& seqq.*
Irrationalium existentia, 225. ad formam rationalium reductio quem habeat usum, 152.

L.

de *Locis geometricis* notanda, 210. *& seqq.*
Logica genuina unde agnoscatur, 104.
Logicæ studio quodnam præmittendum, 105.

M.

Mathesis an in usum Artis inveniendi tractari possit, 314. *& seqq.* quomodo in hunc usum tractetur, 106.
Matheseos studium quomodo intellectus perficiendi causa tractandum, 90.
Matheseos sublimioris studiosi quænam ex Mechanicis addiscere debeant, 259.
Mechanica quantum a Veteribus promota, 252. quantum a Recentioribus, *ibid.* quomodo tractanda in usum tertii gradus cognitionis, 255. 256.
Mechanicæ praxis quomodo addiscenda, 253. 254.
Mechanicæ principia ad phænomena naturæ explicanda, utilia, 258.
Mechanicæ studium quomodo tractandum, 252.
Methodus mathematica num Theologiæ, Jurisprudentiæ & Medicinæ conveniat, 107.
Methodus de maximis & minimis quo nitatur principio, 234.
Methodus tangentium inversa quomodo expendenda, 248.

N.

Notiones ontologicæ quomodo ex Mathesi derivandæ, 340.

O.

Opticæ studium quomodo instituendum, 271. *& seqq.* quod ad Physicam conducat, 272.

P.

Parabolæ proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 198.
Perspectiva quomodo tractanda, 273.
Philosophiæ naturalis principia mathematica quænam proprie dicantur, 257.
Philosophus quomodo versari debeat in Catoptrica, 276. quomodo in Dioptrica, 282.
Præparatio ad demonstrationem cur necessaria, 74. 75. quomodo ad eam perveniatur, 76.
Præparatio ad tertium gradum cognitionis per secundum, 71.
Praxis quomodo reddatur oculata, 140.
Problemata quomodo in theoremata convertantur, 51. 54. quomodo tractanda, ac si resolutio invenienda esset, 77. *& seqq.*
Problematum symbolica repræsentatio, 26. 27.
de *Problematis physico-mechanicis* notanda, 257.
Propositiones quomodo rite exponendæ, 17. quomodo a nobis enunciatæ, 18. 19. quomodo a Veteribus & Clavio, 20. cur pure enunciandæ, 21. 57.
Pyrotechniæ studium, 330. quid conferat ad artem inveniendi, 332.

Q.

Quadraturæ per series infinitas pendent a quadratura infinitarum Parabolarum, 239.

R.

Radices duæ in contactu æquales, 199.
Rationum doctrina quomodo facilitetur, 160. 161.
Rationum inæqualitatis tractatio ad modum æquationum, 191.
Regressus serierum explicatur, 241.
Regulæ arithmeticæ cur formulis algebraicis ab Autore non fuerint adscriptæ, 175.
Resolutiones problematum quomodo illustrandæ, 22. quomodo in potestatem redigendæ, 23. quomodo sola attentione ad theoremata innotescant, 80.
Resolutiones problematum numericæ quomodo exemplis illustrandæ, 29.
Resolutionum spuriarum examina quomodo subinde instituantur, 180.

S.

Saltus in ratiocinando expenditur, 61.
Scientiæ conjunctis viribus excolendæ, 313.
Sensus quid adjumenti afferant intellectui in veritate intelligenda, 7. 8. 9.
Series magis convergentes pro circulo quomodo deducantur ex minus divergentibus, 242. 243.
Sphæricorum studium, 285. & *seqq.*
Studium mathematicum quibusnam difficile videatur, 98.
Subnormalium formulæ algebraicæ quomodo geometrice construantur, 230.
Subtangentis notio explicata, 233.
Subtangentium formulæ algebraicæ quomodo geometrice construantur, 229.

T.

Tabulæ astronomicæ expenduntur, 298.
Tangentium methodus Barrowiana, 227. 228. quomodo inde prodeat differentialis, 228.
Theoremata quomodo in usum Artis inveniendi expendenda, 68. quod eo modo inveniri potuerint, quo demonstrantur, 70. quomodo in problemata resolvenda convertantur, 67.
Theorematum symbolica repræsentatio, 24. 25.
Theorica Planetarum quomodo ab autore tradita, 309.
Trigonometria in quem usum primum inventa, 137. quomodo in usum praxeos tractanda, 138. & *seqq.*
Trigonometriæ sphæricæ studium, 286. & *seqq.*

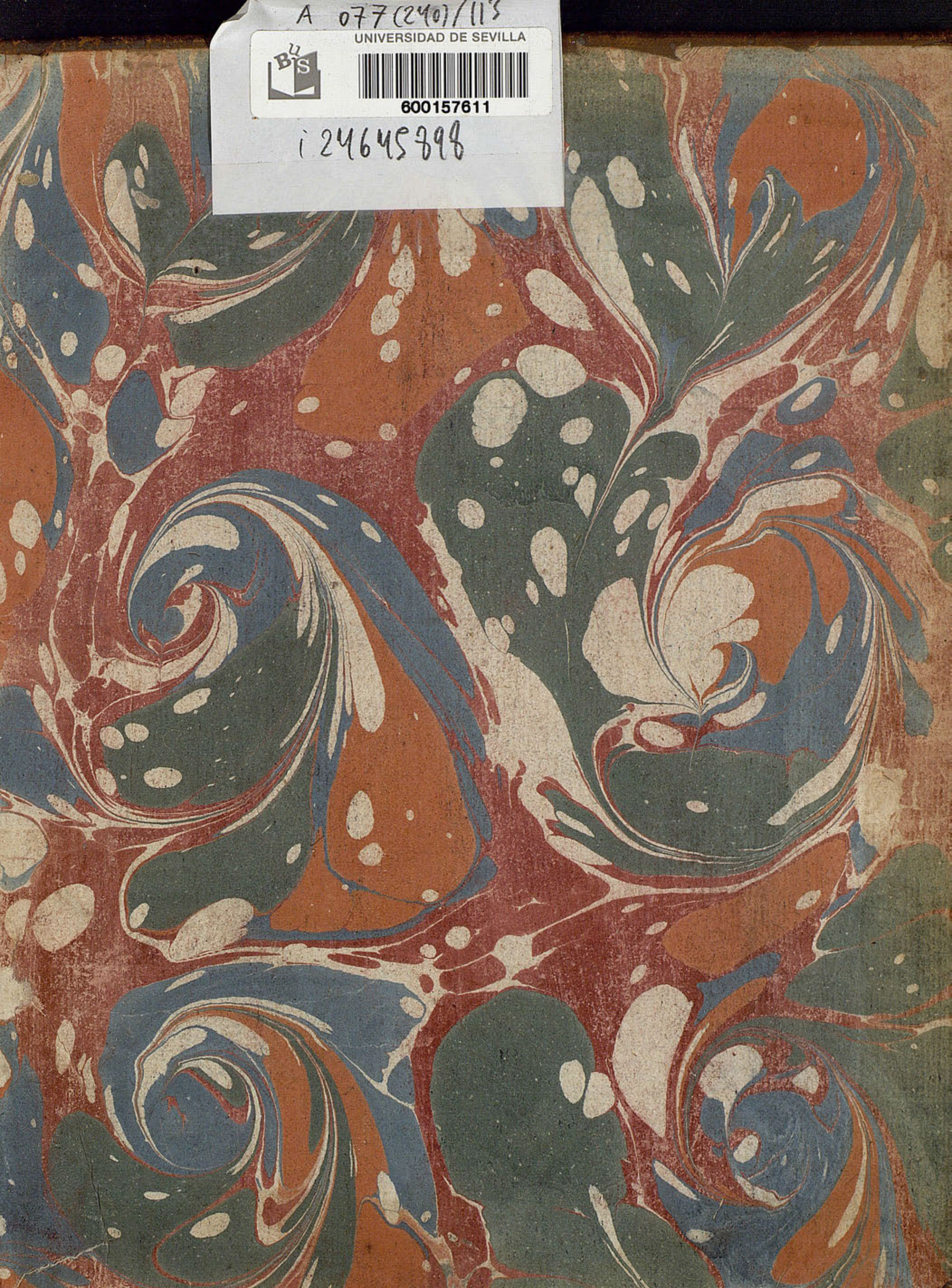
V.

Veritas invenienda quod alias cognitas supponat, 71.
Veritatis inveniendæ utilitas cur non attendenda, 176.
Vulgarium meditatio quem habeat usum, 170.

FINIS TOMI V. ELEMENTORUM MATHESEOS.






A 077(240)/113
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
BUS
600157611
i24645898




ELEMEN
UNIVER
TOM V